



IV SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Memorias

Paradigmas Evolutivos en
Educación Matemática

Conferencias
y
Artículos

MAYO'2023



IV SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Memorias del IV SEM-V Mayo'2023

Editor Científico: Jorge E. SAGULA

Compilador: Jorge E. SAGULA

Editor Gráfico: Diego O. AGUDO

IV SEM-V Simposio de Educación Matemática-Virtual, Paradigmas evolutivos en Educación Matemática

IV SEM-V Simposio de Educación Matemática-Virtual, paradigmas evolutivos en Educación Matemática : conferencias y artículos / compilación de Jorge E. Sagula. - 1a ed. - Luján : EdUnLu, 2023.

Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-987-3941-87-0

1. Matemática. I. Sagula, Jorge E., comp. II. Título.
CDD 510.711



IV SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Prólogo

El día 11 de mayo de 2023, y en su mes histórico, durante dos días comenzará su recorrido en la Educación Matemática, la 4ª edición del SEM-V (Simposio de Educación Matemática-Virtual), migración del histórico SEM (Simposio de Educación Matemática) que nació a fines del siglo pasado, en el mes de mayo del año 1999, en el Centro Regional Chivilcoy de la Universidad Nacional de Luján.

La idea original, concebida en 1998 y testeada en distintos escenarios de la Educación Superior no sólo en ámbitos académicos de Argentina sino en distintos países del Continente Americano y en Europa, y como consecuencia de mis participaciones en diferentes espacios de Educación Matemática fuera de Argentina, permitió sembrar semillas cognitivas y regarlas con diferentes enfoques y modalidades para potenciar a la Matemática en un país tenedor de Tres (3) Premios Nobel en Ciencias, y cuyo derrotero en Matemática, en general, tuvo momentos de alto reconocimiento y posicionamiento en varios países de América y Europa.

La disruptiva pandemia CoViD-19, en términos de la virtualidad, posibilitó el renacimiento del constructo del SEM, pero ya sin el recorrido físico en la sociabilización de los docentes e investigadores, sino mediados por la Modernidad Líquida, pero potenciando los sentidos del habla, de la audición y en muchos casos, del tacto en la escritura, y así poder trabajar en Aprendizaje por Refuerzo, con el propósito de propender a la mejora continua sin singularidades de la Educación en general; esclareciendo que se trata de los tres mismos sentidos que se utilizan en clases convencionales en un proceso de construcción del conocimiento en forma presencial. Así, el encuentro de profesores-investigadores, en distintas líneas y desde distintos puntos, ha permitido tener encendida “la llama del aprendizaje” en el campo de la Educación Matemática.

Por tal razón, y comprometido con el Proceso de Enseñanza-Aprendizaje en el campo de la Educación Matemática, el SEM cumplirá 24 años y consecuentemente, se acercará desde la Universidad Nacional de Luján, a la Comunidad de la Educación Matemática esta nueva edición, el IV SEM-V, para potenciar su derrotero, y este año, su leitmotiv es: “PARADIGMAS EVOLUTIVOS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA”, cuyo objetivo es la trascendencia y por supuesto, volcarse a las aulas en todos los niveles.

Jorge E. SAGULA
Chivilcoy, 24 de abril de 2023.



IV SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Programa

IV Simposio de Educación Matemática-Virtual (IV SEM-V) "PARADIGMAS EVOLUTIVOS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA"

Universidad Nacional de Luján
Modalidad Virtual
11 y 12 de mayo de 2023

Director Académico
Jorge E. SAGULA

Jueves 11 de mayo de 2023

PANEL DE APERTURA **"INVESTIGACIÓN Y TENDENCIAS** **EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA"**

Las teorías que han determinado el nacimiento de la Educación Matemática
y su desarrollo actual: para no olvidar

Dr. Bruno D'AMORE

NRD-Universidad de Bologna, Italia

Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, Colombia

¿Cómo influye la investigación en las tendencias actuales
sobre la enseñanza de las matemáticas?

Dr. Vicenç FONT

Universidad de Barcelona, España

Tendencias en la Investigación en Formación de Profesores de Matemáticas

Dr. Salvador LLINARES

Universidad de Alicante, España

Efectos Postraumáticos de CoViD-19 en el Aprendizaje de la Matemática

Dr. Fredy E. GONZÁLEZ

Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Núcleo de Investigación en
Educación Matemática "Dr. Emilio Medina", Venezuela

Moderador

Lic. Jorge E. SAGULA

Universidad Nacional de Luján, Argentina



IV SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

FORMULACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

CONFERENCIA CENTRAL GTD-1.1

La resolución de problemas y la investigación en Matemática y Educación Matemática
Dr. Juan E. NÁPOLES VALDES
Universidad Nacional del Nordeste y UTN-FRRes, Argentina

CONFERENCIA CENTRAL GTD-1.2

Heurística y Simulación, aliadas incondicionales en la Resolución de Problemas
Dr. Miguel DELGADO PINEDA
UNED, España

DISERTACIÓN INVITADA GTD-1.1

Derivada Generalizada Local
Aplicaciones con núcleos conformes y no conformes
Dr. Paulo Matías GUZMÁN
Universidad Nacional del Nordeste, Argentina

DISERTACIÓN INVITADA GTD-1.2

Algunos Resultados sobre una Nueva Derivada Fractal
Dr. Miguel VIVAS-CORTEZ
Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Ecuador

DISERTACIÓN INVITADA GTD-1.3

Matemática Discreta en aulas multigrado de primaria
M. Sc. Mayra Elizabeth PARRA AMAYA
Dr. Osvaldo J. ROJAS FERNÁNDEZ
Universidad Antonio Nariño, Colombia

DISERTACIÓN INVITADA GTD-1.4

La Modelación Geométrica para la Resolución de Problemas en Contextos Auténticos
M. Sc. Luz Marina FONSECA VIZCAYA
Universidad Antonio Nariño, Colombia

CONFERENCIA C1

El paso más largo
Dr. Bruno D'AMORE
NRD-Universidad de Bologna, Italia
Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, Colombia

CONFERENCIA C2

Los Criterios de Idoneidad Didáctica, herramientas para orientar la reflexión del profesor sobre su práctica
Dr. Vicenç FONT
Universidad de Barcelona, España



IV SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

GRUPO DE TRABAJO-DISCUSIÓN GTD-2 TECNOLOGÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CONFERENCIA CENTRAL GTD-2.1

Tecnología y Educación Matemática, trayectorias inseparables
Mg. Teresa LOIÁCONO
Universidad de Buenos Aires, Argentina

CONFERENCIA CENTRAL GTD-2.2

Las plataformas educativas, su impacto y potencialidad en el aprendizaje virtual
Mg. María Cristina BORGHI
Consultora Independiente, Argentina

DISERTACIÓN INVITADA GTD-2.1

El rol de la indagación matemática enmarcada en el manejo de las tecnologías
Mg. Enrique Fabián VALIÑO
Instituto Superior del Profesorado Dr. Joaquín V. GONZÁLEZ, C.A.B.A.
Examinador Senior y Workshop Leader del Bachillerato Internacional

DISERTACIÓN INVITADA GTD-2.2

Pandemia – Post-Pandemia - Emociones
Lic. Julia Leonor FRYDMAN
Directora de la Revista Punto Límite
Miembro de I.C.A.A. (International Council of Alcohol and Addiction)

CONFERENCIA C3

La actividad geométrica escolar en la perspectiva cognitiva
de Raymond Duval
Dra. Ismenia GUZMÁN
Universidad de Los Lagos, Chile

CONFERENCIA C4

La importancia de las Metodologías Activas y de los recursos
en el Planeamiento Docente
Dra. Claudia L. OLIVEIRA GROENWALD
Universidade Luterana do Brasil, Brasil

CONFERENCIA C5

Educación de los Sentimientos y Emociones:
tarea pendiente en la Educación Matemática
Dr. Fredy E. GONZÁLEZ
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil
Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Núcleo de Investigación en Educación
Matemática "Dr. Emilio Medina", Venezuela



IV SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Viernes 12 de mayo de 2023

CONFERENCIA C6

Relación teoría-práctica en la formación de Profesores de Matemática:
tensiones y expectativas
Dr. Salvador LLINARES
Universidad de Alicante, España

CONFERENCIA C7

La práctica de la vigilancia epistemológica en la formación del profesorado:
el caso de los libros de texto y de los videos educativos
Dr. Roberto VIDAL CORTÉS
Universidad Alberto Hurtado, Chile

CONFERENCIA C8

Buscando generar ambientes para desarrollar experiencias
de aprendizaje: una invitación a repensar el aula universitaria
Dra. Adriana María del Huerto ENGLER
Universidad Nacional del Litoral, Argentina

**GRUPO DE TRABAJO-DISCUSIÓN GTD-3
MODELIZACIÓN MATEMÁTICA**

CONFERENCIA CENTRAL GTD-3.1

Modelización Matemática en el acceso a la Universidad
Dra. Mabel RODRÍGUEZ
Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina

CONFERENCIA CENTRAL GTD-3.2

Modelización Matemática en contextos extramatemáticos
Dr. Marcel POCHULU
Universidad Nacional de Villa María, Argentina
Universidad Tecnológica Nacional, FRVM, Argentina
Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

DISERTACIÓN INVITADA GTD-3.1

Propuestas basadas en contextos reales: matemática para la toma de decisiones
Dr. Pablo CARRANZA
Universidad Nacional de Río Negro, Argentina

DISERTACIÓN INVITADA GTD-3.2

Del cielo a la tierra: Uso de elementos de las Matemáticas en Ingeniería
y su vinculación con el sistema escolar
Dr. Cesar RETAMAL BRAVO
Universidad de Talca, Chile



IV SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

DISERTACIÓN INVITADA GTD-3.3

Concepciones de Modelación Matemática presentes en la Base Nacional Común Curricular de Brasil y los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios de Matemática de Argentina: aproximaciones y distanciamientos

Mg. Ricardo Angelo MONTEIRO CANALE

Universidade de São Paulo, Brasil

CONFERENCIA C9

Computational Thinking and Learning Analytics in Mathematics Education: Enhancing the programming experiences for Teachers and Students

Dr. Marcelo F. MILRAD

Linnaeus University, Suecia

Dr. Chronis KYNIGOS

National and Kapodistrian University of Athens, Greece

CONFERENCIA C10

Explorando el futuro de la Educación Matemática con la Inteligencia Artificial de Chat GPT

Dra. Carina S. GONZÁLEZ GONZÁLEZ

Universidad de La Laguna, Tenerife-Islas Canarias, España

GRUPO DE TRABAJO-DISCUSIÓN GTD-4 EDUCACIÓN ESTOCÁSTICA

CONFERENCIA CENTRAL GTD-4.1

Pensamiento Metaheurístico, una posible consecuencia del Pensamiento Estadístico y del Pensamiento Probabilístico

Lic. Jorge E. SAGULA

DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

Equipo COIN (Director), DCB, Universidad Nacional de Luján, Argentina

DISERTACIÓN INVITADA GTD-4.1

Alfabetización Estadística en el ámbito educativo

Mg. Reinaldo SALAZAR

Universidad de Playa Ancha, Chile

DISERTACIÓN INVITADA GTD-4.2

Pensamiento Estadístico: ¿qué aportan las Matrices de Koestler?

Dr. Héctor HEVIA

Universidad Alberto Hurtado, Chile



IV SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

PANEL DE CLAUSURA
“INTERDISCIPLINARIEDAD EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Y
TRANSDISCIPLINARIEDAD DESDE EDUCACIÓN MATEMÁTICA”

Interdisciplinariedad y Transdisciplinariedad
en la Formación de Profesores de Matemática

Dr. Marcel POCHULU

Universidad Nacional de Villa María, Argentina

Universidad Tecnológica Nacional, FRVM, Argentina

Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

Educación Matemática para la Vida, conceptos de un hijo de una Maestra Sistémica

Dr. Grover E. VILLANUEVA SÁNCHEZ

Universidad Nacional de Trujillo, Perú

Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

Derivadas Fraccionarias y Generalizadas. Aquí y allá

Dr. Juan NÁPOLES VALDES

Universidad Nacional del Nordeste, Argentina

U.T.N.–Facultad Regional Resistencia, Argentina

Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

El rol de la Inteligencia Artificial
vehiculizando la Educación Matemática transformadora

Dr. Marcelo F. MILRAD

Linnaeus University, Suecia

¿Qué genera mayor expectativa?: Matemática Cuántica o Gastronomía Matemática
en procura de contribuir con la Educación Matemática

Lic. Jorge E. SAGULA

DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

Equipo COIN (Director), DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

Moderadora

Lic. Emma L. FERRERO

Directora Decana-Departamento Ciencias Básicas

Universidad Nacional de Luján, Argentina



IV SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Indice Referencial

1ª Parte: PANELES

PA: Panel de Apertura

PC: Panel de Clausura

2ª Parte: CONFERENCIAS

CA: Contexto Abierto

GTD: Grupo de Trabajo-Discusión

GTD-1-FRP: Formulación y Resolución de Problemas

GTD-2-TEM: Tecnología en Educación Matemática

GTD-3-MM: Modelización Matemática

GTD-4-EE: Educación Estocástica

3ª Parte: ARTÍCULOS

CA: Contexto Abierto

DM: Didáctica Matemática

GTD: Grupo de Trabajo-Discusión

GTD-1-FRP: Formulación y Resolución de Problemas

GTD-2-TEM: Tecnología en Educación Matemática



IV SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Paneles y Conferencias - Índice

Página 16

Panel-Apertura: INVESTIGACIÓN Y TENDENCIAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Bruno D'AMORE

Las teorías que han determinado el nacimiento de la Educación Matemática y su desarrollo actual: para no olvidar

Vicenç FONT MOLL

¿Cómo influye la investigación en las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas?

Salvador LLINARES

Tendencias en la Investigación en Formación de Profesores de Matemáticas

Fredy E. GONZÁLEZ

Efectos Postraumáticos de CoViD-19 en el Aprendizaje de la Matemática

Página 18

**Panel-Clausura: INTERDISCIPLINARIEDAD EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y
TRANSDISCIPLINARIEDAD DESDE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

Marcel D. POCHULU

Interdisciplinarietà y Transdisciplinarietà en la Formación de Profesores de Matemática

Grover E. VILLANUEVA SÁNCHEZ

Educación Matemática para la Vida, conceptos de un hijo de una Maestra Sistémica

Juan E. NÁPOLES VALDES

Derivadas Fraccionarias y Generalizadas, aquí y allá

Marcelo F. MILRAD

El rol de la Inteligencia Artificial vehiculizando la Educación Matemática transformadora

Jorge E. SAGULA

¿Qué genera mayor expectación?: Matemática Cuántica o Gastronomía Matemática en procura de contribuir con la Educación Matemática



IV SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Paneles y Conferencias - Índice

Página 21

CA-Conferencia 01: Bruno D'AMORE

El paso más largo

Página 28

CA-Conferencia 02: Vicenç FONT MOLL

Los criterios de Idoneidad Didáctica, herramientas para orientar la reflexión del profesor sobre su práctica

Página 37

CA-Conferencia 03: Ismenia GUZMÁN

La actividad geométrica escolar en la perspectiva cognitiva de Raymond Duval

Página 42

CA-Conferencia 04: Claudia L. OLIVEIRA GROENWALD

La importancia de las Metodologías Activas y de los recursos en el Planeamiento Docente

Página 47

CA-Conferencia 05: Fredy E. GONZÁLEZ

Educación de los Sentimientos y Emociones: tarea pendiente en la Educación Matemática

Página 55

CA-Conferencia 06: Salvador LLINARES

Relación teoría-práctica en la formación de Profesores de Matemática: tensiones y expectativas

Página 60

CA-Conferencia 07: Roberto VIDAL CORTEZ

La práctica de la vigilancia epistemológica en la formación del profesorado: el caso de los libros de texto y de los videos educativos

Página 65

CA-Conferencia 08: Adriana ENGLER

Buscando generar ambientes para desarrollar experiencias de Aprendizaje: una invitación a repensar el aula universitaria

Página --

CA-Conferencia 09: Marcelo F. MILRAD & Chronis KYNIGOS

Computational Thinking and Learning Analytics in Mathematics Education: Enhancing the programming experiences for Teachers and Students

Página 74

CA-Conferencia 10: Carina S. GONZÁLEZ GONZÁLEZ

Explorando el futuro de la Educación Matemática con la Inteligencia Artificial de Chat GPT



IV SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Paneles y Conferencias - Índice

Página 82

GTD-1-Conferencia Central GTD-1.1: Juan E. NÁPOLES VALDES

La resolución de problemas y la investigación en
Matemática y Educación Matemática

Página 87

GTD-1-Conferencia Central GTD-1.2: Miguel DELGADO PINEDA

Heurística y Simulación, aliadas incondicionales en la
Resolución de Problemas

Página 101

GTD-1-Disertación Invitada GTD-1.1: Paulo Matías GUZMÁN

Derivada Generalizada Local. Aplicaciones con núcleos
conformes y no conformes

Página 103

GTD-1-Disertación Invitada GTD-1.2: Miguel VIVAS-CORTEZ

Algunos Resultados sobre una Nueva Derivada Fractal

Página 109

GTD-2-Conferencia Central GTD-2.1: Teresa LOIACONO

Tecnología y Educación Matemática, trayectorias inseparables

Página 118

GTD-2-Conferencia Central GTD-2.2: María Cristina BORGHI

Las plataformas educativas, su impacto y potencialidad
en el aprendizaje virtual

Página 126

GTD-2-Disertación Invitada GTD-2.1: Enrique Fabián VALIÑO

El rol de la indagación matemática enmarcada en el
manejo de las tecnologías

Página 134

GTD-2-Disertación Invitada GTD-2.2: Julia Leonor FRYDMAN

Pandemia – Post-Pandemia - Emociones

Página 140

GTD-3-Conferencia Central GTD-3.1: Mabel RODRÍGUEZ

Modelización Matemática en el acceso a la universidad

Página 145

GTD-3-Conferencia Central GTD-3.2: Marcel D. POCHULU

Modelización Matemática en contextos extramatemáticos

Página 151

GTD-3-Disertación Invitada GTD-3.1: Pablo CARRANZA

Propuestas basadas en contextos reales: matemática
para la toma de decisiones



IV SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Paneles y Conferencias - Índice

Página 156

GTD-3-Disertación Invitada GTD-3.2: Cesar RETAMAL BRAVO

Del cielo a la tierra: Uso de elementos de las Matemáticas en Ingeniería y su vinculación con el sistema escolar

Página 162

GTD-3-Disertación Invitada GTD-3.3: Ricardo Angelo MONTEIRO CANALE

Concepciones de Modelación Matemática presentes en la Base Nacional Común Curricular de Brasil y los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios de Matemática de Argentina: aproximaciones y distanciamientos

Página 168

GTD-4-Conferencia Central GTD-4.1: Jorge Enrique SAGULA

Pensamiento Metaheurístico, una posible consecuencia del Pensamiento Estadístico y del Pensamiento Probabilístico

Página 174

GTD-4-Disertación Invitada GTD-4.1: Reinaldo SALAZAR ESPINOZA

Alfabetización Estadística en el ámbito educativo

Página 182

GTD-4-Disertación Invitada GTD-4.2: Héctor HEVIA

Pensamiento Estadístico: ¿qué aportan las Matrices de Koestler?



IV SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Artículos - Índice

Página 188

CA-DM-1: Yesica GALANTE - Vilma COLOMBANO

Transformaciones de los registros de representación semiótica de la función lineal: un estudio con estudiantes de tercer año de la escuela secundaria

Página 196

CA-DM-2: Carina DUNA

Estudio de los errores en la resolución de inecuaciones en alumnos ingresantes al Profesorado de Matemática

Página 204

GTD-1-FRP-1: Nicolás ROSBACO - Verónica PARRA – Patricia SUREDA

Análisis matemático y didáctico de un recurso: el problema de la zona despejada

Página 212

GTD-2-TEM-1: Giselle KARDJIAN

Las generaciones y el proceso de aprendizaje virtual

PANEL DE APERTURA **“INVESTIGACIÓN Y TENDENCIAS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA”**

Dr. Bruno D'AMORE
NRD-Universidad de Bologna, Italia
Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, Colombia

Las teorías que han determinado el nacimiento de la Educación Matemática y su desarrollo actual: para no olvidar

Para los estudiosos de educación matemática, es evidente que en los últimos años ha habido una proliferación correcta y necesaria de diferentes teorías, cada vez más modernas, cada vez más actualizadas, cada vez más profundas.

Pero, también es evidente que existe una tendencia a ... olvidar las teorías anteriores, como nunca ocurrió en otras teorías matemáticas. La educación matemática debe considerarse como una teoría matemática específica, una matemática aplicada al aprendizaje de la matemática; olvidar las teorías anteriores para dedicarse sólo a las últimas novedades exitosas es un error epistemológico y crítico, un comportamiento anticientífico que debe evitarse y condenar, como lo estoy haciendo aquí y ahora.

El riesgo que se corre es que algún nuevo investigador, también con título de doctor, crea que está redescubriendo algún aspecto ya explorado anteriormente como si fuera nuevo, lo que ya ha ocurrido.

He participado personalmente en la creación crítica de muchas teorías que han fundamentado la educación matemática y también de las más recientes y profundas, pero insto a todos (investigadores y profesores) a no olvidar las primeras, pues el pasado fue presente y sobre el mismo se construye.

En este espacio, recordaré algunas de ellas; pero, si alguna de las mencionadas se les escapa, es señal de que algo falla en la formación de los nuevos investigadores, evidencia una falta de estudio.

Dr. Vicenç FONT MOLL
Universidad de Barcelona, España

¿Cómo influye la investigación en las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas?

En este espacio se reflexionará sobre cómo los resultados ofrecidos por la investigación en Educación Matemática influyen en las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas; considerando:

1. El punto de vista que considera que los resultados de la investigación son las evidencias que determinan las tendencias actuales sobre la enseñanza y se problematizará este punto de vista (por ejemplo, cómo se explica que muchos resultados sean ignorados).
2. El punto de vista alternativo que considera que aquellos resultados científicos que generan consensos son los que se convierten en tendencias sobre lo que se debe hacer y, también, sobre cómo algunas de estas tendencias se incorporan a los currículos como obligaciones que tiene que cumplir el profesorado.

Dr. Salvador LLINARES
Universidad de Alicante, España

Tendencias en la Investigación en Formación de Profesores de Matemáticas

La investigación en formación de profesores de matemáticas ha experimentado una eclosión relevante durante las últimas décadas. Los focos de atención y referenciales teóricos han sido variados, lo que demuestra la complejidad del estudio del aprendizaje de la práctica de enseñar matemáticas, y de la propia práctica de enseñar matemáticas. Los investigadores se han centrado tanto en el aprendizaje del conocimiento que los profesores necesitan para desempeñar la práctica de enseñar matemáticas, como en los procesos de razonamiento que apoyan el desarrollo de competencias docentes. Estos focos han puesto de manifiesto la importancia de los contextos donde ocurre el aprendizaje que ha permitido caracterizar la relación contextualizada entre el conocimiento y la práctica. La complejidad del aprendizaje de la práctica de enseñar matemáticas viene siendo estudiada desde diferentes marcos teóricos que permiten describir y explicar este aprendizaje. Como consecuencia se generan prospectivamente para los próximos años líneas de investigación que puedan producir un aumento en nuestro conocimiento sobre el aprendizaje de los docentes.

Dr. Fredy E. GONZÁLEZ

Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil

Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina”, Venezuela

Efectos Postraumáticos de CoViD-19 en el Aprendizaje de la Matemática

La educación de los sentimientos y las emociones, recurrentemente han sido una tarea pendiente en el proceso de enseñanza; esta situación se ha visto profundizada por la necesidad de “recuperar” lo perdido en términos de contenido, por lo cual en el retorno a las aulas se ha enfatizado en lo cognitivo, descuidando aún más los aspectos del dominio afectivo. Aquí, se ofrecerá una visión general del asunto, dejando luz sobre formas de ser abordada.

Moderador-Presentador

Lic. Jorge E. SAGULA

Departamento Ciencias Básicas

Universidad Nacional de Luján, Argentina

PANEL DE CLAUSURA
**“INTERDISCIPLINARIEDAD EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y
TRANSDISCIPLINARIEDAD DESDE EDUCACIÓN MATEMÁTICA”**

Dr. Marcel POCHULU
Universidad Nacional de Villa María, Argentina
Universidad Tecnológica Nacional, FRVM, Argentina
Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

**Interdisciplinariedad y Transdisciplinariedad
en la Formación de Profesores de Matemática**

El objetivo es esbozar algunos lineamientos como base para pensar en un enfoque más interdisciplinario y transdisciplinario en la formación de profesores, donde se abordan problemas reales de diferentes ciencias, de modo que la modelación matemática adquiere real importancia. Para ello, es necesario iniciar un proceso de cuestionamiento del saber matemático y el saber matemático escolar, sintetizado en estas preguntas: ¿por qué debería enseñar este contenido para esta carrera?, ¿existen otras maneras de enseñarlo relacionándolo con otros contenidos transdisciplinarios? ¿qué problemas son más apropiados escoger? y evitar, así, la reproducción de modelos que seguramente estuvieron presentes en la formación matemática previa que cada uno tuvo como profesor. En este sentido, se muestran algunos ejemplos de un trabajo interdisciplinario y transdisciplinario llevado a cabo en la formación inicial y continua de profesores que nos aproxima a los problemas de otros campos profesionales, donde no se descuidan los contenidos de Matemática, que suelen ser una preocupación central de quienes enseñan esta disciplina.

Dr. Grover E. VILLANUEVA SÁNCHEZ
Universidad Nacional de Trujillo, Perú
Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

Educación Matemática para la Vida, conceptos de un hijo de una Maestra Sistémica

De mi niñez, la serie de TV más recordada fue: “Papá lo sabe todo”, pronto interpreté que, en mi caso, Mamá ocupaba ese lugar, pues ella era Maestra, y además de amarme, fue generando en mí la inquietud por traducir esos símbolos (letras y números), que estaban por doquier, y que yo no comprendía, y queriendo hacerlo, fue la razón por la cual fui al colegio, antes que el resto de los niños, y rápidamente, aprendí a leer, sumar, restar y multiplicar antes, como la tabla del 1 al 12 en doce días, y desde allí, a comprender el impacto de la Educación Matemática y su aplicación en la vida real.

Comprendí que la Matemática, nos hace la vida más fácil para asumir riesgos y ordenada para evitar el caos, pues no sólo se enfocaba en lo cognitivo sino que, como fui asumiendo con el paso del tiempo, advertí que ayuda a desarrollar cualidades, habilidades y destrezas importantes para interpretar problemas y plantear soluciones, con razonamiento y pensamiento lógico, crítico y creativo, y hasta comunicarse efectiva y adecuadamente, y así ayudándonos a asumir la vida, haciéndola más sencilla, y aportando a la sociedad, lo que demuestra la potencia del enfoque sistémico, y demostrando que mi Mamá fue mi primera maestra y la líder de mi experticia profesional.

Dr. Juan NÁPOLES VALDES
Universidad Nacional del Nordeste, Argentina
U.T.N.–Facultad Regional Resistencia, Argentina

Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

Derivadas Fraccionarias y Generalizadas, aquí y allá

Desde su aparición, prácticamente en forma simultánea con el Cálculo Clásico, los operadores fraccionarios han resuelto numerosos problemas prácticos y también, han abierto más de un debate. Por otro lado, las derivadas generalizadas son conocidas desde el siglo pasado, en la década del '60, aunque su formalización adecuada se logró en el año 2014. Comparando ambos operadores, se señalan ventajas y desventajas de unos y otros. Aquí, presentaré, lo que en mi opinión constituye el mejor resumen al respecto.

Dr. Marcelo F. MILRAD
Linnaeus University, Suecia

El rol de la Inteligencia Artificial vehiculizando la Educación Matemática transformadora

Las tecnologías digitales están cambiando la forma de “cómo” realizamos muchas de nuestras tareas cotidianas, entre ellas: compras on-line, clases virtuales, consultas electrónicas en el área de salud, etc. En gran parte de estas áreas, el auge de nuevas técnicas e implementaciones de la Inteligencia Artificial (IA) nos ofrece nuevos productos y servicios digitales. La IA en Educación (IAED) es un enfoque usado para el diseño y el soporte del aprendizaje en distintas situaciones independientes del tiempo, el espacio y el contexto basado en el uso de sobradas herramientas y técnicas propias de la IA. La situación actual del mundo, caracterizada por alto nivel de incertidumbre, nos hace repensar nuevas formas y modelos sobre la potencialidad de la IA en diferentes contextos educativos. Aquí, presentaré algunas de estas oportunidades y sus consecuentes desafíos asociados en el contexto educativo y el uso de la IA, enfatizando en la importancia del pensamiento matemático y computacional como herramientas fundamentales para poder enfrentar tales desafíos y fomentar así los procesos de transformación en la educación matemática.

Lic. Jorge E. SAGULA
Departamento Ciencias Básicas-Universidad Nacional de Luján, Argentina
Asesor Rector, Universidad Nacional de Luján, Argentina
Equipo COIN (Director), DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

¿Qué genera mayor expectativa?: Matemática Cuántica o Gastronomía Matemática en procura de contribuir con la Educación Matemática

¿Qué concepto del título de este Panel desentraña mayor complejidad y consecuentemente, mayor desafío: “Interdisciplinariedad en Educación Matemática” o “Transdisciplinariedad desde Educación Matemática”? Hay algo que resulta claro, este espacio cognitivo-temporal se enfoca a constituir disparadores desde múltiples miradas, pero con ideas nativas, surgentes y emergentes que perfectamente pueden aportar a numerosas interdisciplinas, y más en tiempos de tecnologías emergentes, los haces de la IA, el chat GPT y la Analítica para resolución de problemas de natural complejidad, pero siempre bajo la atenta y cuidada percepción que el nutriente de los algoritmos puede presentar “marcados sesgos” que no siempre son simples de detectar y menos aún, corregir. Sin embargo, el cerebro humano, munido de estrategias y creatividad potencia siempre, el más allá y en estas condiciones, tiene sentido el título de esta micro-disertación “¿Qué genera mayor expectativa?: Matemática Cuántica o Gastronomía Matemática en procura de contribuir con la Educación Matemática. La pregunta queda envuelta en un halo de misterio...

Así como la Inteligencia Artificial, ya a comienzos de la década del '60 en el siglo XX requirió de una base matemática apropiada, la Matemática Borrosa (Lofti ZADEH), entonces, la Computación Cuántica también necesita y necesitará una base matemática acorde...

La Gastronomía Matemática conjuga distintos conceptos de la Matemática, aplicados directa o indirectamente: formas, proporciones, distribución de colores, expresiones armónicas, requerimientos y restricciones, combinaciones, secuencias, recursos, asignación de recursos, pertenencia difusa, teoría de juegos, balances, puntos de equilibrio,, y más, rayanos a la creatividad.... La EDUCACIÓN MATEMÁTICA de parabienes ante la creatividad manifiesta y el impulso de sus docentes afines para mejorar la comprensión y el aprendizaje y propender a la mejor continua, situación esencial...

Moderadora-Presentadora

Lic. Emma L. FERRERO

Directora Decana-Departamento Ciencias Básicas

Universidad Nacional de Luján, Argentina

El paso más largo

Sobre la necesidad de no tirar por la borda (en el nombre de un modernismo vacío) las teorías de la educación matemática que explican, perfectamente, situaciones reales del aula

Bruno D'AMORE

**NRD, Departamento de Matemática, Universidad de Bologna, Italia
Mescud, Universidad Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia**

Resumen

Estamos viendo cómo, en algunos institutos de investigación, algunos investigadores están destruyendo las viejas teorías que, a pesar de ser perfectamente capaces de responder a preguntas de investigación, sólo son culpables de ser anticuadas. Pero no siempre las teorías más recientes han surgido en respuesta a las mismas preguntas de investigación de las precedentes, y por lo tanto ni las incorporan ni las sustituyen, sino que simplemente las complementan. Creemos que un modernismo sin verdaderos fines sea perjudicial para las competencias en educación matemática de las futuras generaciones de investigadores y de los usuarios (como, por ejemplo, maestros).

Palabras clave: teoría de las situaciones, teorías de didáctica de la matemática, test en aula.

Abstract

At some research institutes and among some researchers there is an attitude of scrapping of old theories that, despite being perfectly able to answer research questions, are only guilty of being dated. But the most recent theories do not always have emerged to respond to the same research questions of the previous ones, and therefore they do not incorporate and do not replace them, but simply supplement them. We believe that a modernism that is an end in itself harms the skills in mathematics education of future generations of researchers and users (such as, for example, teachers).

Key words: situation theory, theories of mathematics education, test in the school room.

Los hechos

En el año escolar 2008 - 2009, entre las pruebas nacionales italianas de matemática para los estudiantes del quinto grado de la escuela primaria, apareció la siguiente pregunta:

D9. María, Renata y Fabio miden a pasos la longitud de su aula. María cuenta 26 pasos, Renata cuenta 30 y Fabio 28. ¿Quién tiene el paso más largo?

- A. Renata.
- B. Fabio.
- C. María.
- D. No se puede saber

Los resultados nacionales en porcentaje fueron los siguientes:

sin respuesta: 0,2; A: 42,9; B: 2,2; C: 49,5; D: 5,1.

A primera vista, el resultado es excelente: el 49,5% de los estudiantes italianos responde correctamente.

Pero si se leen estos datos desde otro punto de vista, el 50,5% de los estudiantes italianos no da la respuesta correcta a un problema, que nada tiene que ver con las competencias o con los conocimientos matemáticos; para dar la respuesta correcta sólo se requería un poco de sentido común, la capacidad para leer un texto y de imaginar la situación.

Dejamos de lado el 0,2% que no responde, el 2,2% que responde completamente fuera de lugar y el 5,1% que, sin saber qué decir, se refugió en la aspillera clásica “No se puede saber”, y centramos toda la atención en las dos respuestas que tienen un cierto sentido:

- el sentido correcto, lo esperado (respuesta C): tiene el paso *más* largo quien hace *menos* pasos para medir el aula: 49,5% de las respuestas;
- el sentido incorrecto (respuesta A): tiene el paso *más* largo quien hizo *más* pasos para medir el aula: 42,9% de respuestas.

Pedimos comentarios sobre este resultado a profesores de matemática de diferentes niveles, a padres de familia que no son profesores, a colegas matemáticos que nada tienen que ver con la investigación en educación matemática; comentarios informales, por supuesto, sólo para ver qué tipo de percepción tienen ellos de este resultado. Fácil imaginar las respuestas. La “culpa” es de los estudiantes que “ya no saben leer” y que “no saben enfocarse”; o es de la escuela que “ya no enseña a razonar”; y luego de los profesores que “no saben enseñar” y que “esperan cada vez menos de sus alumnos”. Son comentarios tan obvios y evidentes que ni siquiera los tomaremos en examen.

Pedimos su opinión, en particular, a los profesores de nivel primario, los más interesados en el resultado; en este caso aparece una explicación del fenómeno que no apareció en precedencia, una queja generalizada sobre la forma en que las propuestas hechas por el Invalsi son “diferentes a aquellas a las que los alumnos están acostumbrados”; el D9 es uno de los problemas poco comunes, una especie de trampa endiabladamente puesta a los alumnos; citamos una frase entre todas: «Nosotros, a nuestros niños los acostumbramos a ciertas situaciones problemáticas, y en aquellas ellos de hecho son buenos y competentes; y luego vienen estas y ellos ya no las reconocen».

Por lo tanto, se encuentran “situaciones problemáticas construidas según un cierto acuerdo entre niños y maestros” y “situaciones problemáticas diferentes de aquellas, por lo tanto, inesperadas”.

Las pruebas y los resultados

Rehicimos la prueba, exactamente la misma, en Colombia, España, Chipre, Francia y estos fueron los resultados obtenidos.¹

El extremo “negativo” es el siguiente, efectuado en un total de 83 estudiantes:

Sin respuesta: 0 % - A: 89,2 % - B: 3,6 % - C: 6 % - D: 0 % - respuesta múltiple: 1,2 %.

Presentamos los textos propuestos a los estudiantes, en los diversos idiomas:²

Italiano:

D9. Maria, Renata e Fabio misurano a passi la lunghezza della loro aula. Maria conta 26 passi, Renata ne conta 30 e Fabio 28. Chi ha il passo più lungo?

- A. Renata.
- B. Fabio.
- C. Maria.
- D. Non si può sapere.

¹ Para estos datos, agradecemos a varios nuestros amables colegas, entre los cuales: Angélica Molano, Clara Rivera y Deissy Narváez.

² Agradecemos a los colegas de los diversos Países por la valiosa colaboración.

Francés:

D9. Marie, Renata et Fabio mesurent avec ses pas la longueur de leurs salle. Marie compte 26 pas, Renata compte 30 et Fabio 28. Qui a le pas le plus long?

- A. Renata.
- B. Fabio.
- C. Marie.
- D. On ne peut pas le savoir.

Inglés:

D9. Mary, Renata and Fabio measure with their steps the length of the classroom. Mary counts 26 steps, Renata counts 30 and Fabio 28. Who has the longest step?

- A. Renata.
- B. Fabio.
- C. Mary.
- D. You can't know.

¿Sorprende que el porcentaje de respuestas no correctas (es decir diversas de C) sea sustancialmente idéntico? No, no es sorprendente en absoluto, para nosotros.

Entrevistamos a algunos de estos niños, todos entre los 9 - 10 años de edad, para tratar de comprender las causas posibles *relacionadas con el texto*. Es fácil reconocer, de hecho, que el texto se ve estropeado por los llamados “datos implícitos” o “supuestos”; por ejemplo, no se dice que los alumnos pertenecen a la misma clase y que están midiendo el mismo salón de clases. La investigación evidenció claramente que muchos de los textos de los ejercicios o de problemas propuestos en las aulas se ven menoscabados por este defecto y que los niños se reinventan implícitamente el texto propuesto, reformulándolo de manera espontánea, ajustándolo así a sus necesidades; de hecho, la investigación demostró explícitamente la presencia de este fenómeno pidiendo a los niños que reformularan los textos de algunos problemas para hacerlos más comprensibles y fáciles de resolver para niños de otras clases. Véase, por ejemplo, D'Amore et al. (1995).

Sin embargo, las entrevistas informales revelan que quienes intentaban resolver el problema, infirieron sin duda alguna, en acuerdo con el anónimo autor del texto Invalsi, que los tres niños estaban midiendo su propio salón de clases (el mismo), aún más: que pertenecían a la misma clase, aún más (según muchos) que eran tres amigos.

Por lo tanto, el problema no es este. Hay algo más.

La teoría de las situaciones y el contrato didáctico

La teoría de las situaciones, creada por Guy Brousseau a mediados de los '60 y devenida, objeto compartido de estudio internacional desde los '80, explica perfectamente lo sucedido.

Existen acuerdos no expresados, no explícitos, que hacen que los maestros y los estudiantes construyan modalidades de interpretación de los test y de la resolución de los mismos. La teoría es tan conocida que nos parece ofensivo explicarla con más detalle.

Las indicaciones normativas típicas que el docente sugiere al estudiante “lee bien el texto”, “identifica los datos útiles”, “subraya la pregunta” etc., conducen al niño - solucionador, sin ninguna posibilidad de escapar, a inhabilitar su capacidad lógico - crítica basada en la experiencia, incluso una experiencia extra escolar (más largos son los pasos, menor es el número que expresa la medida de la habitación) y hacerse cargo de cláusulas implícitas: “más larga igual más pasos” (no importa de qué se está hablando), sin analizar la situación, sólo prendiendo acríticamente los datos numéricos. Es decir, se miran los números y la relación entre ellos, no el significado semántico de la pregunta y de la situación propuesta.

La famosa frase de un niño exasperado porque el investigador-profesor lo estaba obligando a razonar en vez de solucionar («¡Uf!, pero lo que tengo que hacer es resolver el problema, no tengo que razonar»), dice mucho sobre el comportamiento contractual que el alumno asume.

En nuestro problema hay datos, tres números: 26, 30, 28; y una pregunta que contiene la frase “más largo”. Desde hace 5 años, a los niños se les invitó a razonar sobre el hecho de que “más largo” está en sintonía con “mayor”, que se denota con >; ponemos en orden los tres números: 30>28>26. La respuesta sólo puede ser 30. Independiente de la condición descrita, o de la lógica invocada por el texto: hay que respetar los acuerdos tomados con el maestro.

Pero, de nuevo, estas cosas son tan conocidas que no consideramos necesario profundizar; creemos que todos nuestros lectores las conocen y que saben aplicarlas críticamente a la situación que estamos describiendo.

Lo que más llama la atención es el hecho de que los profesores sienten la prueba propuesta como un “truco dirigido a los niños”, dado que no cumple con los estándares, no lleva a la pregunta que, de acuerdo con muchos de ellos, está en la base de la actividad de resolución de los problemas: ¿cuál es la operación aritmética (racional) a efectuar?

Un gran número de docentes encuestados dicen explícitamente que ellos enseñan a los niños a reconocer si, en la resolución de un problema, se debe utilizar la suma o la resta o la multiplicación o la división. Y los libros de texto,

efectivamente, tratan de dar respuesta a esta elección didáctica, distinguiendo, desde primero de primaria, secciones de ejercicios con la siguiente modalidad: problemas de adicción, resta etc.; es más, a menudo aparecen también secciones tituladas: problemas imposibles, problemas con datos incompletos, problemas con datos redundantes (casi siempre faltan problemas con datos contradictorios que nunca les ha gustado a los maestros; alguien les incluye entre los problemas insolubles) (D'Amore, Sandri, 1993).

En estas situaciones, después de 5 años de condicionamiento y de enseñanza, ¿qué puede hacer un estudiante, si no comportarse de acuerdo con el contrato?

Dijimos anteriormente que este comportamiento y la reacción de los profesores puede ser calificada como sorprendente, pero no sorprende en absoluto. Todo, todo lo descrito, es parte de los estudios reveladores de Guy Brousseau y de sus seguidores, dentro de la teoría de situaciones. Son fenómenos científicamente bien explicados, en detalle, sin lugar a dudas, sin lagunas (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sarrazy, 2010).

Las teorías sucesivas

La teoría de las situaciones fue una de las primeras teorías en nacer; a todos nosotros, investigadores en educación matemática de una cierta edad, nos fascinó; era la primera vez que matemáticos hacían reflexiones de este tipo, ofreciendo explicaciones científicas sobre la falta de aprendizaje en matemática.

Pero después la educación matemática evolucionó, y muchas otras teorías surgieron, no hace falta enumerarlas aquí: veremos brevemente algunas dentro de poco. Muchas de ellas son evoluciones de la teoría de las situaciones, otras examinan problemas diferentes; algunas nacieron y murieron rápidamente, otras se desarrollan de manera inesperada.

Las teorías nacen y mueren, se pueden poner entre ellas en contraste o intentar conectarlas o incluso intentar hacerlas coincidir, agregándolas a teorías más amplias. Muchos son los estudios en esta dirección, nos limitamos solamente a mencionar: Prediger, Bikner-Ahsbahs, Arzarello (2008), Radford (2008a, b, 2011), Bikner-Ahsbahs Dreyfus, Kidron, Arzarello, Radford, Artigue, Sabena (2010).

Pero las (nuevas) teorías nacen con fines muy específicos, no sólo para absorber e incluir las teorías anteriores, sino para estudiar hechos que escapaban a las anteriores o para estudiar particularidades que a las anteriores no les interesaban (D'Amore, 2007).

Por lo tanto, teorías construidas con posterioridad a la teoría de las situaciones tuvieron efectos diferentes, tuvieron, tal vez, una buena aceptación en el panorama internacional de investigación, pero no podían reemplazar la teoría de las situaciones porque dichas teorías tenían otros propósitos.

Por ejemplo, la teoría APOS (que describe cómo las Acciones se interiorizan en los Procesos y luego son encapsuladas como Objetos mentales, que toman su lugar en Esquemas cognitivos más sofisticados) (Tall, 1999), creada por Ed Dubinski en los '80, tuvo un gran éxito internacional y también grandes críticas, pero, entre sus objetivos no está el de entender las relaciones entre Saber-maestro-alumno en el salón de clase, objetivo que si tiene la teoría de situaciones.

Otro ejemplo, el gran aparato teórico introducido por Raymond Duval alrededor de 1993 para mostrar cómo las actividades de enseñanza - aprendizaje de la matemática en el aula están estrechamente vinculadas con las tres acciones cognitivas de la semiótica: representar, tratar y convertir, llevó a nuestra disciplina a obtener excelentes resultados, pero nada tiene que ver con las descripciones que la teoría de las situaciones nos ha enseñado a observar y a reconocer (Duval, 1993, 1995).

Otro ejemplo, la teoría EOS (Enfoque Onto-Semiótico) tuvo, y tiene aún hoy, un gran éxito internacional desde que fue creada en el decenio de los '90 por uno de los grupos de investigación que trabajan en la Universidad de Granada, el grupo liderado por Juan Godino; esta teoría incorpora la llamada TAD (teoría antropológica de la didáctica) creada por Yves Chevallard en los primeros años 90, pero tiene y declara fines distintos a los de la teoría de situaciones (D'Amore, Godino, 2006, 2007; Font, Godino, D'Amore, 2007).

Otro ejemplo, la teoría semiótico cultural de Luís Radford tiene la capacidad de explicar modalidades de aprendizaje relacionadas con actividades semióticas por parte de los estudiantes, por ejemplo, en el aprendizaje de la generalización, que ninguna de las teorías anteriores tiene, pero no incluye el estudio general de las situaciones de aula, que le son ajenas. Sin lugar a dudas esta es una de las teorías que, más que ninguna otra, ha cambiado nuestra actitud frente al aprendizaje de la matemática y hacía la educación matemática; en pocos años se ha impuesto con tanta fuerza que nos deja asombrados, por lo que no es fácil reconstruir su historia (cosa que intentamos hacer, incluso pidiendo ayuda al mismo creador: Radford, 1998, 2000a, b, 2001, 2003, 2006a, b).

Y así sucesivamente, podríamos seguir citando teorías que siguieron a la teoría de las situaciones, con sus características innovadoras y funcionales, a veces sólo descriptivas, a veces operativas.

Ahora bien, la actitud que observamos en algunos centros de investigación y entre algunos investigadores y profesores de educación matemática de menospreciar las teorías de una cierta edad en favor de las nuevas es, para decirlo en palabras pobres, ridículo; uno de los artículos de Radford, presentado a una revista de educación matemática en 1998

sólo fue publicado en 2003 porque en ese momento la mayoría de las revistas de educación matemática rechazaban sin apelación los artículos que hablaban de semiótica; hay que decir que, incluso en 2005, uno de los autores de este artículo se encontró con cierta dificultad para publicar un trabajo suyo porque, según un árbitro, “se menciona demasiado Raymond Duval” (conservamos esa carta).³

Pero esto es lo que sucede siempre, a los anticipadores; Guy Brousseau comenzó a desarrollar su teoría, que después tuvo reconocimiento mundial, en los años ‘60 y para los años ‘70 era ya madura; pero tuvo que esperar hasta 1986, para ver publicado su más famoso artículo, quizás el artículo más citado en el mundo de nuestra disciplina (Brousseau, 1986). El hecho es que en los ‘60 y en los ‘70 las revistas de, por llamarlas de alguna forma, educación matemática de la época, rechazaban artículos tan “extraños y raros”, como se les juzgaban en ese entonces a los suyos; ¡tuvo que publicar sobre la *Revue de laryngologie, otologie, rinologie* (Brousseau, 1980)! En ese momento, los nombres que dictaban ley eran los de Zoltan Dienes, Georges y Frédérique Papy... que, en lugar de crear teorías, proponían sistemas de enseñanza a veces extravagantes basados en sus propias intuiciones. Los estudios de Brousseau dedicados a reprimir duramente estos enfoques de la enseñanza de la matemática son bien conocidos y tuvieron un éxito evidente: ¿quién recuerda hoy estos nombres? Sin una teoría científicamente basada en enfoques epistemológicos con sentido y bien fundamentados, estos episodios están destinados a perderse.

Pero las teorías sólidas, las que dan resultados, las que permiten entender la actitud de los estudiantes y profesores en situaciones de aula, no se pueden olvidar, al contrario hay que colocarlas a la base, al inicio de cualquier curso que pueda ayudar a quienes de estas teorías deben hacer un uso concreto en el aula, los profesores, y a los futuros investigadores (estamos hablando, respectivamente, de los cursos de formación para profesores en los cursos iniciales o en servicio, y de cursos de maestría o doctorado). De lo contrario, un día, alguien creerá haber descubierto las mismas cosas, sin saber que ya habían sido estudiadas y les dará un nuevo nombre, creyendo proponer un avance en el estudio de la educación matemática.

Lo cual sería bastante ridículo.

Sería como volver a idear fórmulas generales que, utilizando sólo las operaciones racionales y la extracción de raíz cuadrada, permiten encontrar las raíces de ecuaciones algebraicas generales de grado III con coeficientes racionales o enteros; con todo el respeto, este resultado es debido a Tartaglia y Cardán en el siglo XVI.

Pero no sólo existe la teoría de situaciones...

Siempre inspirándonos en la prueba Invalsi, de 2012, en 6º, se les propuso a los alumnos la siguiente pregunta:

¿Cuál de las siguientes operaciones da el resultado más grande?

- A. $10 \times 0,5$
- B. $10 \times 0,1$
- C. $10 : 0,5$
- D. $10 : 0,1$

Aquí presentamos el resultado, de una muestra de más de 20.000 estudiantes:

A: 71,2 %; B: 4,9 %; C: 10,0 %; D: 10,8 %; No contesta: 2,2 %.

¿Maravilla, sorpresa, angustia, ira por parte de los maestros? No, para nosotros; la respuesta A es obvia en la interpretación de los estudiantes. Si se hubiera pedido el resultado antes de la prueba, lo hubieran acertado en su totalidad.

En el libro D’Amore (1999), no por caso publicado en español y portugués, capítulos 4, 5 y 12, se explica exactamente lo que se esconde detrás de esta respuesta A tan generalizada, trayendo a colación tres tipos de investigaciones:

- (1) la teoría de las imágenes y modelos en la construcción del conocimiento matemático,
- (2) los estudios fascinantes y minuciosos de Efraín Fischbein (1920 - 1998),
- (3) algunas consideraciones de Gérard Vergnaud de los primeros años ‘80.

Todo se explica en dicho texto y en unas pocas páginas, por lo que no vale la pena entrar aquí en detalles.

Pero este tipo de consideraciones, que explican muy bien el comportamiento de los estudiantes, ya no están “de moda”, casi no se enseñan en los cursos de educación matemática, se dan por supuestos; nosotros pensamos que esta sea una actitud equivocada, contraproducente.

Si los maestros de las escuelas primarias y secundarias conocieran estas teorías, sabrían qué hacer para evitar la elección masiva de la respuesta A:

- (1) no permitir que los estudiantes se formen demasiado temprano el modelo (equivocado) de multiplicación, dejando la imagen que funciona en \mathbb{N}^2 , a la espera de ampliar el dominio numérico hasta \mathbb{Q} ,
- (2) abandonar los estereotipos típicos de los modelos intuitivos de multiplicación, proporcionando al contrario otros modelos intuitivos para un modelo formal único, y con todos los medios para evitar la aparición de modelos parásitos,

³ El artículo salió en el 2006, sin embargo.

(3) ampliar el conjunto de situaciones que dan sentido a las situaciones de multiplicación y división.

Y así hemos mencionado implícitamente las tres teorías básicas.

Pero si estas cosas no se les enseña a los maestros en formación o en servicio, vamos a seguir teniendo la respuesta A, vamos a seguir desgarrándonos las vestiduras como reacción furiosa, seguiremos dando la “culpa” a los estudiantes que nosotros formamos y que nosotros obligamos a responder A, creyendo (y aquí estalla la ironía) de hacer todo esto para su propio bien.

Referencias Bibliográficas

- Bikner-Ahsbahs, A., Dreyfus, T., Kidron, I., Arzarello, F., Radford, L., Artigue, M., & Sabena, C. (2010). Networking of Theories in Mathematics Education. En: Pinto, M. F. & Kawasaki, T. F. (Editores). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 145-175. Bello Horizonte, Brasil: PME.
- Brousseau G. (1980). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rinologie*. 101, 3-4, 107-131.
- Brousseau G. (1986). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7, 2, 33-115.
- D'Amore B. (1996). *Elementi di didattica della matematica*. Prefacio de Colette Laborde. Bologna: Pitagora. I premio nacional de pedagogía 2000: *Lo stilo d'oro*. [Versión en idioma español ampliada y actualizada: 2006, *Didáctica de la matemática*. Prefacios de Colette Laborde, Guy Brousseau y Luís Rico Romero. Bogotá: Magisterio]. [Versión en idioma portugués ampliada y actualizada: 2007, *Elementos de didáctica da matemática*. Prefacios de Colette Laborde, Guy Brousseau, Luís Rico Romero y Ubiratán D'Ambrosio. São Paulo: Livraria da Física].
- D'Amore B., Franchini D., Gabellini G., Mancini M., Masi F., Matteucci A., Pascucci N., Sandri P. (1995). La riformulazione dei testi dei problemi scolastici standard. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 18A, 2, 131-146. [Versión inglés en: Gagatsis A., Rogers L. (editores) (1996). *Didactics and History of Mathematics*. Erasmus ICP 954 G 2011/11. Tesalónica. 53-72].
- D'Amore B., Godino D.J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 9-38.
- D'Amore B., Godino D.J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de la Matemática. *Relime*. 10, 2. 191-218.
- D'Amore B. (2007). Voces para el diccionario: Frabboni F., Wallnöfer G., Belardi N., Wiater W. (Eds.) (2007). *Le parole della pedagogia. Teorie italiane e tedesche a confronto*. Turín: Bollati Boringhieri. Voces: Didattica disciplinare (pp. 72-75), Formazione in scienze naturali (pp. 140-142), Formazione in matematica (pp. 145-147), Scienza (pp. 335-337). [Existe una versión de este texto en idioma alemán].
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I., Marazzani I., Sarrazy B. (2010). *Didattica della matematica. Alcuni effetti del "contratto"*. Prefacio y postfacio de Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri.
- D'Amore B., Sandri P. (1993). Una classificazione dei problemi cosiddetti impossibili. *La matematica e la sua didattica*. 3, 344-346. [Este artículo fue reimpreso en: Gagatsis A. (editor) (1994). *Didactiché ton Mathematicon*. Erasmus ICP 93G 2011/II. Tesalónica. 247-252 (en griego), 579-584 (en francés). También en: *Cahiers de Didactique des Mathématiques*. 16-17, junio 1995, 11-28 (en griego), 103-110 (en francés)].
- Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.
- Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne, Peter Lang.
- Font V., Godino D.J., D'Amore B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematical education. *For the learning of mathematics*. 27, 2, 2-7 y 14.
- Prediger S., Bikner-Ahsbahs A., Arzarello F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education*. 40, 165-178.
- Radford L. (1998). On Signs and Representations. A Cultural Account. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. 35 (1), 277-302.
- Radford L. (2000a). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*. 42 (3), 237-268.
- Radford L. (2000b). Students' processes of symbolizing in algebra. A semiotic analysis of the production of signs in generalizing tasks. En: T. Nakahara & M. Koyama (editores) (2000). *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-24)*. Hiroshima Universidad, Japón. 4, 81-88
- Radford L. (2001). Factual, Contextual and Symbolic Generalizations in Algebra. In: Marja van den Huevel-Panhuizen (editor) (2001). *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Freudental Institute, Utrecht Universidad, The Netherlands. 4, 81-88.
- Radford L. (2003). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. En: Anderson M., Sáenz-Ludlow A., Zellweger S. & Cifarelli V. (editores) (2003).

- Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing* (49-79). Ottawa: Legas Publishing.
- Radford L. (2006a). Elements of a Cultural Theory of Objectification. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics*, Radford L. & D'Amore B. (editores), *Culture and Mathematical Thinking*. 103-129.
- Radford L. (2006b). Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics*, Radford L. & D'Amore B. (editores.), *Culture and Mathematical Thinking*. 7-21.
- Radford L. (2008a). Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. ICMI 11 Survey Team 7. *The notion and role of theory in mathematics education research*. Working paper.
- Radford L. (2008b). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education*. 40, 317–327.
- Radford L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas [The evolution of paradigms and perspectives in research. The case of mathematics education]. En: Vallès J., Álvarez D., Rickenmann R. (Editores) (2011). *L'activitat docente: intervenció, innovació, investigació* [Teacher's activity: Intervention, innovation, research] (pp. 33-49). Girona (España): Documenta Universitaria.
- Tall D. (1991). Reflections on APOS theory in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. En: Zaslavsky O. (Editor) (1991). *Proceedings of the 23rd Conference of PME, Julio 1999*. Haifa, Israel. 1, 111–118.

Los Criterios de idoneidad Didáctica una herramienta para orientar la reflexión de profesor sobre su práctica

Vicenç Font⁽¹⁾, Adriana Breda⁽¹⁾, Luisa Morales-Maure⁽²⁾

Universitat de Barcelona⁽¹⁾, Universidad de Panamá⁽²⁾

Resumen

En este documento, primero, se explica brevemente el constructo teórico Criterios de Idoneidad Didáctica, después se explica la estructura de los ciclos formativos implementados en programas de formación del profesorado para el aprendizaje y uso de esta herramienta para organizar la reflexión del profesorado sobre su práctica. Por último, el documento termina con unas consideraciones sobre la evolución de este constructo.

INTRODUCCIÓN

En Educación Matemática existen varios modelos teóricos que caracterizan los conocimientos y competencias que debería tener un profesor de matemáticas para realizar su tarea docente (entre otros, Blömeke, 2017; Carrillo-Yañez et al., 2018; Godino et al., 2017; Hill et al., 2008). En estos modelos, la reflexión sobre la práctica, entendida como la capacidad del docente para describir e identificar, explicar y valorar factores claves que afectan a los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como tomar decisiones basadas en tales reflexiones, suele considerarse esencial para el desarrollo profesional y la mejora de la enseñanza

Desarrollar la reflexión del profesorado requiere adoptar marcos conceptuales y metodológicos que permitan afrontar este objetivo como son, por ejemplo, el Lesson Study (Hart et al., 2011), Concept Study (Davis, 2008), Professional Noticing (Mason, 2002) o la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica propuesta desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino et al., 2017). En el marco del EOS, la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica se desarrolla mediante el aprendizaje y el uso de la herramienta Criterios de Idoneidad Didáctica, la cual se enseña en los programas de formación del profesorado.

En diferentes investigaciones (Font et al., 2021) sobre los conocimientos y competencias del profesorado de matemáticas se ha comprobado el siguiente fenómeno (*):

- El profesorado de matemáticas utiliza ciertos criterios sobre cómo deben implementarse las clases para que éstas sean de calidad, cada vez mejores, etc. (criterios que orientan la práctica)
- Estos criterios son similares, incluso cuando los profesores son de distintos países, culturas, religiones, nivel educativo, etc. (gozan de un cierto consenso en una parte importante de la comunidad de educación matemática).
- Estos criterios están relacionados con las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas (por tanto, tienen relación con los resultados y constructos teóricos generados en el área de la Didáctica de las Matemáticas).

Se trata de tendencias sobre las que hay amplio consenso en el área de la Educación Matemática. Entre otras, tendencia a la presentación de matemáticas contextualizadas; tendencia de tipo metodológico hacia una enseñanza-aprendizaje activa (constructivista); tendencia a la incorporación de las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs); tendencia a dar importancia a la enseñanza de los procesos matemáticos; tendencia a considerar que Saber Matemáticas implica ser competente en su aplicación a contextos extramatemáticos; tendencia a aceptar el principio de Equidad en la Educación Matemática Obligatoria, etc.

Desde la Educación Matemática, diferentes autores han realizados intentos para recopilar criterios para orientar la práctica del profesor para que ésta sea de calidad, óptima, etc. (Hill et al., 2008; Charalambous y Praetorius, 2018; Praetorius y Charalambous, 2018; Prediger et al., 2022). Se trata de una recopilación de criterios que gozan de un amplio consenso en el área de la Educación Matemática. Uno de los enfoques teóricos que ha trabajado en esta línea es el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemáticos (EOS), descrito en Godino, Batanero y Font (2007 y 2019), desarrollando la noción de idoneidad didáctica.

CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA

En el sistema teórico que configura el EOS se ha incluido la noción de idoneidad didáctica como criterio sistémico de optimización de un proceso de instrucción matemática. Se define como el grado en que dicho proceso (o una parte de este) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno).

Se trata de un constructo multidimensional que se descompone en seis criterios parciales de idoneidad didáctica (CID) (Breda, 2020; Breda, Pino-Fan y Font, 2017): 1) criterio de idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas “buenas matemáticas”; 2) criterio de idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar; 3) criterio de idoneidad interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos; 4) criterio de idoneidad de medios, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción; 5)

criterio de idoneidad emocional, para valorar la implicación (intereses y motivaciones) de los alumnos durante el proceso de instrucción; y, 6) criterio de idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, entre otros.

Los CID para ser operativos se concretan en componentes e indicadores observables que permitan evaluar el grado de idoneidad de cada dimensión del proceso de enseñanza y aprendizaje. Se trata de generar una rúbrica (con criterios, componentes e indicadores) para ayudar a los profesores en la valoración de su práctica y guiar su rediseño, pero que es muy diferente a las guías docentes cuyo propósito es ayudar a los maestros a dar forma a la instrucción y guiar su acción y toma de decisiones (Remillard, 2018), en particular es muy diferente a las guías docentes para el profesor que acompañan a los libros de texto.

Por ejemplo, para la emergencia del componente “Muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar”, primero se remarca que actualmente hay una tendencia a considerar que saber matemáticas incluye la competencia para aplicarlas a situaciones de la vida real, y que dicha tendencia, en algunos países, se ha concretado en el diseño de currículums basados en competencias. Se hace hincapié en que la idea de competencia en el fondo pone de relieve que las matemáticas que se enseñan han de ser útiles para resolver problemas en diferentes contextos. Dado que cada problema exige poner en funcionamiento un tipo de significado parcial del objeto matemático diferente, la otra cara de la moneda de la competencia en el uso de este objeto matemático es la enseñanza de sus diferentes significados. Se trata de pasar de un punto de vista ingenuo y optimista, que presupone que el alumno fácilmente realizará la transferencia del conocimiento matemático generado en un solo contexto a otros contextos nuevos y diferentes, a otro punto de vista más prudente en el que, si bien se considera que la posibilidad de transferencia creativa se puede dar, se asume que, sin un trabajo sobre una muestra representativa de la complejidad del objeto matemático que se quiere enseñar y la articulación y conexión de los componentes de dicha complejidad, es difícil que se pueda aplicar el objeto matemático a diferentes contextos (Calle et al.; 2021; Calle et al., 2022; Calle et al., 2023; Font et al., 2017b).

De esta manera, cada CID se va desglosando en componentes (tabla 1) e indicadores (ver Breda et al., 2017), lo cual hace posible que este constructo sea aplicable para valorar la idoneidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Sánchez, Font y Breda, 2022; Godino, 2013).

Tabla 1. Componentes de los Criterios de Idoneidad Didáctica (Breda et al., 2017)

Criterio	Componentes
Epistémico	Errores; ambigüedades; riqueza de procesos; representatividad de la complejidad del objeto matemático.
Cognitivo	Conocimientos previos; Adaptación curricular a las diferencias individuales; Aprendizaje; atal demanda cognitiva.
Interaccional	Interacción docente - estudiante; Interacción de estudiantes; Autonomía; Evaluación formativa.
Mediacional	Recursos materiales; N.º de estudiantes, distribución y condiciones de aula; tiempo.
Afectivo	Intereses y necesidades; Actitudes; Emociones.
Ecológico	Adaptación del currículo; Conexiones intra e interdisciplinares; Utilidad sociolaboral; Innovación didáctica.

En diferentes investigaciones (por ejemplo, Breda, 2020) el fenómeno (*), comentado en la introducción se ha refinado de la siguiente manera (fenómeno **):

- El profesorado de matemáticas utiliza ciertos criterios sobre cómo deben implementarse las clases para que éstas sean de calidad, cada vez mejores, etc. (*criterios que orientan la práctica*)
- Estos criterios son similares, incluso cuando los profesores son de distintos países, culturas, religiones, nivel educativo, etc. (*gozan de un cierto consenso en una parte importante de la comunidad matemática*).
- Estos criterios están relacionados con las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas (*por tanto, tienen relación con los resultados y constructos teóricos generados en el área de la Educación Matemática*).

- Estos criterios se pueden reinterpretar en términos de los CID (criterios, componentes e indicadores).

El motivo por el cual los criterios de idoneidad didáctica se infieren en el discurso de los profesores, cuando estos tienen que justificar que sus propuestas representaban una mejora, sin haberseles enseñado el uso de esta herramienta para guiar su reflexión, se puede explicar por los orígenes del constructo ya que estos criterios, sus componentes e indicadores se han seleccionado a partir de la condición de que debían de contar con un cierto consenso en el área de la educación Matemática, aunque fuese local. Por tanto, una explicación plausible de que los criterios que se puedan inferir en el discurso del profesor se puedan reinterpretar en términos de los CID es que reflejan consensos sobre cómo debe ser una buena enseñanza de las matemáticas ampliamente asumidos en la comunidad de educadores matemáticos; y es plausible pensar que el uso implícito que hace el profesor de ellos se debe a su formación y experiencia previa, la cual le hace partícipe de dichos consensos. Ahora bien, otra explicación también plausible es que el profesor que utiliza estos criterios, al no haber participado en el proceso de generación de los consensos que los soportan, los asuma simplemente porque se le presentan como algo naturalizado e incuestionable.

Tanto los componentes como los indicadores de los CID se han confeccionado teniendo en cuenta las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas, los principios del NCTM (2000) y los resultados de la investigación en el área de la Educación Matemática que cuentan con un amplio consenso en la comunidad; por ejemplo, para la idoneidad epistémica se ha tenido en cuenta el siguiente resultado de la investigación en Educación Matemática: los objetos matemáticos emergen de las prácticas, lo cual conlleva su complejidad. De este resultado se deriva un componente (representatividad de la complejidad de la noción que se va a enseñar) cuyo objetivo es que se tenga en cuenta la complejidad matemática del objeto a enseñar como una orientación que los profesores deben seguir en el diseño y rediseño de las secuencias didácticas.

Los criterios de idoneidad se consideran como normas que son principios, en lugar de normas que son reglas. Es decir, los criterios de idoneidad si bien son normas, no son reglas que operan de la manera todo o nada (se aplican o no se aplican, se siguen o no se siguen). En el caso de un conflicto entre dos reglas, la colisión se suele resolver de diferentes maneras: mediante una nueva regla que da preferencia a la regla dictada por la autoridad más superior, a la regla dictada más recientemente o alguna otra. En contraste, los principios tienen un aspecto de peso o importancia que las reglas no tienen, de modo que los conflictos entre principios se resuelven por *peso*. Dicho de otra manera, los criterios de idoneidad, en tanto que principios, no son binarios, son graduales. Por tanto, el mayor peso dado a algunos principios en función del contexto inclina las decisiones en una dirección; ahora bien, los principios con menor peso sobreviven intactos aun cuando no prevailezcan, lo cual permite darles más peso en un rediseño del proceso de enseñanza y aprendizaje de cara a una implementación futura más equilibrada. Es decir, la aplicación, priorización, relegación etc., de dichos criterios depende del contexto institucional en el que se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje, y del criterio pedagógico y didáctico del profesor que los debe tener en cuenta. De esta manera, la idoneidad se puede entender como la calidad relativizada y condicionada por el contexto y el juicio del profesor.

El hecho de que suceda el fenómeno (**) es la base para el diseño de los ciclos formativos que pretenden enseñar el uso de los CID. Estos ciclos se basan en la suposición de que los CID funcionan como regularidades en el discurso de los profesores, cuando tienen que diseñar o bien valorar secuencias didácticas orientadas a la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, incluso sin haberse enseñado a los futuros profesores el uso de esta herramienta para guiar su reflexión. Por tanto, se supone que, en las fases iniciales de estos dispositivos formativos, los participantes formulan y usan de manera implícita algunos indicadores y componentes de los CI. En la sección siguientes se explican brevemente algunos de estos ciclos:

CICLOS FORMATIVOS PARA LA ENSEÑANZA Y EL USO DE LOS CID

Hemos encontrado el uso de los CI en diferentes investigaciones en las que 1) no hay una intención de enseñar esta noción a los profesores para organizar la reflexión sobre su práctica, sólo se usa como herramienta analítica para categorizar los datos de la investigación (Moreira, Gusmao y Font, 2018; Morales y Font, 2019; Breda, 2020); y 2) como contenido a explicar para organizar la reflexión del profesor sobre su propia práctica, con el objetivo de desarrollar la competencia de valoración de la idoneidad didáctica, en diferentes grados y postgrados. Por ejemplo, en Beltrán y Giacomone (2018) se describe el diseño, implementación y evaluación de una intervención formativa en un curso virtual de posgrado de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada orientado al desarrollo profesional de investigadores y profesores. El objetivo del diseño era iniciar a los participantes en el desarrollo de la

competencia de reflexión sobre la práctica docente, aplicando la noción de idoneidad didáctica como herramienta teórica y metodológica.

En este trabajo comentaremos brevemente algunos de estos ciclos formativos: un grado de futuros profesores de primaria en Chile; un máster de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en España; un máster de formación de profesores de secundaria en servicio en Ecuador; un máster de profesores en servicio en Brasil y un diplomado para maestros de primaria en servicio en Panamá.

En el Máster de Formación del Profesorado de Secundaria de Ecuador (especialidad de Matemáticas) impartido conjuntamente por la Universidad de Barcelona (2015-2016) y la Universidad Nacional de Educación de Ecuador (edición 2017-2018), el uso de los criterios de idoneidad didáctica ha tenido un papel relevante, ya que son un contenido a enseñar con el objetivo de que sean usados como pauta para organizar la propia práctica. El ciclo formativo implementado es una adaptación de otro ciclo formativo implementado por primera vez, como se documenta en Rubio (2012), con profesores en formación del Máster de Formación de Profesores de Secundaria de Matemáticas de la Universitat de Barcelona y después rediseñado para la formación de futuros profesores de primaria de Chile, tal como se explica en Seckel (2016). Dicho ciclo se distribuye en dos asignaturas: Innovación e investigación sobre la propia práctica y Trabajo Fin de Máster (TFM), de acuerdo con la siguiente secuencia:

- a) Análisis de casos (sin teoría). Se propone a los alumnos la lectura y análisis de episodios de clase para que hagan un análisis a partir de sus conocimientos previos.
- b) Emergencia de los tipos de análisis didácticos propuestos por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS). La puesta en común de los análisis realizada por los diferentes grupos permite observar como el gran grupo contempla los diferentes tipos de análisis didácticos propuestos por el EOS, aunque cada grupo sólo contemple alguno de ellos.
- c) Tendencias en la enseñanza de las matemáticas. El episodio analizado se ha seleccionado de manera que los asistentes apliquen de manera implícita alguna de las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas. Seguidamente se hace observar a los asistentes que han utilizado esta tendencia de manera implícita. A continuación, el profesor hace un resumen de las principales tendencias en la enseñanza de las matemáticas.
- d) Teoría (criterios de idoneidad). Se explican elementos teóricos a los alumnos, en concreto se les explican los CID propuestos en el EOS (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica).
- e) Lectura y comentario de partes de algunos TFM de cursos anteriores, en los que los futuros profesores de cursos anteriores utilizaron los CID para valorar la unidad didáctica que implementaron.

En las asignaturas de Prácticas y Trabajo Final de Máster los alumnos utilizarán los CID para valorar su propia práctica, en concreto la secuencia de tareas que han diseñado e implementado. Tienen que hacer un rediseño y mejorar algunos de los aspectos que la valoración realizada indica que se deben y pueden mejorar.

En el caso del Diplomado para maestros de Panamá (Morales-Maure, 2019 y Morales-Maure et al., 2019), se trata de un curso de cuatro meses donde en el último módulo se concentran las etapas (d) y (e) del módulo anterior y, a diferencia de lo que se hace en el máster de secundaria, no se explican con detalle los componentes e indicadores de los CID. Tal como se explica en Morales-Maure (2019), lo que se hace es lo siguiente: 1) en los módulos anteriores se trabajan algunos indicadores y componentes de manera aislada; 2) en el módulo final se pone a los futuros profesores una narrativa de una maestra sobre la observación que ella hizo de la clase de otra maestra y se les pide, entre otras preguntas, que propongan una mejora de la implementación de la tarea observada; 3) se explica que esta consigna pide mejorar las tareas y se les plantea la pregunta ¿qué criterios se deben tener en cuenta para mejorar una secuencia de tareas?; 4) se presenta un video donde se reflexiona sobre esta pregunta y se introducen por primera vez los CID, haciéndoles observar que algunos de ellos han sido tenidos en cuenta cuando han sugerido cómo mejorar la tarea; 5) se explica que la noción de idoneidad didáctica está compuesta por seis criterios de idoneidad didáctica parciales (facetas), cada uno, a su vez, desglosado en componentes e indicadores, cuya función es señalar aspectos a mejorar en la práctica del profesor y se les explica también que algunos de estos componentes e indicadores ya han aparecido en los módulos anteriores; 6) se presenta la lista completa de criterios, componentes e indicadores y algunos de ellos se relacionan con reflexiones realizadas en los módulos anteriores. Por último, los futuros profesores tienen que diseñar una secuencia de tareas, implementarlas y valorarlas usando los CID (etapas d y e del ciclo formativo del máster de secundaria).

Uso combinado del Lesson Study y los Criterios de Idoneidad Didáctica para desarrollar la reflexión del profesor

El diseño de los ciclos formativos que pretenden enseñar el uso de los CID se basa en la suposición de que los CID funcionan como regularidades en el discurso de los profesores, cuando estos tienen que diseñar y/o valorar secuencias didácticas orientadas a la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, incluso sin haberse enseñado a los futuros profesores el uso de esta herramienta para guiar su reflexión. Por tanto, se supone que, en las fases iniciales de estos ciclos formativos, los participantes formulan y usan de manera implícita algunos indicadores y componentes de los CID. Esta suposición ha funcionado como una regularidad en las diversas experiencias realizadas para enseñar los CID, pero en ellas se ha hecho evidente que esta fase inicial de reflexión no pautada es relativamente corta y que sería conveniente que fuese más amplia. Por otra parte, la metodología de los Lesson Study (LS), en cierta manera, se puede considerar como una fase de reflexión poco pautada y muy amplia que está orientada a la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por tanto, es de esperar que, en la fase de planificación, en la de observación, en la de reflexión y en la de rediseño orientada a la mejora, los participantes usen de manera implícita muchos de los indicadores y componentes de los CID para hacer valoraciones positivas de algunos aspectos de la experiencia realizada. Por tanto, en una experiencia de LS van a surgir consensos implícitos entre los participantes sobre aspectos que se valoran positivamente, los cuales se pueden reinterpretar en términos de indicadores y componentes de los CID, tal como se evidencia en Hummes et al. (2019) y en Hummes et al. (2020).

Dicho de otra manera, la metodología LS se puede convertir en un tipo de dispositivo de formación que favorece que algunos de los indicadores y componentes de los CID surjan como consensos de la reflexión del grupo de profesores, lo cual da pie a la ampliación del LS con un ciclo formativo que introduzca los indicadores, componentes y Criterios de Idoneidad Didáctica (tal como se hace en las experiencias de formación comentadas anteriormente).

Los dispositivos formativos que pretenden enseñar los CID también parten de la suposición de que éstos pueden ser enseñados como herramienta para organizar la reflexión del profesor y, por tanto, la mayor parte del ciclo formativo se dedica a implementar un proceso de enseñanza y aprendizaje de estas nociones con los participantes. En cambio, en los LS no se realiza este proceso de generación de una pauta organizada en criterios, componentes e indicadores como herramienta para organizar la reflexión. Por tanto, si la metodología LS puede ser muy útil para mejorar la fase inicial de la metodología de enseñanza de los CID, esta última puede ser una ampliación de la metodología LS para generar una pauta para organizar la reflexión del profesor.

En Hummes et al. (2019 y 2022) se analiza en qué medida un ciclo formativo basado en el LS y los CID promueve la reflexión de profesores brasileños de matemáticas en ejercicio sobre el diseño, implementación, evaluación y rediseño de secuencias de tareas. En particular, se buscaba desarrollar la competencia de valoración de la idoneidad didáctica. Para ello, se diseñó e implementó un ciclo formativo que combinaba ambas metodologías. La estructura del ciclo formativo que permite combinar el LS con los CID es la siguiente: 1) Primera etapa: Lesson Study; 2) Segunda etapa: Hacer observar a los participantes que en la fase del LS han usado de manera explícita o implícita algunos de los componentes e indicadores de los CID; 3) Tercera etapa: Enseñanza de los CID y 4) Cuarta etapa: Uso de los CID como herramienta metodológica que permite organizar y mejorar la reflexión realizada en la fase del LS, lo cual repercute en mejores propuestas de rediseño de la secuencia de tareas confeccionada en el LS.

CONSIDERACIÓN FINAL

La herramienta CID ha evolucionado por diferentes fases hasta convertirse en una herramienta muy potente para analizar y desarrollar la reflexión del profesorado sobre su propia práctica, cuando esta se orienta a la mejora del proceso de instrucción. En una primera fase aparece como una propuesta teórica en el marco del EOS (Gdino et al, 2007; Breda et al., 2018), en una segunda fase, en varias investigaciones se usan de los CID como categorías a priori para inferir criterios que orientan la práctica del profesor. En una tercera fase se diseñan e implementan ciclos formativos en la formación inicial y continua del profesorado de matemáticas para el aprendizaje y uso de los CID como herramienta para guiar la reflexión del profesorado en el diseño y en el rediseño de secuencias didácticas (Esqué y Breda, 2021; Font et al., 2017a; Ledezma et al, 2021); este uso ha conllevado una simplificación de los indicadores y componentes de los CID para su adaptación a procesos de formación, esta propuesta simplificada es la que se ha explicado en la segunda sección de este documento. En una cuarta etapa, diferentes investigadores se sitúan como observadores externos e intentan evaluar/medir la idoneidad de

un proceso de instrucción (entendido en sentido amplio, es decir incluye los libros de texto como procesos de instrucción hipotéticos) que no ha sido impartido por ellos (por ejemplo, García-Marimón et al. 2021). En una quinta etapa interesa analizar el papel que juegan los CID en la argumentación práctica del profesor para justificar realizar una acción (o no) (Ledesma et al., 2022).

AGRADECIMIENTOS

Trabajo realizado en el marco del proyecto PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por "FEDER Una manera de hacer Europa".

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Beltrán-Pellicer, P. & Giacomone, B. (2018). Desarrollando la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica en un curso de postgrado mediante la discusión de una experiencia de enseñanza. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, 7 (2), 111- 133. <http://hipatiapress.com/hpjournals/index.php/redimat/article/view/2516/pdf>
- Blömeke, S. (2017). Modelling teachers' professional competence as a multi-dimensional construct, in Guerrero, S. (ed.), *Pedagogical Knowledge and the Changing Nature of the Teaching Profession*, OECD Publishing, Paris, <https://doi.org/10.1787/9789264270695-7-en>.
- Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema*, 34(66), 69-88. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04>
- Breda, A., Font, V., y Pino-Fan, L. R., (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica, *Bolema*, 32(60), 255-278. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- Breda, A., Pino-Fan, L. R., y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(6), 1893-1918. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a>
- Calle, E. C., Breda, A., y Font, V. (2021). Reflection on the complexity of mathematical items in initial teacher education. *Journal of Higher Education Theory and Practice*, 21, 197-214. <https://doi.org/10.33423/jhetp.v21i13.4801>
- Calle, E., Breda, A., y Font, V. (2022). La complejidad de la noción a enseñar en la valoración de la práctica preprofesional de futuros profesores de matemáticas ecuatorianos. *Journal of Research in Mathematics Education*, 11(3), 218-249. <https://doi.org/10.17583/redimat.10986>
- Calle, E., Breda, A. y Font, V. (2023). Significados parciales del teorema de Pitágoras usados por profesores en la creación de tareas en el marco de un programa de formación continua, *Uniciencia*, 37(1), 1-23. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.1>
- Charalambous, C. Y., y Praetorius, A. K. (2018). Studying instructional quality in mathematics through different lenses: In search of common ground. *ZDM Mathematics Education*, 50(3), 355-366.
- Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Davis, B. (2008). Is 1 a prime number? Developing teacher knowledge through concept study. *Mathematics Teaching in the Middle School (NCTM)*, 14(2), 86-91
- Esqué, D. y Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad utilizando la herramienta idoneidad didáctica. *Uniciencia*, 35(1), 38-54. <https://doi.org/10.15359/ru.35-1.3>
- Font, V., Breda, A., Diez-Palomar, J. y Seckel, M. J. (2021). Un currículum por competencias en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En M. A. Campos Hernández. (Ed.). *Representaciones, conocimientos y prácticas curriculares en Educación Matemática* (237-271). Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).
- Font, V., Breda, A. y Pino-Fan, L. (2017). Análisis didáctico en un trabajo de fin de máster de un futuro profesor. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 247-256). Zaragoza: SEIEM.
- Font, V., Breda, A., y Seckel, M. J. (2017). Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando estos se aplican a distintos contextos. *Revista brasileira de ensino de ciência e tecnologia*, 10(2), 1-23. <https://doi.org/10.3895/rbect.v10n2.5981>
- García-Marimón, O., Morales-Maure, L., Diez-Palomar, J. y Durán-González, R. E. (2021). Evaluación de secuencias de aprendizaje de matemáticas usando la herramienta de los Criterios de Idoneidad Didáctica. *Bolema* 35(70), 1047-1072. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a23>

- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 11, 111-132.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics, *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 38-43.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education, *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127-135.
- Godino, J. D.; Giacomone, B.; Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90-113.
- Hart, L. C., Alston, A. S. y Murata, A. (Eds). (2011). *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education: Learning Together*. Dordrecht, Países Bajos: Springer.
- Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430-511.
- Hummes, V., Breda, A. y Font, V. (2022). Critérios de adequação didática implícitos na reflexão de professores quando planejam, implementam e redesenham uma aula em uma experiência de Lesson Study. En A. Richit, J. P. da Ponte, E. S. Gómez (Eds), *Lesson Study na formação inicial e continuada de professores* (53-88), Livraria da Física, São Paulo, Brasil
- Hummes, V. B., Breda, A. y Seckel, M. J. (2019). Idoneidad didáctica en la reflexión de profesores: análisis de una experiencia de estudio de clases. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 381-390). Valladolid: SEIEM.
- Hummes, V. B., Breda, A., Seckel, M. J. y Font, V. (2020). Criterios de Idoneidad Didáctica en una clase basada en el Lesson Study. *Praxis & Saber: Maestría en Educación*, 11(26), e10667. <https://dx.doi.org/10.19053/22160159.v11.n26.2020.10667>
- Ledezma, C., Sala, G., Breda, A. y Sánchez, A. (2021). Analysis of a preservice teacher's reflection on the role of mathematical modelling in his master's thesis. En M. Inprasitha, N. Changsri y N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 195-204). PME.
- Ledezma, C., Sol, T., Sala-Sebastià, G., y Font, V. (2022). Knowledge and Beliefs on Mathematical Modelling Inferred in the Argumentation of a Prospective Teacher When Reflecting on the Incorporation of This Process in His Lessons. *Mathematics*, 10(18), 3339. <https://doi.org/10.3390/math10183339>
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.
- Morales-López, Y. y Font, V. (2019). Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. *Educação e Pesquisa*, 45, 1-20. <http://www.scielo.br/pdf/ep/v45/1517-9702-ep-45-e189468.pdf>
- Morales-Maure, L. (2019). *Competencia de Análisis e Intervención Didáctica del Docente de Primaria en Panamá* (Tesis doctoral no publicada). Universitat de Barcelona, España.
- Morales-Maure, L., Durán-González, R., Pérez-Maya, C., y Bustamante, M. (2019). Hallazgos en la formación de profesores para la enseñanza de la matemática desde la idoneidad didáctica. Experiencia en cinco regiones educativas de Panamá. *Inclusiones*, 6(2), 142-162.
- Moreira, C. B., Gusmão, T. C. R. S., y Font, V. (2018). Tarefas Matemáticas para o Desenvolvimento da Percepção de Espaço na Educação Infantil: potencialidades e limites. *Bolema*, 32(60), 231-254.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM
- Praetorius, A. K. y Charalambous, C.Y. (2018). Classroom observation frameworks for studying instructional quality: looking back and looking forward. *ZDM Mathematics Education*, 50, 535-553. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0946-0>
- Prediger, S., Götze, D., Holzäpfel, L., Rösken-Winter, B., y Selter, C. (2022) Five principles for high-quality mathematics teaching: Combining normative, epistemological, empirical, and pragmatic perspectives for specifying the content of professional development. *Frontiers in Education*, 7, 969212. <https://doi.org/10.3389/feduc.2022.969212>
- Remillard, J. T. (2018). Examining teachers' interactions with curriculum resource to uncover pedagogical design capacity. En L. Fan, L. Trouche, C. Qi, S. Rezat, y J. Visnovska (Eds.), *Research on mathematics textbooks and teachers' resources* (pp. 69-88). Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73253-4_4
- Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemático*. (Tesis doctoral no publicada). Universitat de Barcelona, España.
- Sánchez, A., Font, V. y Breda, A. (2022). Significance of creativity and its development in mathematics classes for preservice teachers creativity. *Mathematics Education Research Journal*, 34, 863-885, <https://doi.org/10.1007/s13394-021-00367-w>

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática* (Tesis doctoral no publicada). Universitat de Barcelona, España.

Reflexiones sobre el Proceso de Enseñanza de la Geometría en la perspectiva de Raymond Duval

Ismenia GUZMÁN

Departamento Ciencias Exactas
Universidad de Los Lagos, Chile
ismenia.guzman@ulagos.cl

Los estudios de Raymond Duval de 2005 señalan que la geometría como dominio de conocimiento resulta muy complejo de aprender para alumnos de cualquier nivel escolar, debido a que la actividad cognitiva que exige la Geometría es más completa que la exigida por las otras asignaturas de nivel escolar ya que, ella solicita el gesto, el lenguaje y la mirada todo al mismo tiempo. En geometría hay que ver y reconocer elementos para construir y razonar. También resulta un dominio difícil de enseñar, como lo muestran las evaluaciones nacionales e internacionales, aun cuando los objetivos que se propongan sean sencillos, los resultados obtenidos por los alumnos son deprimentes, diferentes investigaciones en Didáctica de la Matemática se han referido a esta problemática.

Tradicionalmente la enseñanza de la geometría ha considerado dos enfoques, uno muy frecuente que va desde las propiedades a las figuras, en el que estas tienen el rol de ilustraciones, el otro enfoque va desde las figuras al encuentro de las propiedades en el cual las figuras son centrales.

Duval afirma que las figuras condensan de alguna manera todas las modalidades de la actividad cognitiva, ver una figura en Geometría significa disociar lo que depende del tamaño, según la escala en la que se realiza el acto de ver, y lo que depende de las formas que se discriminan, ambos aspectos son independientes (2005, p 2)

Teóricamente de acuerdo a su teoría de registros de representación semiótica, la Geometría pone en juego dos registros de representación semiótica, el registro Figural constituido por las figuras y el registro del Lenguaje, en el cual se distingue el registro del lenguaje natural o cotidiano y el registro del lenguaje geométrico constituido por el lenguaje natural y los términos propios de la geometría.

Ver una figura en geometría consiste en dos acciones: la de disociar y la de percibir. **Disociar** se refiere a lo que depende del tamaño (escala) y lo que depende de las formas.

Percibir se refiere a lo que las figuras dejan ver: ya sea propiedades métricas o propiedades cualitativas.

Además, Duval distingue dos maneras de ver, una icónica y otra no icónica. La manera **icónica** de ver es inmediata, se ve globalmente el objeto físico que se presenta, ya sea un cuerpo de tres dimensiones o plantillas o modelos de dos dimensiones.

La manera de ver **no icónica**, no es inmediata, implica una deconstrucción de las formas, en aquellas que se reconocen visualmente, se distinguen tres tipos de deconstrucción de formas:

- instrumental, para construir una figura,
- descomposición heurística (rompecabezas),
- deconstrucción dimensional

La deconstrucción dimensional constituye el proceso central de la visualización geométrica (figuras 0D, 1D, 2D, 3D).

La principal característica de las figuras en relación con otras representaciones del espacio (planos, mapas, o modelos) es no ser una representación icónica, es decir, no parecerse a un objeto visto y conocido de la realidad.

La representación no icónica, moviliza otro tipo de actividad: la producción discursiva de enunciados para describir, explicar, justificar, demostrar.

La visualización y la producción de enunciados en Geometría requieren funcionamientos cognitivos que son diferentes y más complejos que aquellos puestos en juego fuera de la Geometría. Es por esto que su desarrollo y coordinación sean necesarias de considerar como objetivos de enseñanza, tan esenciales como los contenidos. La comprensión de los contenidos puede ser favorecida a partir de una sinergia entre visualización y lenguaje.

En este sentido es necesario considerar las condiciones cognitivas de aprendizaje de la geometría, las que están relacionadas con dos acciones: una, la Intuición geométrica, puesto que es imposible estudiar las propiedades métricas de una figura haciendo abstracción de sus propiedades cualitativas y dos, la Necesidad de representar las figuras (dibujos) o representarlas mentalmente. Para Duval, las principales actividades geométricas son: **ver, conjeturar, construir, razonar, justificar**, puesto que, ellas movilizan actividades cognitivas diferentes.

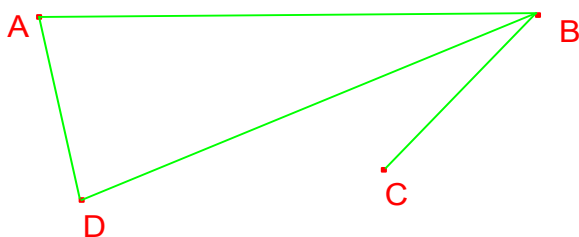
En estas actividades podemos distinguir dos aspectos: 1) La tarea matemática pedida, y 2) El tipo de actividad cognitiva que realmente se moviliza para llevar a cabo dicha tarea.

Hemos propuesto algunos problemas a profesores de enseñanza media en una sesión de Taller.

Precisamos que un problema de geometría en general se compone de un enunciado y una figura y que en los problemas algunas veces las hipótesis están en el enunciado, y otras en la figura de acuerdo con las notaciones convencionales.

Problema 1.

En la figura los segmentos AC y BD son congruentes; también lo son AD y BC. Los triángulos ABC y BAD ¿son congruentes?



Se sugiere a los profesores realizar un pequeño análisis a priori del problema.

Por ejemplo, preguntarse:

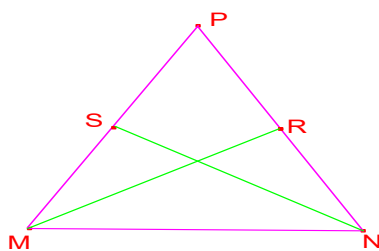
¿La figura con el enunciado están relacionadas? ¿Dónde están las hipótesis? ¿Qué demanda la tarea? ¿Dispone el alumno del conocimiento necesario para responder qué actividad cognitiva deberá poner el juego para justificar?

En este caso, las hipótesis están en el enunciado y la figura es un apoyo que permite visualizar la situación planteada. La tarea matemática pide una demostración.

La actividad cognitiva aquí, es encontrar la hipótesis no explícita (relativa a ángulos), Fue una dificultad para ellos, por desconocimiento de la propiedad para afirmar la congruencia de los ángulos de vértices en D y en C.

Problema 2

En la figura, el triángulo MNP es isósceles de base MN y MR y NS son transversales de gravedad.



¿Qué se podría demostrar?

Este problema los sorprendió, por no tener explícitas las preguntas.

Después de mirar y ver lo que la figura muestra, aparecieron las conjeturas

¿MS es congruente con NS?

¿Los Triángulos MNS Y MNR son congruentes?

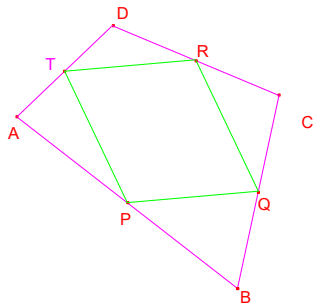
Aquí la tarea matemática es plantear conjeturas y demostrar.

La actividad cognitiva consiste en relacionar lo que la figura muestra e interpretar las hipótesis.

Problema 3

En la figura dada, P, Q, R, T, son puntos medios.

¿Qué puede decir del cuadrilátero PQRT, ¿por qué?



La tarea matemática es de demostración y la actividad cognitiva es de búsqueda.

Los profesores ven el paralelismo de los segmentos opuestos del cuadrilátero.

Algunos tratan de verificar con regla graduada y compás, y encuentran que se trata de un paralelogramo. Aunque el uso de herramientas materiales es válido en la enseñanza básica, no así en enseñanza media, donde las herramientas deben ser intelectuales, conocimientos de propiedades.

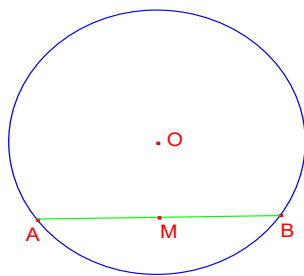
Al no recurrir al teorema de los puntos medios de un triángulo, no vieron que trazar las diagonales, les daba un apoyo para la demostración y quedaron atrapados.

Pensamos que este hecho es un efecto producto de los textos escolares, principal material de apoyo) en los cuales los problemas geométricos en general tienen objetivos de cálculos, aritméticos o algebraicos.

El intervenir una figura con trazados auxiliares no es una acción que les resulte familiar, pues no prevén alguna propiedad relacionada con la demanda del problema

Problema 4

¿Qué se ve en la figura siguiente? ¿se puede demostrar?



Se produce este diálogo:

- Uno dice: Se ve que el segmento PM perpendicular al segmento AB (no se refiere a la cuerda AB)
- algunos dicen claro!: se comprueba con la escuadra.
- otros dicen con un dobléz se verifica que M es punto medio de AB.
- Como nadie reacciona, pregunto: ¿y si el dibujo estuviera en la pizarra?
- Otro dice, yo completaría los triángulos con los radios y usaría criterios para probar que son congruentes.

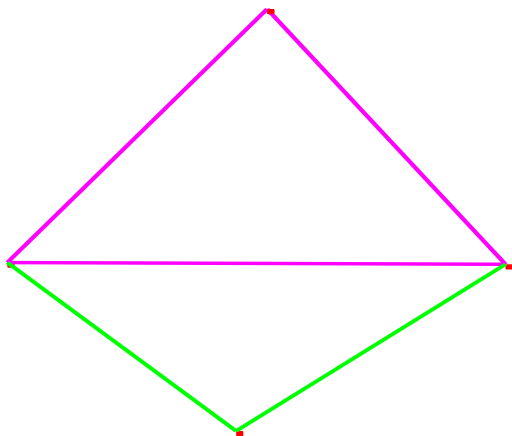
Nadie se refiere al teorema de la perpendicular del centro a una cuerda.

Problema 5

En la siguiente figura F, al trazar la diagonal que falta resulta que ellas son perpendiculares. ¿Qué sub-figuras resultan y componen la figura F? ¿qué propiedades tienen de las sub-figuras?

La tarea matemática aquí es reconocer las propiedades de las sub-figuras.

La actividad cognitiva es trazar la diagonal y visualizar las sub-figuras.



Pero como la hipótesis no explicita sobre las diagonales, no les dio información para continuar y justificar.

Conclusiones

La sorpresa de los profesores participantes con los problemas planteados fueron las siguientes:

No había medidas, ni cálculos, tampoco preguntas explícitas.

¡Afirmaron que no proponen demostraciones, les parecen difíciles “los alumnos no son capaces y ahora después de la pandemia menos!”

Sin embargo, ellos mismos tuvieron dificultades con los problemas, en especial cuando las preguntas no eran directas, quedaban descolocados y cuando se les pedía conjeturar, desconcertados.

Las dificultades que les surgían al tener que plantear preguntas, seguramente se debe a la debilidad de conocimientos de los teoremas básicos.

Para los teoremas de congruencia recurrían a la nemotecnia y nadie pudo enunciar un teorema de congruencia.

Con este panorama exhibido por esta muestra de profesores del sur, Osorno y alrededores, el proceso de enseñanza de la Geometría en Chile aparece poco alentador, y plantea un gran desafío a la Formación inicial y continua de Profesores de Matemáticas.

A importância das Metodologias Ativas e dos recursos tecnológicos no planejamento docente

Claudia Lisete OLIVEIRA GROENWALD

Universidade Luterana do Brasil

Resumo

Esta conferência tem por objetivo apresentar os resultados da pesquisa Educação Matemática e Tecnologias Digitais realizada no Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática (GECEM) do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)/Canoas, Brasil.

O GECEM é um grupo de pesquisa registrado no CNPq, desde o ano de 2006 e que atua com a linha de pesquisa em Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática e suas formas de inserção no Currículo Escolar e que, pela sua imposição nos modos de ensinar na sociedade contemporânea e pelos indicativos no currículo prescrito no Brasil, tem desenvolvido pesquisas com as tecnologias digitais e na formação inicial e continuada de professores para integrem as tecnologias em seus planejamentos docentes.

Outro aspecto importante a ser desenvolvido nesta conferência está na importância das Metodologias Ativas para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da Educação Matemática em todos os níveis de ensino e que se faz urgente trabalhar com professores que ensinam matemática tanto da Educação Básica quanto do Ensino Superior.

As Metodologias Ativas são processos amplos e possuem como principal característica a inserção do estudante como agente principal, responsável pela sua aprendizagem, onde as ações desenvolvidas necessitam que o estudante se comprometa com seu aprendizado. O principal objetivo deste modelo de ensino é incentivar os alunos para que aprendam de forma autônoma e participativa, sempre que possível a partir de problemas e situações reais.

A proposta é que o estudante esteja no centro do processo de aprendizagem, participando ativamente e sendo responsável pela construção do seu conhecimento. O papel do professor deve ser de um orientador de trabalhos, deve agir como mediador do processo de ensino e aprendizagem dos estudantes. A principal ação do professor, ao utilizar metodologias ativas, deve ser o planejamento didático com o objetivo que os alunos sejam agentes do seu aprender. Neste sentido, a escolha de tarefas adequadas é a principal ação do professor.

Para Bastos (2006, p. 10) as Metodologias Ativas são “processos interativos de conhecimento, análise, estudos, pesquisas e decisões individuais ou coletivas, com a finalidade de encontrar soluções para um problema”. Os autores Mitre et al. (2008) salientam que as Metodologias Ativas utilizam a problematização como estratégia para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem, com o objetivo de alcançar e motivar o estudante, pois diante do problema, ele se detém, examina, reflete, relaciona aos conhecimentos que já possui e passa a ressignificar suas descobertas, entendendo que a problematização pode levar o aluno ao contato com as informações e à produção do conhecimento.

Corroborar-se com Berbel (2011) quando afirma que aprender por meio da problematização e/ou da resolução de problemas, nesse caso, problemas que envolvam os conhecimentos matemáticos, possibilita o envolvimento ativo dos alunos no seu processo de formação. Se é importante que os alunos sejam proativos, é necessário adotar metodologias em que estes se envolvam em atividades cada vez mais complexas, em que tenham que tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de atividades, materiais e recursos relevantes.

Os benefícios de trabalhar com as Metodologias Ativas são muitos, o principal é a transformação na forma de conceber o aprendizado, ao proporcionar que o aluno pense de maneira diferente do habitual e desenvolva competências que o habilitem a resolver problemas, conectando ideias que, em princípio, parecem desconectadas. Ou seja, o principal objetivo é que o professor consiga desenvolver a criatividade dos estudantes e que os estudantes consigam resolver problemas ligando o conhecimento adquirido com a criatividade. Salienta-se que conhecimento é fundamental para que o estudante resolva problemas com criatividade.

As Metodologias Ativas fogem totalmente do ensino tradicional. Nessa abordagem, o conteúdo é planejado para tirar o aluno da passividade, trazendo-o para o centro do processo de aprendizagem. Além disso, permitir o protagonismo do estudante colabora para que o aprendizado seja significativo, ou seja, faça sentido para os estudantes.

Segundo Ogin, Groenwald e Kaiber (2021) as condições impostas pela vida moderna, quando somos chamados a atuar em um mundo em constante transformação, cada vez mais dependente das tecnologias e que, a todo momento, nos apresenta novos desafios, tanto individuais como coletivos, exigem que os indivíduos desenvolvam autonomia, capacidade de resolver situações problema, tomar decisões, atuando em benefício do seu meio social. Nesse contexto, para as autoras a Educação, e particularmente a Educação Matemática, têm a

responsabilidade de desenvolver um trabalho que possibilite aos estudantes, desde muito cedo, atuarem em ambientes que contribuam para sua formação como cidadãos atuantes nesse mundo cada vez mais exigente.

Os projetos são considerados uma Metodologia Ativa, que estão alicerçados no princípio teórico, que se considera significativo, que é a formação da autonomia, de um sujeito crítico, com condições para atuar no mundo moderno. As ideias de Freire (2014) apud Olgin; Groenwald e Kaiber (2021) fundamentam essa teoria rompendo com a ideia de que os estudantes são, somente, recipientes passivos de informação. Muito além de serem sujeitos passivos, são pessoas inquietas, que podem refletir sobre diferentes temáticas e desenvolver estratégias de solução para enfrentar situações-problema de certa complexidade (Mora & Rivera, 2004). A metodologia de projetos permite a utilização de diferentes temas de interesse que são importantes para a formação do estudante, oportunizando não apenas um trabalho com os conteúdos escolares, mas uma formação que relacione os mesmos aos aspectos sociais, culturais e políticos.

Para Groenwald, Silva e Mora (2004), esse método pode ser definido como uma busca organizada de respostas a um conjunto de interrogações em torno de um problema ou tema relevante do ponto de vista social, individual ou coletivo, o qual pode ser trabalhado dentro ou fora da sala de aula com o trabalho colaborativo e cooperativo envolvendo toda a comunidade escolar.

Hernandez e Ventura (2017) apontam que, durante o desenvolvimento de um projeto de trabalho, pode-se verificar que ele contribui para a formação dos alunos, auxiliando na aprendizagem, visto que passam a organizar um planejamento; buscar, selecionar e interpretar as informações pesquisadas; realizar um dossiê de síntese; e avaliar todo processo em grupo e com o professor. Nesse movimento, “formam um anel contínuo de significações no processo de aprendizagem” por meio do projeto desenvolvido (Hernandez & Ventura, 2017, p. 73).

Entende-se que participar do desenvolvimento de um projeto, pode enriquecer as experiências, os conhecimentos e as habilidades dos alunos, pois um projeto, por ser único, depende da aplicação de conhecimentos específicos e metodologias apropriadas para organizar, interpretar e analisar os dados obtidos para responder o problema.

Outro exemplo de Metodologias Ativas está na (re)formulação e resolução de problemas. Segundo Nunes (2016), na (re)formulação e resolução de problemas, o professor deve incentivar a investigação, a comunicação e a reflexão, bem como orientar a aprendizagem. Também, os alunos precisam ser estimulados a desenvolver as próprias ideias e pontos de vista, a encarar o erro e superá-lo e a adquirir a confiança necessária para expressar a criatividade.

Segundo Figueiredo e Groenwald (2019) a implementação de práticas pedagógicas, sob a utilização de perspectivas metodológicas, que possibilitem a produção de conhecimentos matemáticos associados aos tecnológicos e relativos a temas de relevância social, é uma necessidade na Educação, visto que pode contribuir, também, para que os alunos desenvolvam a competência de resolver problemas no ambiente escolar e fora dele, entendendo que, na formação inicial e continuada de professores de Matemática, devem ser oferecidos espaços para que se possam estudar, discutir e refletir sobre tais perspectivas, como por exemplo o design de problemas com o uso de tecnologias digitais, que pode favorecer a produção de conhecimentos e o aprimoramento e/ou desenvolvimento de competências e habilidades docentes.

As etapas propostas por Figueiredo (2017), para o design de problemas com o uso das tecnologias digitais, cujo propósito seja valorizar as características e aspectos, como os que são citados anteriormente,

podem ser, também, complementadas por outras, sendo elas o planejamento da prática pedagógica, que o problema será proposto aos alunos da Educação Básica, a realização da prática pedagógica e a discussão e reflexão por parte dos resolvedores e do(s) designer(s), dos resultados obtidos. A ocorrência dessas etapas possibilita aos licenciandos em Matemática o planejamento pedagógico, utilizando os problemas que elaboraram, e a realização da prática, orientando os alunos no decorrer do processo de resolução desses problemas com o uso de tecnologias digitais, bem como a verificação dos resultados da discussão e reflexão, por parte dos alunos no decorrer e/ ou após a solução, e, principalmente, pode contribuir para que discutam e reflitam sobre as experiências de designer e professor adquiridas, “[...] com o propósito de que as potencialidades e/ou as limitações dessa perspectiva na Educação Matemática possam ser identificadas” (Figueiredo & Groenwald, 2017, p.3).

Também, considera-se que o uso de recursos tecnológicos fundamenta o uso das Metodologias Ativas e não podem ser desconsideradas no planejamento pedagógico dos professores.

Citando Homa e Groenwald (2020): “Em uma sociedade de bases tecnológicas, com mudanças contínuas, não é mais possível desprezar o potencial pedagógico que as TDIC apresentam quando incorporadas à Educação.”

A integração dos recursos tecnológicos na Educação mostra-se irremediavelmente associada à necessidade de reforço da profissionalização docente e de uma (re) organização das dinâmicas escolares (Nóvoa, 2007). Segundo o autor torna-se importante perceber que ações se mostram necessárias para promover a efetiva inclusão das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) no contexto escolar, mais especificamente, estudos de como se pode promover o desenvolvimento profissional docente para trabalhar, com eficiência e sustentabilidade esta inclusão no planejamento escolar.

Segundo Caccuri (2016) é importante que os professores sejam competentes para ensinar e aprender em um contexto de cultura digital. Entendendo cultura digital como um conjunto de saberes, crenças, usos e costumes que surgem na sociedade a partir da convergência das TIC, gerando uma revolução nos modos de acumular, apropriar-se e transmitir os dados, impulsionando novos desenvolvimentos sociais, políticos, econômicos e educativos.

Entende-se que os professores passam por diferentes etapas de integração das TDIC no planejamento didático, que abarcam desde o uso exploratório até o desenvolvimento de atitudes criativas e inovadoras para sua implementação como parte da tarefa educativa. Estas etapas, segundo Caccuri (2016), são:

Fase de exploração - a primeira abordagem, depois de superar os medos e de abrir a mente para as possibilidades que as TDIC oferecem para a Educação. Nesta etapa o professor introduz alguns recursos digitais no seu planejamento e se surpreende frente as opções possíveis. Já é capaz de desenvolver atividades de aprendizagem utilizando recursos digitais, ferramentas informáticas e meios audiovisuais. Já considera a internet como uma poderosa fonte de informação e utiliza ferramentas nas tarefas profissionais (planejamentos, controle das avaliações, entre outras).

Fase de integração - nesta fase o professor já utiliza as TDIC de forma autônoma, por meio do aprofundamento e da integração criativa de recursos informáticos. A partir de saberes e experiências prévias adquiridas pelo uso das TDIC na vida cotidiana ou de seu uso na Educação na etapa de exploração, é consciente de potencial das TDIC e as integra na prática com segurança e confiança. Nesta fase é capaz de: planejar e publicar conteúdos digitais em diferentes formatos; acessar recursos disponíveis online para aprender de maneira

não presencial e realiza cursos virtuais; participar de projetos colaborativos com outros colegas e com os seus alunos.

3. Fase de inovação - nesta etapa o professor está em condições de usar TDIC para criar, expressar ideias, construir conhecimentos de maneira colaborativa e desenvolver novas estratégias para reconfigurar a prática educativa. Sente-se capaz de planejar ambientes de aprendizagem virtuais, de adotar e adaptar novas ferramentas de uma múltipla variedade de fontes e recursos.

Neste sentido esta conferência vai abordar o uso de Metodologias Ativas, no caso os projetos e a (re)formulação e resolução de problemas, metodologias que devem estar integradas as tecnologias digitais. Também vai abordar a importância da integração no planejamento didático na formação inicial e continuada de professores de Matemática. Apresentando exemplos de pesquisas desenvolvidas no GECEM.

Referências Bibliográficas

Bastos, C. C. (2020, 20 Maio). Metodologias ativas. **Educação & Medicina**. <http://educacaoemedicina.blogspot.com.br/2006/02/metodologias-ativas>.

Berbel, N. A. N. (2011). As metodologias ativas e a promoção da autonomia de estudantes. **Semina: Ciências Sociais e Humanas**, 32(1), 25-40. <http://dx.doi.org/10.5433/1679-0383.2011v32n1p25>.

Caccuri, V. (2016). **Tecnologia Digital para docentes: computación y TICs em el aula**. Buenos Aires: Dalaga.

Figueiredo, F. F. & Groenwald, C. L. O. (2017). A experiência dos licenciandos como designers de problemas com a utilização das Tecnologias Digitais: uma perspectiva metodológica na formação inicial de professores de Matemática. **EMR-RS**, 18(2), 33-43.

Figueiredo, F. F. & Groenwald, C. L. O. (2019). O Design de Enunciados e a (Re)Formulação e Resolução de Problemas Abertos e que Abordam Temas de Relevância Social com o Uso de Tecnologias Digitais na Formação Inicial de Professores de Matemática. **Acta Scientiae**. 21(2), 2-17.

Groenwald, C. L. O., Silva, C. K. & Mora, C. D. (2004). Perspectivas em Educação Matemática. **Acta Scientiae**, 6(1), 37-55.

Hernández, F. & Ventura, M. (2017). A Organização do Currículo por Projetos de Trabalho. **Artes Médicas**.

Homa, A. I. R.; Groenwald, C.L.O. (2020) As Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação como um recurso didático no Currículo de Matemática. **UNICIENCIA**. 34(2), pp. 153-170. Julio-Diciembre.

Hernández, F. & Ventura, M. (2017). A Organização do Currículo por Projetos de Trabalho. **Artes Médicas**.

Mitre, S. M. et al. (2008) Metodologias ativas de ensino-aprendizagem na formação profissional em saúde: debates atuais. **Ciência e saúde coletiva**, 13(2), 2133-2144.

Mora, C. D. & Rivera, A. (2004). Tópicos em Educação Matemática. GIDEM.

Nóvoa, A. (2007). **Desafios do trabalho do professor no mundo contemporâneo**. São Paulo: SINPRO.

Nunes, K. R. A. (2016). Criatividade e criação na aula de matemática. Enfoque. **Revista Pátio**, 1(80).

Olgin, C. de A.; Groenwald, C. L. O; Kaiber, C. T. (2021). O protagonismo do estudante no Ensino Médio por meio da investigação com a metodologia de Projetos. **Acta Scientiae**. 23(8), 102-140, Aug.

Educación de los Sentimientos y Emociones: Tarea Pendiente en la Educación Matemática

Fredy Enrique GONZÁLEZ

Universidade Federal de Rio Grande do Norte

Centro de Educação, Natal, Rio Grande do Norte, Brasil

Universidad Pedagógica Experimental Libertador

Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina”, Venezuela

fredygonzalezdem@gmail.com

Las evidencias acerca de la estrecha relación entre cognición y emoción en el comportamiento humano se incrementan cada vez más, en la medida en que dicha relación es estudiada en el campo de las Neurociencias, es decir, “el conjunto de ciencias y disciplinas científicas y académicas que estudian el sistema nervioso, centrando su atención en la actividad del cerebro y su relación e impacto en el comportamiento” (Gago y Elgier, 2018, p. 476), especialmente de aquellas que se interesan en saber cómo es que aprenden los seres humanos (Bransford, Brown y Cocking, 1999).

Un resultado importante de las investigaciones neurocientíficas es que “el cerebro aprende solamente si hay emoción” (Mora, 2018); este autor afirma que se han conseguido evidencias de acuerdo con las cuales las emociones positivas tienen incidencia sobre el aprendizaje y la memoria, ya que ellas ayudan a mantener activas tanto la curiosidad como la motivación, condiciones éstas que son consideradas esenciales para garantizar un aprendizaje efectivo y duradero a largo plazo. En cuanto al papel de la emocionalidad en el aprendizaje, Pacheco, Villagran y Guzmán (2015) sostienen que “la emocionalidad influye significativamente en el aprendizaje de una persona, pues ellas condicionan las acciones posibles para su alcance” (Pacheco, Villagran y Guzmán, 2015, p. 202)

Poéticamente se asume que la residencia del repertorio emocional del ser humano es su músculo cardíaco donde, más ostensiblemente, se manifiesta la incidencia de las emociones, puesto que es notorio que cuando una persona está emocionada, su frecuencia cardíaca se incrementa. Sin embargo, estudios como los que ha sido realizados por Araya-Pizarro y Espinoza, (2020), reportan que es en el cerebro, concretamente en el hipocampo¹, donde se localizan los activadores emocionales de los seres humanos:

A nivel neurofisiológico, las emociones activan el hipocampo -que está relacionado con la memoria y el aprendizaje-, anclando mejor los conocimientos obtenidos. De este modo, produce recuerdos de tipo emocional con la mediación de la amígdala cerebral, facilitando su posterior evocación. Existe, así, un entrecruzamiento entre la emoción y la memoria que genera recuerdos fuertemente sostenidos en la memoria a largo plazo, con mayores posibilidades de ser recuperado y por tanto consolidado. (Araya-Pizarro y Espinoza, 2020, p. 5),

Se destaca de lo afirmado por estos dos autores, la relación establecida entre emoción y memoria, es decir, emoción y cognición. Por otro lado, de acuerdo con Triglia (2016):

¹ El hipocampo es una de las partes del cerebro más importantes. Está situado en lo que se conoce como sistema límbico, y está muy relacionado tanto con los procesos mentales relacionados con la memoria como con aquellos que tienen que ver con la producción y regulación de estados emocionales, además de intervenir en la navegación espacial, es decir, el modo en el que nos imaginamos el movimiento a través de un espacio concreto. Información extraída de: <https://psicologiaymente.com/neurociencias/hipocampo>

La principal función del hipocampo es la de mediar en la generación y la recuperación de recuerdos en conjunto con muchas áreas repartidas por la corteza y con otras áreas del sistema límbico. Por tanto, tiene un papel muy importante en la consolidación de los aprendizajes realizados, ya que por un lado permite que ciertas informaciones pasen a la memoria a largo plazo y por el otro vincula este tipo de contenidos con ciertos valores positivos o negativos, dependiendo de si estos recuerdos han estado asociados a experiencias placenteras o dolorosas (fisiológica o psicológicamente). Son los procesos mentales ligados a la emoción los que determinan si el valor de una experiencia almacenada como recuerdo es positivo o negativo. Lo que experimentamos como emociones tiene una parte funcional que tiene que ver con el modo en el que aprendemos a comportarnos siguiendo unas reglas aprendidas que jueguen a nuestro favor: evitar repetir errores y volver a experimentar sensaciones agradables.

Conforme a Triglia (2016), se observa el papel desempeñado por las emociones en la consolidación de lo que se aprende, dependiendo del signo (positivo o negativo) que se atribuya a la experiencia emocional; por ello, si el aprendizaje tiene lugar en escenarios que promuevan experiencias agradables es probable que sea más firme y se mantenga durante más tiempo que cuando el mismo ocurre en situaciones propiciatorias de experiencias emocionales negativas.

Por otro lado, también se han obtenido evidencias del vínculo entre Cognición, Emoción y Motivación (De Sixte y Sánchez, 2012) y, dado que existen emociones que pudieran ser consideradas como “positivas” y otras que no lo son, podría pensarse que las primeras movilizan hacia la acción, en tanto que las segundas se asocian con la inacción, la parálisis o la inercia. A este respecto, Palmero, Gómez, Carpi, Díez, Martínez y Guerrero (2004) sostienen que, en el examen de las relaciones entre la Motivación, la Emoción y la Cognición, debe tenerse en cuenta que no son dimensiones del comportamiento humano que se opongan entre si puesto que:

[...] la conducta del ser humano se gesta en el seno de una interacción social, se dirige a la consecución de una meta determinada, implica la ejecución de análisis y valoraciones, se generan expectativas de éxito en función de la dificultad de la tarea y de los recursos disponibles, participan las emociones, o el afecto en general, influyendo de forma importante siempre, y en muchas ocasiones decisiva, a la hora de elegir la meta y a la hora de llevar a cabo todos los procesos cognitivos reseñados. Al final, surge la decisión motivacional de intentar la consecución de esa meta. (Palmero, et. al. 2004, p. 21).

Siendo así, Cognición, Emoción y Motivación se integran constituyendo una totalidad indivisible que sirve de base al comportamiento humano. De esta manera, resulta plausible la conjetura de acuerdo con la cual la posibilidad de desarrollar (sentir) emociones positivas en la ejecución de una determinada acción (por ejemplo, estudiar y aprender Matemática), incrementando la probabilidad de que la misma sea realizada con éxito (es decir, apropiarse de los conocimientos matemáticos escolarmente previstos). Se construye así una relación ternaria Cognición-Emoción-Motivación que potencializa la acción (Figura 1).

Figura 1. Relación Ternaria Cognición-Emoción-Motivación



Fuente: Elaboración Propia

Lo mostrado resulta interesante para la Educación, particularmente en cuanto al aprendizaje. En efecto, cada vez son más las evidencias según las cuales el aprendizaje es un asunto individual pero socialmente contextualizado; es decir, aprendemos individualmente más en un contexto social que promueve tal aprendizaje. Así que la interacción cognición, emoción, motivación y acción, podría ayudar a superar la tradicional visión transmisiva de la enseñanza en general y de la Matemática, en particular. Lave y Wenger (1991) sostienen que “[...] la cognición y comunicación en y con el mundo social se sitúan en el desarrollo histórico de la actividad en curso” (Lave y Wenger, 1991. p. 51); por tanto, el aprendizaje, en la medida en que moviliza procesos cognitivos, emociones, motivaciones y acciones, “envuelve participación social y la cognición, incluido el aprendizaje, toma lugar en la comunión con el mundo social y no en las “mentes” individuales” (Sánchez-Cardona y Rodríguez Arocho, 2011, p. 116). Siendo así, manteniendo la idea de comunidades de aprendizaje suscrita por Lave y Wenger (1991), las sesiones de clase pueden ser asumidas como lo que Rojas Martín (2005) denomina “Episodio de Acción Social”, es decir

[...] una entidad caracterizada por la existencia de una ORGANIZACIÓN, constituida por INDIVIDUOS que se incorporan acoplando sus potencialidades a lo que se les demanda desde el propio Episodio, contribuyendo ellos a otorgarle identidad. Aparece así la ORGANIZACIÓN (es decir, un conjunto de interrelaciones entre individuos que crea una unidad compleja con una identidad propia que es diferente a cada uno de los individuos en particular); así, las tres dimensiones de una Episodio de Acción social son: la ORGANIZACIÓN, el SISTEMA y la INTERRELACIÓN. Cada uno hace referencia a los demás, en tanto que no hay organización sin sistema, ni sistema sin organización, como tampoco existe sistema sin interrelaciones, ni interrelaciones sin organización. (Rojas Martín, 2005, p. 129)

Siguiendo las ideas de Rojas Martín (2005, p. 128-130), podemos pensar que una clase de Matemática constituye una “Totalidad Indivisible” en cuyo seno interaccionan un conjunto de individuos (docente y discentes) que al relacionarse constituyen una comunidad organizada con una intencionalidad específica (enseñar y aprender Matemática); en la organización, los individuos en función de su singularidad, desempeñan funciones (roles) específicos que los diferencia más, al mismo tiempo, los integra. Cada uno de los individuos, dependiendo del lugar que ocupan en el todo (en este caso el aula de clases vista como comunidad) mantienen su propia identidad pero al mismo tiempo cuentan con diversas posibilidades de actuación cuya realización práctica depende de procesos de comunicación (instrucciones, interacciones, indicaciones del profesor, diálogos entre los estudiantes, etc.) que permiten la sincronización de las acciones individuales (evitando la anarquía) y su coordinación mutua; en este escenario el discurso del docente ya no es más un simple transvase de información.

Concibiendo las clases como Episodio de Acción Social, a la manera de Rojas Martín (2005), podría decirse, APRENDER MATEMÁTICA podría ser asumido como un PROYECTO COLECTIVO (por ejemplo, de todos los integrantes del grupo conformado por estudiantes de una misma sección, o de un mismo nivel, o inclusive, de una misma escuela) que tiene SIGNIFICACIÓN INDIVIDUAL.

En esta perspectiva, las clases de Matemática ya no podrían continuar siendo instancias rutinarias caracterizadas por la voz dominante del docente (poseedor absoluto del saber) y el silencio casi sepulcral de los alumnos. Al contrario, las clases ha de asumirse como espacios de encuentro (presenciales o virtuales) de trabajo colectivo, es decir, de acciones compartidas, en la que cada estudiante comparte su visión individual con las de sus compañeros, produciéndose así una sinergia donde la fuerza colectiva impulsa el hacer individual. Dado que estos encuentros tienen como intención la apropiación de conocimientos matemáticos, los mismos son caracterizados como *Encuentros Edumáticos*, es decir, situaciones sociales o “Episodios de Acción Social” en los cuales “un docente y un grupo de alumnos se comprometen en un proceso de adquisición de conocimientos y producción de saberes en relación con la Matemática” (González, 2000, p. 118). Dichos encuentros

[...] propician la construcción de una relación dialógica que considera pares a los protagonistas del hecho educativo matemático escolar; esto significa que, en el aula de clases de matemática, los vínculos entre el profesor de la asignatura y los estudiantes se conciben como relaciones orientadas hacia la construcción conjunta de saberes en torno a procesos y productos matemáticos específicos (González, 2010, p. 54)

Además, estos Encuentros Edumáticos

[...] constituyen una modalidad de trabajo en el aula de clases que genera múltiples interacciones vinculadas con procesos de construcción del conocimiento matemático; en dichos procesos subyace una organización del aula que se manifiesta en tareas que están orientadas hacia el logro de ciertos fines y, a la vez, definen actividades que están vinculadas con los roles desempeñados por el profesor (Facilitador, Mediador, Investigador) y con las funciones de los alumnos (aprendiz, Investigador) (González, 2010, p. 55)

Mas, ¿Cuál sería el trabajo a realizar durante estos encuentros? Desde el punto de vista de quien esto escribe, tales encuentros constituyen instancias de colaboración en la búsqueda y propuestas de cursos de acción para desarrollar proyectos basados en la resolución de problemas cuyo contenido hace referencia a contextos reales (situaciones que efectivamente se presentan en la realidad próxima o remota del estudiante y les conmina a actuar directamente en la situación aludida en el enunciado del problema) o realistas (situaciones que simulan, total o parcialmente, una realidad).

Los problemas contextualizados (reales o realistas) pueden ser asumidos como Tareas Intelectualmente Exigentes (TIE), es decir, tareas cognitivamente desafiantes, cuya realización, al mismo tiempo que moviliza procesos de pensamiento -tanto básicos como superiores (por ejemplo, procesos metacognitivos)- requiere también de una importante carga de emocionalidad y, dado que la tarea no es un asunto meramente individual sino de todos, el grupo como colectivo le imprime una dosis sustancial de motivación; dichas TIE constituyen oportunidades para que los alumnos participen en actividades que estimulen la activación de sus procesos de pensamiento de orden superior y los lleven a ser individuos intelectualmente competentes; además, ellas son

propiciatorias del razonamiento esforzado; es decir, no son realizables con la mera ejercitación del recuerdo memorístico, ni con la utilización mecánica de esquemas algorítmicos, ni con la aplicación de recetas preconcebidas; al contrario, deben ameritar la realización de cierto esfuerzo intelectual y [...] ser vivenciadas por quien la ejecuta como una oportunidad para aprender [...] convocar la ejercitación de variadas

habilidades cognitivas básicas; por ejemplo, el razonamiento, la lectura, la escritura y/o el cálculo o manejo de relaciones cuantitativas o simbólicas. (González, 1997, pp. 504-505)

Asumir los Encuentros Edumáticos, basados en la resolución de problemas contextualizados, siendo instancias de Tareas Intelectualmente Exigentes, como modalidad de trabajo en las aulas de clase de Matemáticas, provoca modificaciones en la rutina escolar, de diversa naturaleza; en primer lugar, el aprendizaje matemático deja de ser un asunto meramente de recepción memorística de información que emana de una fuente externa y pasa a ser una tarea desafiadora, colectivamente asumida.

En este caso, los procesos cognitivos individuales se conjugan con el de la Cognición Distribuida (Hutchins, 2000), en la que las cogniciones particulares de cada uno de los miembros del grupo se complementan sinérgicamente, dando lugar a una acción cognitiva colectiva de nivel superior; la Cognición Distribuida plantea que la cognición y el conocimiento no se limitan a un individuo, sino que se distribuyen a través de objetos, personas y herramientas en el entorno.

Hutchins señala que la “Cognición Distribuida” se centra en la manera en que *el conocimiento* es transmitido entre los actores de un sistema y cómo la *información* necesaria para cooperar es propagada a través del mismo por *estados representacionales y artefactos*. Las *actividades cognitivas* bajo este contexto son entendidas como operaciones que se llevan a cabo vía la propagación del estado representacional a través de medios. Los *medios* se refieren a las representaciones internas (memoria individual) y externas (interfaces de computadora, esquemas, etc.) mientras que el estado representacional se refiere a cómo los recursos de información y conocimiento son transformados durante las actividades. (Ferruzca, 2008, p. 44). (Cursivas añadidas)

En consecuencia, la autoría de la solución de los problemas que hayan sido abordados, no puede atribuírsele particularmente a un solo miembro del grupo sino que es generada a partir de un proceso de búsqueda compartido; en este caso se está en presencia de una Autoría Distribuida, concebida por González (2021) como un conjunto de interrelaciones comunicacionales generadas por dos o más seres humanos quienes protagonizan una situación social en la cual, mediante intercambios comunicativos (orales, escritos, gestuales; sincrónicos o asincrónicos) de trans-subjetivización, procuran un desplazamiento conjunto hacia niveles, cada vez más profundos, de entendimiento, comprensión y aprehensión de asuntos (cognitivos, culturales, naturales, sociales, políticos, económicos, académicos, etc.) de mutuo interés.

Otra modificación se refiere a la organización social de quienes participan de la clase, no sólo los estudiantes sino también el docente. Se trata de una organización aplanada, donde las relaciones no se sustentan sobre jerarquías autoritariamente impuestas, sino que se apoyan en el reconocimiento respetuoso, tanto de los otros compañeros (asumidos como pares) como del docente, quien es visto como un acompañante, un baquiano, alguien que posee una baquía² porque ha recorrido con antecedencia el terreno por donde nosotros queremos transitar y, por ende, conoce a cabalidad las características de cada uno de los senderos; se le respeta como los excursionistas respetan a su guía.

La dinámica de trabajo en el aula también cambia. La inmovilidad de los estudiantes atados a sus asientos, da paso a una amplia posibilidad de movimientos y desplazamientos dentro del salón de clases; el silencio impuesto por el docente, es sustituido por la algarabía alegre y bulliciosa de los discentes, compartiendo puntos de vista, explorando cursos de acción, verificando conjeturas, validando soluciones, etc.

² **Baquía:** Conocimiento práctico de las sendas, atajos, caminos, ríos, etc., de un país. **Baquiano:** Experimentado en los caminos, trochas y atajos, y que actúa como guía para transitar por ellos. (DRAE)

En un escenario como el descrito, no resulta difícil imaginar la emergencia de expresiones ostensibles de la emoción que embarga a los estudiantes como cuando celebran, a viva voz, el haber encontrado la solución a un problema con el que hayan estado trabajando, y esta emocionalidad debe ser estimulada, puesto que las emociones positivas asociadas con el aprendizaje (que es un proceso esencialmente cognitivo) ayudan a fortalecerlo y consolidarlo.

Otro aspecto importante a destacar es el que se refiere al desarrollo de comportamientos socialmente deseables, tales como el respeto mutuo, la tolerancia a las diferencias, la capacidad para defender puntos de vista con base en argumentos (comunicación asertiva y argumentativa), expresión oral y escrita, imaginación creativa, liderazgo democráticamente establecido, entre otros.

Sin embargo, esos modos diferenciados de asumir las clases de Matemática y de organizar los espacios donde ellos tienen lugar, encuentra la oposición resistente de la enseñanza tradicional: expositiva, castigadora del bullicio estudiantil y del error, promotora de la rivalidad y de la no colaboración; además, tampoco promueve la cognición distribuida sino la individual; este tipo de enseñanza genera un contexto propiciatorio para el surgimiento de emociones negativas que, a la larga, podrían conducir a la fobia ante la Matemática.

Abrir paso a los cambios en la organización de las estrategias de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, requiere de Insubordinación Creativa (Urpia y Alves, 2022) por parte de los docentes, asumiendo los riesgos que ello conlleva, puesto que insubordinarse creativamente, significa atreverse a crear nuevas maneras de lograr que los estudiantes se apropien significativa e idiosincrásicamente del conocimiento matemático. Además, implica “[...] pensar en espacios contradictorios y en ambigüedades: certezas e incertidumbres, aciertos y desaciertos, éxitos y fracasos, es decir, caminos que conducen a una eterna e incesante búsqueda de lo nuevo, de movilización y de reflexión [...]” (Urpia y Alves, 2022, p. 6). Mas, a pesar de todos estos riesgos, el docente ha de pensar que, en definitiva, los mismos serán minimizados ante los altamente probables buenos resultados, en términos de aprendizaje matemático que serán alcanzados por los estudiantes.

Todo lo anteriormente expuesto, exige la concepción y puesta en práctica de estrategias que permitan articular la educación emocional y el desenvolvimiento cognitivo en los procesos de construcción del conocimiento matemático. Ello es posible si se ponen en juego los hallazgos de las investigaciones que confirman los estrechos e indisolubles vínculos entre cognición y emoción, motivación y acción.

El estudio de los aspectos afectivos relacionados con el aprendizaje no es reciente; de hecho, la Taxonomía creada por Bloom y sus colaboradores ya incluía la afectividad como uno de los dominios del aprendizaje al cual debía prestársele atención adecuada en los procesos evaluativos.

El dominio afectivo del aprendizaje de la Matemática, de acuerdo con Martínez (2005), comprende las “concepciones, creencias, motivaciones, convicciones, opiniones, sentimientos, emociones y actitudes que tienen los estudiantes y los docentes hacia dicha ciencia o hacia los procesos en ella implicados” (Martínez, 2005, p. 7).

Por su parte, David McClellan (1965) desarrolló una teoría de la motivación humana; en ella se pone en evidencia la asociación entre emoción y motivación. Una de las variables examinadas en los estudios fundamentados en esta teoría, es la Necesidad de Cognición (NECOG) (Cacioppo y Petty, 1982). Ya para el caso específico de la educación matemática, es decir, de la formación en Matemática a la cual toda persona tiene derecho, se destacan los trabajos de Inés María Gómez Chacón, quien abrió un interesante espacio de investigación al que denominó “Matemática Emocional”. (Gómez Chacón, 2010), la cual podría concebirse como la utilización de los recursos emocionales propios (y probablemente los de nuestros compañeros de estudio) como guía de nuestros procesos

cognitivos y metacognitivos en la ejecución de acciones (intelectuales y enactivas) motivadas por la búsqueda y organización de información que permita construir soluciones a problemas intra o extramatemáticos, concebidos éstos como Tareas Intelectualmente Exigentes. A partir de los trabajos de Gómez-Chacón se ha incrementado el interés por los asuntos relacionados con los vínculos entre cognición, emoción, motivación y acción.

El reto es superar las clases de matemática emocionalmente negativas y sustituirlas por otras que promuevan un aprendizaje saludable de las Matemática, lo cual implica desarrollar la capacidad, tanto de los estudiantes como de los docentes, para reconocer y gestionar sus emociones y crear entornos de aprendizaje en los que estudiantes se involucren emocional, cognitiva y socialmente; la investigación relativa a estos asuntos ha obtenido evidencias de acuerdo con las cuales, hasta los estudiantes percibidos como con menos desempeño en Matemática, consiguen experimentar y expresar emociones positivas hacia la Matemática y participar en las actividades y deliberaciones colectivas.

En definitiva, se dispone ya de resultados investigativos robustos, cuya puesta en práctica podría ayudar a cambiar la realidad actual de la formación matemática de los ciudadanos; sin embargo, las modificaciones esperadas requieren de una reestructuración de la enseñanza de la Matemática y ello es un proceso cuya ejecución, lamentablemente, no se vislumbra en el corto plazo.

Referencias Bibliográficas

- Araya-Pizarro, Sebastián C., & Espinoza Pastén, Laura. (2020). Aportes desde las neurociencias para la comprensión de los procesos de aprendizaje en los contextos educativos. **Propósitos y Representaciones**, 8(1), e312. <https://dx.doi.org/10.20511/pyr2020.v8n1.312>
- Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (Eds.). (1999). **How people learn: Brain, mind, experience, and school**. National Academy Press.
- Cacioppo, J. T. y Petty, R. E. (1982). The need for cognition. **Journal of Personality and Social Psychology**, 42, 116-131.
- De Sixte, Raquel & Sánchez, Emilio. (2012). Cognición, motivación y emoción en la interacción profesor-alumno. Una propuesta para analizar su relación mediante el registro de las ayudas frías y cálidas. **Infancia y Aprendizaje**. 35. 483-496. 10.1174/021037012803495258.
- Ferruzca, M. (2008). **Estudio teórico y evidencia empírica de la aplicación del marco teórico de “Cognición Distribuida” en la gestión de sistemas de formación e-Learning**. Tesis doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya. https://www.tesisenred.net/bitstream/handle/10803/6548/01_ferruzcaNavarro.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Gago, L., & Elgier, Á. (2018). Trazando puentes entre las neurociencias y la educación. Aportes, límites y caminos futuros en el campo educativo. **Psicogente**, 21(40), 476-494. doi: <https://doi.org/10.17081/psico.21.40.3087>
- Gómez Chacón, Inés. (2010). **Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático**. Madrid: Narcea, 276 pp.
- González, Fredy (1997). **Procesos Cognitivos y Metacognitivos que Activan los Estudiantes Universitarios Venezolanos cuando Resuelven Problemas Matemáticos**. Tesis (Doctorado). Programa de Doctorado en Educación. Universidad de Carabobo, Venezuela. 537 f. (Reseñada en: <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol10/3/15Gonzalez.pdf>)
- González, Fredy. (2000). **Agenda latinoamericana de investigación en educación matemática para el siglo XXI**. Educación Matemática, 12(01), pp. 107-128. <https://core.ac.uk/download/pdf/154339148.pdf>
- González, Fredy. (2010). Un modelo didáctico para la formación inicial de profesores de matemática **Sapiens. Revista Universitaria de Investigación**, vol. 11, núm. 1, enero-junio, 2010, pp. 47-59 Universidad Pedagógica Experimental Libertador Caracas, Venezuela. <https://www.redalyc.org/pdf/410/41021794004.pdf>

- González, Fredy. (2021). **AUTORIA DISTRIBUÍDA Una estrategia sustentable para la producción científica en red**. Conferencia pronunciada en la Segunda Sesión del Ciclo 2021 -Seminario organizado por los Postgrados en Educación Matemática de la Universidad de Los Lagos. Tema: Redes de Investigación en Didáctica de la Matemática; 18 de abril de 2021. Video disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=VBIJAr0S9nk&t=76s>
- Hutchins, E. (2000). **Distributed Cognition**. Documento en línea. https://arl.human.cornell.edu/linked%20docs/Hutchins_Distributed_Cognition.pdf
- Lave, J., & Wenger, E. (1991). **Situated learning: Legitimate peripheral participation**. New York: Cambridge University Press.
- Mc Clelland, D. C. Toward a theory of motive acquisition. **American Psychologist**, 1965, 20, 321-333.
- Martínez Padrón, Oswaldo Jesús. (2005). Dominio afectivo en educación matemática. **Paradigma**, 26(2), 7-34. Recuperado en 20 de abril de 2023, de http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512005000200002&lng=es&tlng=es.
- Mora Teruel, Francisco. (2018). **Neuroeducación. Sólo se puede aprender aquello que se ama**. Madrid: Alianza Editorial.
- Pacheco, P., Villagran, S. & Guzmán, C. (2015). Estudio del campo emocional en el aula y simulación de su evolución durante un proceso de enseñanza-aprendizaje para cursos de ciencias. **Estudios Pedagógicos** (Valdivia), 199–217. doi: <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052015000100012>
- Palmero, F., Gómez, C., Carpi, A., Díez, J. L., Martínez, R., & Guerrero, C. (2004). De ciertas relaciones en psicología de la motivación y la emoción. **Edupsykhé. Revista de Psicología y Educación**, 3(1). <https://doi.org/10.57087/edupsykhe.v3i1.3750>
- Rojas Martín, José Oriol (2005). **Elementos para una Psicoecología de la Acción**. Tesis (Doctorado). Departament de Psicologia de la Salut I de Psicologia Social; Universidad Autònoma de Barcelona. <https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/5440/jorm1de1.pdf>
- Sánchez-Cardona, I., & Rodríguez-Arocho, W. C. (2011). Valoración crítica a la teoría de aprendizaje situado y del concepto de comunidades de práctica desde el enfoque histórico-cultural. **Revista de Educación de Puerto Rico (REduca)**, 44(1), 113–132. Recuperado a partir de <https://revistas.upr.edu/index.php/educacion/article/view/16563>
- Triglia, Adrián (26 de agosto de 2016). Hipocampo: funciones y estructura del órgano de la memoria ¿En qué procesos mentales interviene esta zona del cerebro? **Psicología y Mente**. <https://psicologiaymente.com/neurociencias/hipocampo>
- Urpia, Maria Emília de Castro y Alves, Érica Valeria. (2022). A insubordinação criativa como possibilidade para a educação matemática de jovens e adultos. **Revista Baiana de Educação Matemática**, v. 03, n. 01, p. 01-24, e202208, jan./dez., 2022. e-ISSN 2675-5246. <https://doi.org/10.47207/rbem.v3i01.14671>.

Relación teoría-práctica en la formación de profesores de matemáticas: Tensiones y expectativas

Salvador LLINARES
Universidad de Alicante, España
sllinares@ua.es

Enseñar matemáticas como una práctica

La enseñanza de las matemáticas como una práctica que debe ser comprendida y aprendida requiere articular conocimiento, destrezas, pero también orientaciones y actitudes (Schoenfeld, 2011). Desde hace algunos años se ha introducido la idea de “prácticas profesionales relevantes” (“*core practices*” en inglés) para caracterizar las competencias docentes del profesor en general y que ha empezado a particularizarse en el caso de la práctica de enseñar matemáticas. Las prácticas profesionales relevantes forman un conglomerado de prácticas que deben ser comprendidas para aprender a tomar y justificar decisiones adecuadas en la enseñanza (Grossman, 2018). En la enseñanza de las matemáticas, algunas de estas “prácticas profesionales relevantes” que los estudiantes para profesores deben comprender y saber hacer son “mirar profesionalmente” el pensamiento matemático de los estudiantes, gestionar procesos de discusión matemática en el aula, o analizar tareas matemáticamente relevantes, y modificarlas en el caso de que fuera necesario para conseguir los objetivos de aprendizaje pretendidos, y completar secuencias de lecciones propuestas desde materiales curriculares prefijados (Dietiker et al, 2018; Jacobs & Spangler, 2017). Pero, aprender estas prácticas profesionales relevantes no es una tarea fácil y está requiriendo el diseño de nuevos recursos en la formación de profesores de matemáticas (Ivars et al, 2017) y el desarrollo nuevas formas de hacer por parte de los formadores de profesores (nuevas pedagogías) (Kazemi & Waage, 2015)

Aprendizaje profesional – Tensiones entre teoría y práctica

El contexto institucional en el que se desarrolla la práctica de formar profesores crea tensiones entre la teoría y la práctica, entre lo que hay que aprender/ conocer y lo que hay que saber hacer (Putman & Borko, 2000). Esta situación coloca el punto de atención sobre la idea de la recontextualización del saber en los programas de formación de profesores de matemáticas en los que intervienen dos contextos institucionales diferentes como son la universidad y los centros educativos.

Relación teoría práctica: La complejidad de la recontextualización

Una cuestión que centra la reflexión sobre la relación teoría práctica en la formación de profesores de matemáticas es la recontextualización de la información procedente de los cursos en el programa de formación en los centros educativos en los que los estudiantes para profesores se integran por primera vez en las situaciones de enseñar matemáticas. Los estudiantes para profesor aprenden un vocabulario y aprenden a atender aspectos de la práctica de enseñar matemáticas en las asignaturas de la universidad que forman parte del desarrollo de las competencias docentes que se recontextualiza cuando están en los centros escolares durante las prácticas de enseñanza. Desde esta perspectiva, entendemos como contextos de aprendizaje tanto las asignaturas del programa de formación de maestros en la universidad como los centros educativos donde los estudiantes para maestro realizan las prácticas de enseñanza. Para comprender el aprendizaje de los estudiantes para maestro como complementario en estos contextos asumimos perspectivas socioculturales del aprendizaje profesional que subrayan la naturaleza de las actividades sociales que los estudiantes para profesor realizan, y reconoce las diferentes formas del conocimiento necesario para aprender la práctica de enseñar matemáticas. Por tanto, se pone de manifiesto nuevas “formas de hacer” (pedagogías) en los programas de formación que tienen en cuenta cómo se desarrollan los procesos de razonamiento que deben apoyar las acciones de los profesores que configuran la práctica de enseñar matemática.

La idea de la re-contextualización de las prácticas (Ensor, 2001) intenta caracterizar la transformación de los discursos generados en un contexto social y se insertan en otro. En el caso de la formación de profesores de matemáticas, Ensor (2001) lo caracteriza como un movimiento desde el discurso sobre educación matemática generado en las asignaturas del programa de formación a los contextos escolares cuando los estudiantes para profesores de matemáticas realizan las prácticas de enseñanza y posteriormente empiezan a trabajar como docentes. Las formas del discurso cambian cuando información procedente de diferentes fuentes debe integrarse en el proceso de generación del conocimiento práctica de los profesores. De esta manera, ambos contextos de aprendizaje profesional permiten a los estudiantes

para profesor aprender a mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza de las matemáticas para poder justificar sus decisiones de acción para continuar la enseñanza.

Algunas características para definir la recontextualización

Inicialmente podemos identificar dos transiciones que caracterizan los procesos de recontextualización del discurso de los estudiantes para profesores de matemáticas: (i) la transición desde el diseño de tareas en el programa de formación a la instrumentalización del conocimiento, y (ii) desde los procesos de identificar e interpretar a la acción en la enseñanza de las matemáticas. A continuación, describimos estas dos transiciones que ayudan a definir los procesos de recontextualización a través de las características de un programa de formación de maestros de educación primaria en la Universidad de Alicante, España.

El programa de formación consta de una serie de materiales de enseñanza y los formadores desarrollan una serie de prácticas específicas (pedagogías) que permiten generar formas de hacer (Ivars et al, 2017; Moreno et al, 2021). En este caso el formador traslada el foco de atención sobre cómo articular la relación entre la teoría y la práctica a través del diseño de tareas para promover la competencia docente del maestro en la enseñanza de las matemáticas. Las tareas y los entornos de aprendizaje que se diseñan permiten crear los contextos para facilitar el desarrollo de las competencias docentes apoyando la relación teoría-práctica. La idea de “uso del conocimiento” que está detrás del significado de competencia docente es la que permite organizar el *repertorio de recursos* que articulan el programa de formación. La integración de estos recursos con formas determinadas de hacer, permite al formador de maestros definir un universo de artefactos que son instrumentalizados en la práctica (Moreno et al, 2021, Sánchez-matamoros et al, 2018). Desde este contexto, podemos identificar las dos características en el proceso de recontextualización que implica el paso desde las asignaturas del programa a los contextos de las prácticas de enseñanza en los centros educativos para los estudiantes para maestro que vamos a describir. En primer lugar, del diseño de tareas por parte del formador de maestros, a la instrumentalización del conocimiento por parte del estudiante para maestro. En segundo lugar, de la identificación de aspectos relevantes en una situación de enseñanza a las propuestas de acción. Estas dos características son transversales en los dos contextos de aprendizaje del programa de formación, las asignaturas y las prácticas de enseñanza.

- Del diseño de tareas a la instrumentalización del conocimiento

Las asignaturas de didáctica de las matemáticas del programa de formación de maestros (en la UA) tienen como objetivo apoyar a los estudiantes para maestro a desarrollar un conjunto de competencias docentes que articulan la práctica de enseñar matemáticas. En particular, el foco se sitúa en el aprendizaje de prácticas específicas profesionales vinculadas a la enseñanza de las matemáticas (Llinares, 2023). En el programa de formación, hemos empezado a identificar algunas de estas prácticas para construir ambientes de aprendizaje docente. Estos ambientes de aprendizaje se configuran considerando las relaciones entre los registros de la práctica, conocimiento específico y el foco sobre determinadas prácticas profesionales específicas. El objetivo es que los estudiantes para profesores de matemáticas aprendan a interpretar la enseñanza de las matemáticas para tomar las mejores decisiones posibles en cada momento definiendo líneas de acción.

Describimos a continuación un ejemplo de actividad que permite articular la formación de profesores de matemáticas “basada en la práctica” integrando el conocimiento necesario para enseñar matemáticas, y el desarrollo de formas de argumentar (discurso profesional) sobre y en los contextos de la práctica. El ejemplo puede considerarse una práctica relevante que tiene como objetivo que los estudiantes para maestros aprendan a reconocer aspectos claves en las situaciones de enseñanza que tiene potencial para caracterizar el aprendizaje matemático que puede estar generándose (Figura 1). La integración de información teórica (características del desarrollo del razonamiento proporcional y tipos de problemas) con información que procede del propio contexto descrito permite apoyar el desarrollo de los *procesos interpretativos* de los estudiantes para maestro para justificar líneas de acción en la enseñanza. La estructura de este tipo de actividad consta de tres dimensiones (Ivars et al 2017; Llinares et al, 2021; Moreno et al, 2021):

- a. Un registro de la práctica, que en este caso es una situación de aula en la que se describe una lección de introducción de las situaciones proporcionales y no proporcionales en educación primaria. La descripción de la situación tiene el formato describiendo como la maestra organiza la enseñanza (su metodología de trabajo en el aula), el problema que presenta en esta lección (una situación no proporcional, y las resoluciones de tres parejas de estudiantes después de estar trabajando en pequeños grupos).

enseñanza de las matemáticas e interpretarlos para justificar cómo continuar la lección (Sánchez-matamoros, et al, 2021).

- De la Identificación e Interpretación a la Acción en la enseñanza de las matemáticas

El contexto de las prácticas de enseñanza en los centros educativos coloca a los estudiantes para maestro en un nuevo contexto en el que deben recontextualizar el conocimiento y la forma de pensar sobre las situaciones. En estas nuevas situaciones, una aproximación para facilitar la transición desde los procesos de Identificar e interpretar a la toma de decisiones es hacer visibles estos diferentes procesos mediante la escritura de narrativas (Clandinin & Connelly, 2004). Las narrativas son descripciones de la situación observada (identificar e interpretar) y en algunos casos con indicación de posibles rutas alternativas de actuación (la acción) (Ivars, et al, 2017). Escribir narrativas durante los periodos de prácticas con la posibilidad de recibir retroalimentación del tutor o de sus otros compañeros, permite a los estudiantes para maestro de vincular los aspectos particulares de la situación observada a principios teóricos generales. Este proceso de mediación de la escritura permite asumir la posibilidad de un proceso de abstracción que implica la generación del conocimiento práctico personal de los profesores de matemáticas (Chapman, 2008).

Reflexiones finales: Tensiones y expectativas

Formar profesores de matemáticas se desarrolla en dos contextos diferentes como son la Universidad y los centros educativos. Esta característica genera tensiones y expectativas cuando los formadores de profesores deben gestionar la relación entre la teoría y la práctica que se genera en los procesos de aprendizaje profesional. La consideración de la práctica de enseñar matemáticas como un conglomerado de “prácticas profesionales específicas” (por ejemplo, mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, gestionar discusiones matemáticas en el aula, analizar y complementar recursos curriculares) ha permitido pensar en la articulación de los programas de formación desde estas prácticas. Esta característica de los programas de formación “basados en la práctica” ha centrado la atención en la importancia de los procesos de recontextualización del discurso profesional de los estudiantes para profesores que se generan en los diferentes contextos de aprendizaje. Comprender el papel de estos procesos de recontextualización en el aprendizaje profesional de los estudiantes para profesores de matemáticas ha generado la necesidad de proveer a los programas de formación de nuevos recursos mediante el diseño de tareas específicas, y el desarrollo de nuevas formas de hacer por parte de los formadores de profesores. Esta situación ha generado de manera adicional nuevas líneas de investigación en didáctica de las matemáticas con el objetivo de ayudarnos a comprender el aprendizaje de los estudiantes para profesores, y por tanto a fundamentar mejor nuestras decisiones como formadores de profesores.

Agradecimiento: Este trabajo forma parte del proyecto ref.: PID2020-116514GB-I00, Agencia Estatal de Investigación, Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias Bibliográficas

- Callejo, M.L., Perez-Tyteca, P.; Moreno, M., Sánchez-matamoros, G. (2022). The use of a length and measurement HLT by preservice kindergarten teachers to notice children’s mathematical thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20, 597-617.
- Chapman, O. (2008). Narratives in mathematics teacher education. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (vol 2, pp. 15-38). Taiwan/Rotterdam: Sense Publishers.
- Clandinin, D.J., & Connelly, F.M. (2004). *Narrative Inquiry: Experience and Story in Qualitative Research*. Jossey-Bass.
- Dietiker, L.; Males, L.; Amador, J., Earnest, D. (2018). Curricular Noticing: A Framework to Describe Teachers' Interactions with curricular Materials. *Journal for Research in Mathematics Education*, 49(5), 521-532
- Ensor, P. (2001). From preservice mathematics teacher education to beginning teaching. A study in recontextualizing. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(3), 296-321.
- Fernández, C., Llinares, S. & Rojas, Y. (2021). The impact of an online teacher education program on the development of prospective secondary mathematics teachers’ noticing. En K. Hollebrandas et al (eds.), *Online learning in mathematics Education*, (p. 187-206). Springer nature.

- Grossman, P. (2018). *Teaching core practices in teacher education*. Cambridge, MA: Harvard Education Press.
- Ivars, P., Fernández, C. & Llinares, S. (2020) A learning trajectory as a scaffold for preservice teachers' noticing of students' mathematical understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(3), 529-548.
- Ivars, P., Fernández, C. & Llinares, S. (2020). Uso de una trayectoria hipotética de aprendizaje para proponer actividades de instrucción. *Enseñanza de las Ciencias*, 38(3), 105-124.
- Ivars, P., Buforn, A. & Llinares, S. (2017). Diseño de tareas y desarrollo de una Mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas de estudiantes para maestro. En A. Salcedo (Comp.) *Alternativas pedagógicas para la educación matemática del siglo xxi* (65-88). Centro de Investigaciones educativas- Universidad Central de Venezuela.
- Ivars, P., & Fernández, C. (2015). Aprendiendo a mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en el contexto de las prácticas de enseñanza. El papel de las narrativas. *Ensayos*, 30, 45–54. <https://doi.org/10.18239/ensayos.v30i1.699>
- Jacobs, V. R., & Spangler, D. A. (2017). Research on core practices in K–12 mathematics teaching. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kazemi, E. & Waege, K. (2015). Learning to teach within practice-based methods courses. *Mathematics Teacher Education and Development*, 17(2), 125-145.
- Llinares, S. (2023). Formación de profesores de matemáticas “basada” en la práctica. El aprendizaje de prácticas profesionales específicas. *CIAEM-Lima2023, Conferencia paralela*
- Llinares, S.; Fernández, C. (2021). Mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas: características de una agenda de investigación en Didáctica de la Matemática. *La Gaceta de la RSME*, 24(1), 185-205.
- Llinares, S., Ivars, P., Buforn, A., & Groenwald, Cl. (2020). “Mirar profesionalmente” las situaciones de enseñanza: Una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 177-192). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.
- Moreno, M., Sánchez-matamoros, G., Callejo, M.L., Perez-Tyteca, P. & Llinares, S. (2021). How prospective kindergarten teachers develop their noticing skills: The instrumentation of a learning trajectory. *ZDM Mathematics Education*, 53, 57-72
- Morris, A. & Hiebert, J. (2009). Mathematical knowledge for teaching in Planning and Evaluating Instruction: What can Preservice Teachers Learn? *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(5), 491-529).
- Putnam, R. T., & Borko, H. (2000). What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning? *Educational Researcher*, 29, 4-15.
- Sánchez-matamoros, G., Moreno, M., Perez-Tyteca, P., Callejo, M.L. (2018). Trayectoria de aprendizaje de la longitud y medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil. *RELIME-Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21(2), 203-228
- Sánchez-matamoros, G. Moreno, M., Valls, J. (2021). Instrumental genesis of a learning trajectory: The case of Pedro's professional noticing. *Acta Scientiae (Canoas)*, 23(7), 91-119.
- Schoenfeld, A. H. (2011). Toward professional development for teachers grounded in a theory of decision making. *ZDM Mathematics education*, 43, 457–469. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0307-8>

La práctica de la Vigilancia Epistemológica en la formación del profesorado: El caso de los libros de texto y de los videos educativos

Roberto VIDAL CORTEZ
Universidad Alberto Hurtado, Chile

La formación del profesorado en los últimos años, ha generado tanto interés en el campo de la Educación Matemática en particular, que, en diversos lugares del globo, existen grupos de investigación que trabajan conjuntamente en esta línea. Estudios sobre las creencias, el pensamiento o el conocimiento del profesorado de matemática, son cada vez más abundantes. Y esto resulta bastante esperable, en una época en la cual hay se discute sobre el rol de la matemática en la formación de las personas. Una época, donde los avances tecnológicos llegan a tal extremo, que se llega a comentar si fuese posible el reemplazo de algunas profesiones, entre ellas la labor docente, dado los alcances que nos ofrece inteligencia artificial con su polémico GPT CHAT.

Nos movemos entonces, en una época, en la que el tecnicismo matemático (Gascón, 2001) se encuentra en plena agonía. El problema, sin embargo, es que dicha agonía no es reconocida aún en varias aulas, probablemente por el peso histórico que deviene a una docencia sesgada por el conductismo, con raíces absolutistas y estructuralistas del quehacer matemático. La misma enseñanza a nivel universitario, sigue en deuda al respecto, tal como golpeó el legado de la Reforma de las Matemáticas Modernas de los años de 1960, a varias generaciones de profesores en el mundo. El estilo deductivo fracasó (Kline, 1973), pero el éxito se fundamentó en la reproducción de saberes, a-históricos, despersonalizados y sin contexto. Por fortuna, los currículos en diversos países, han puesto su esfuerzo en el desarrollo de habilidades y/o competencias matemáticas, guiados por marcos teóricos referidos a la alfabetización científica, el proyecto PISA/OCDE, la influencia de los rendimientos en test internacionales de países como Singapur o Finlandia, o simplemente por la amplia literatura acerca del modelo de “Educación por Competencias”. Por ejemplo, en el caso chileno, en las Bases Curriculares vigentes de 7° básico a 2° año medio se expresa:

“Comprender las matemáticas y aplicar los conceptos y procedimientos a la resolución de problemas reales, es fundamental para los ciudadanos en el mundo moderno. Para resolver e interpretar una cantidad cada vez mayor de problemas y situaciones de la vida diaria, en contextos profesionales, personales, laborales, sociales y científicos, se requiere de un cierto nivel de comprensión de las matemáticas, de razonamiento matemático y del uso de herramientas matemáticas” (p.104).

Sin embargo, a pesar de todos estos esfuerzos, los libros de texto y los videos educativos de libre acceso en Internet, en su mayoría, siguen enfoques centrados en el paradigma que hemos descrito como agonizante.

Entramos entonces en una gran contradicción. Por una parte, la literatura, el currículo escolar y otros documentos similares, se alinean con las necesidades educativas del siglo XXI, pero la práctica docente sigue otro carril. Se exige al profesorado desarrollar su labor en un paradigma constructivista, pero tanto en su formación escolar como universitaria, esto es, lo que ha marcado su historicidad, no ha sido desarrollada de tal modo. Entonces, ¿cómo se puede exigir constructivismo, si en la formación docente y en el pasado escolar de quienes se preparan para ser profesores, los espacios de aprendizaje resultan más bien conductistas?

En buena hora, en los últimos años en Chile, los planes de estudio de las carreras que forman profesores de Matemática han comenzado a ser cada vez más poblados por cursos de didácticas específicas: del álgebra, de la geometría, etc. como también se hallan otros de corte meta-teórico, como la Historia y la Epistemología de la Matemática. Exigencias que imponen de modo implícito los Estándares Orientadores para carreras de formación de profesores, los cuales existen ya hace poco más de 10 años. En estos cursos de didáctica, como otros que se vinculan directamente con el mundo escolar, se hacen intentos de acercamientos constructivistas, en cuanto a la planificación de la clase de Matemática. Pero estos intentos, se ven amenazados por el masivo uso de las medias: libros de texto y videos educativos de libre acceso, especialmente con mayor frecuencia desde la pandemia del COVID-19.

Aquí es donde citamos el necesario *Principio de Vigilancia Epistemológica*, acuñado por Yves Chevallard en su obra *La Transposición Didáctica: del Saber Sabio al Saber Enseñado* de 1985 inicialmente, pero luego reeditada en 1991, a partir de la cual se puede interpretar que la matemática escolar no es la misma que la matemática profesional, pero que están o debieran estar, estrechamente vinculadas. Así como en el saber matemático profesional, existe una Teoría de Conjuntos, también la encontramos en el saber escolar, pero intervenida con algunas creaciones didácticas que, en oportunidades, sino se sabe de lo que se está hablando, se termina por desviar la noción matemática de origen e incluso podría llegar a mutilarla. Chevallard pone como ejemplo el caso de los diagramas de Venn que, en la matemática escolar, más que una herramienta, ha sido considerada como objeto de estudio, esto es, colocando el énfasis del estudio de los conjuntos en este tipo de representaciones. La enseñanza de los Productos Notables, tales como la “suma por su diferencia”, es otro caso del que podemos ver que su enseñanza se concentra en conocer una técnica más del álgebra elemental, pero completamente desvinculada de sentido para los estudiantes. Un cambio positivo en todo esto, es la incorporación en los libros de texto de su representación geométrica, aunque no es una práctica generalizada. La representación geométrica, aunque limitada a los números reales no negativos, permite dotar de cierto sentido a estos productos especiales. Históricamente, poco se conoce respecto de su utilidad como recurso para realizar cálculo de productos cuyos factores están por sobre y por debajo respectivamente de un mismo número, como en 52×48 , cuyo centro es 50, la técnica de la suma por su diferencia entrega un modo operativo rápido y simple, haciendo $(50+2)(50-2) = 50^2 - 2^2 = 2500 - 4 = 2496$, al menos más simple que otros algoritmos más tradicionales de lápiz y papel. Sin embargo, los cálculos con exclusivamente expresiones literales en el álgebra de la educación secundaria, suelen ser el plato fuerte de la enseñanza del álgebra, sin levantar una necesidad de por qué estudiar la “suma por su diferencia” con un sentido geométrico, histórico o de otra perspectiva.

Tal como señala Chevallard (pág. 49), se instala la duda sistemática: “¿Se trata efectivamente del objeto cuya enseñanza se proyectaba?, digamos entonces que frente a cada contenido matemático, hay que entrar en esta pregunta, pero su respuesta no siempre está a la mano, pues requiere de la conexión de estos dos mundos (la matemática escolar y la matemática profesional) lo que demanda de una muy buena relación al saber por parte de quien enseña. El libro de texto que provee actividades para los estudiantes o los videos educativos de libre acceso en Internet, como recursos propuestos, deben analizarse desde la perspectiva de la vigilancia epistemológica, una competencia profesional docente que, pensamos, requiere su lugar en la formación del profesorado de Matemática.

Otros ejemplos que encontramos en estas medias, son técnicas ampliamente conocidas como la de “pasar de un lado a otro con la operación contraria” para despejar la incógnita de una ecuación, la imposición de reglas nemotécnicas: PAPOMUDAS para la prioridad de las operaciones, una vaquita vestida de uniforme, para integración por partes de una función dada, e incluso metáforas poco adecuadas como la de los amigos y enemigos para la regla de los signos de la multiplicación de números enteros. Estas creaciones didácticas acaban por destruir el sentido de aprender matemática, pues no hacen más que contribuir al alejamiento y poco gusto por la matemática para una gran mayoría; y por otra parte, para quienes enganchan con esta perspectiva y tienen por esto un buen rendimiento en la escuela, les lleva a pensar sobre la matemática como una disciplina que para ser dominada, basta con manejar técnicas y algoritmos.

Podríamos tener muchos ejemplos más, pero para no extendernos demasiado, finalizaremos con uno referido al ámbito de la Geometría: el uso que se le da a la palabra “forma” para introducir la semejanza de figuras planas.

Hemos seleccionado algunos extractos de libros de texto de uso actual en Chile y en México, y dos videos educativos de YouTube, de los primeros lugares en ranking de visitas, para luego entrar en comentarios referidos a una necesaria vigilancia epistemológica que desarrollar, al momento de escoger y evaluar recursos para su uso en el aula escolar, como también para prevenir sobre posibles peligros o riesgos en el proceso de enseñanza – aprendizaje.

Extracto 1

Semejanza de figuras Páginas 129 a 131.

- Dos figuras son semejantes (\sim) cuando tienen la misma forma.

Matemática 1° medio, Texto del estudiante. Editorial Santillana, 2020. Pág. 139. Santiago de Chile.

Como veremos en lo sucesivo, la forma, según esta fuente, es determinante para llamar semejantes a dos figuras.

Extracto 2

La semejanza entre dos elementos se da precisamente cuando lo que varía entre ellos es su dimensión, es decir; la forma básica no cambia, solamente se altera el tamaño.

Matemáticas II. Telebachillerato Comunitario Segundo Semestre. Secretaría de educación Pública. Pág. 112. Ciudad de México, México.

Se observa un discurso más elaborado que en el extracto 1, pero haciendo intervenir, por una parte, la palabra dimensión entendida inadecuadamente, como la mantención de algo que denomina “forma básica” con modificación del tamaño. Es decir, no considera como semejantes a las figuras congruentes, dejando fuera del estudio, las figuras semejantes en razón 1:1. No se indica qué se entiende por “forma” ni por “forma Básica”.

Extracto 3

SEMEJANZA: DOS FIGURAS SON SEMEJANTES CUANDO TIENEN LA MISMA FORMA AUNQUE PUEDEN TENER DISTINTO TAMAÑO.

Video educativo: Teorema de Tales Introducción. Disponible en YouTube el 7 de abril de 2023. 2.5 millones de visitas hace 4 años.

Se enfoca, al igual que el extracto 1, en el reconocimiento de figuras semejantes por tener la misma forma. Pero tampoco se especifica qué quiere decir con “igual forma”. A diferencia del extracto 2, considera las figuras congruentes, como figuras semejantes.

Extracto 4

FIGURAS SEMEJANTES

En matemáticas cuando hablamos de semejanza nos referimos a figuras que tienen la misma forma pero diferente tamaño.

Video educativo: Figuras Semejantes Súper fácil – semejanza para principiantes. Disponible en YouTube el 7 de abril de 2023. 1.4 millones de visitas hace 4 años.

En este video educativo, se observa que entiende la semejanza de modo similar a lo planteado por el extracto 2. Las figuras congruentes en esta presentación no son figuras semejantes.

Como se puede evidenciar, las fuentes seleccionadas, construyen diferentes aproximaciones al concepto de semejanza. La vigilancia epistemológica, además de necesaria, se convierte en una competencia profesional obligatoria, de la labor ética del profesorado, en términos de la responsabilidad docente de velar por una información adecuada, que no mutile ni desvirtúe el objeto de estudio.

Discusión

En todos estos casos, se pone de manifiesto la palabra “forma” para introducir la semejanza de figuras. Uno de los usos frecuentes de esta palabra en Matemática, permite presentar un objeto nuevo mediante un tipo de representación. Por ejemplo, una ecuación polinómica es de primer grado si aquella se puede llevar a la forma $ax + b = 0$, siendo $a \neq 0$. También cuando se suele indicar que una función real de variable real f es cuadrática si es posible escribirla de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, un número racional es aquel que puede escribirse (tiene la forma) $\frac{a}{b}$ con a y b enteros, con $b \neq 0$. Sin embargo, en todos estos casos, la palabra “forma” viene a indicar una representación que no conduce a ninguna ambigüedad. En cambio, cuando se utiliza para introducir las figuras semejantes, aparecen, como hemos visto, imprecisiones.

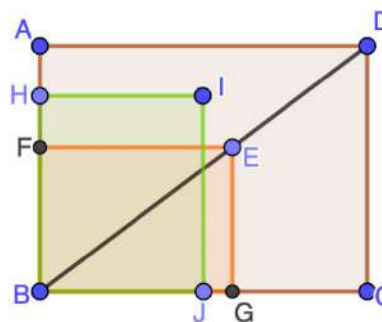
Planteando el problema desde cómo lo ve un estudiante, encontramos que, en los primeros años de escolaridad, se introducen las llamadas “formas geométricas”: cuadrado, círculo, triángulo, rectángulo, en el caso del plano; cubo, pirámide, cilindro, esfera, en el caso del espacio. Se aprende que los barquillos de helado tienen forma de cono, los tarros de café tienen forma de cilindro, una caja de fósforos tiene forma de paralelepípedo, la hoja de un cuaderno es de forma rectangular. No hay en ese entonces, problema de ambigüedad. Sin embargo, es una acepción de la palabra *forma*, que puede producir un error conceptual, como veremos.

En efecto, si se considera la idea de que las figuras semejantes son aquellas de *igual forma*, entonces con justa razón cualquier estudiante podría pensar que todos los rectángulos lo son. Lo mismo para la forma triangular. Para la forma cuadrada, de modo particular, si resulta correcta esta acepción, es decir que es cierto que todos los cuadrados son semejantes, pero este es un caso puntual, debido a ser un polígono regular.

Pongamos el caso de los rectángulos. Para que estos sean semejantes, no basta con entender que todos los rectángulos tienen la misma forma: por cierto, la rectangular. Hay algo más que decir y precisar.

Para que dos rectángulos sean semejantes, la caracterización matemática nos enseña que los lados de uno de los rectángulos deben estar en correspondencia uno a uno con los lados del otro rectángulo, de modo que la razón entre dos lados correspondientes ha de ser constante, lo que conduce a decir “brevemente” que los lados de un rectángulo respecto a los del otro, son proporcionales. Y con respecto a los ángulos en correspondencia, han de ser congruentes.

Por ejemplo, los rectángulos BCDA y BGEF son semejantes, dado que pueden ser dispuestos en posición de Thales, mediante alguna transformación geométrica, sin embargo, el se puede probar que rectángulo BJIH no es semejante a ninguno de los anteriores, sea con el recurso de Thales señalado, o bien con otras herramientas.



Por tanto, ¿Se puede afirmar que todos los rectángulos son semejantes? Si por tener la misma forma, se entiende tener la forma rectangular para este caso, ya comprenderá que, si bien es una condición necesaria, no resulta suficiente para introducir las figuras semejantes.

Por el contrario, la palabra forma, toma sentido cuando se ha probado que dos figuras son semejantes. Entonces, se puede decir dado esto, que tienen *la misma forma*.

Matemáticamente, la forma, se puede considerar un invariante cuando se aplica una transformación o un grupo de transformaciones de semejanza, lo que caracteriza según Felix Klein y su nueva conceptualización de lo que es la Geometría para el siglo XX en adelante, a la geometría afín (Luna&Álvarez, 2005). Desde esta perspectiva, una semejanza es una transformación geométrica del plano (o del espacio) en sí mismo que a cada punto le asocia otro, mediante una composición de homotecias e isometrías. Estos tipos de

transformaciones tienen en su recorrido, figuras de las cuales se puede decir que guardan la misma forma que sus pre-imágenes. Otro motivo para afirmar que la palabra forma es consecuencia de la semejanza y no su generadora.

Referencias Bibliográficas

Chevallard. (2005). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado* (3a. ed. / 2a. reimpr.). Aique.

Josep Gascón. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 4(2), 129–159.

Kline. (1976). *El fracaso de la matemática moderna: ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* (Catorceava edición). Siglo veintiuno.

Luna, Joaquín; Álvarez, Yolima (2005). Félix Klein y el estudio de la geometría. En Luque, Carlos Julio (Ed.), *Memorias XV Encuentro de Geometría y III de Aritmética* (pp. 265-277). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

MINEDUC (2016). *Bases Curriculares. 7° básico a 2° año medio*.

Buscando generar ambientes para desarrollar experiencias de aprendizaje: una invitación a repensar el aula universitaria

Adriana ENGLER

Universidad Nacional del Litoral, Argentina

aengler@fca.unl.edu.ar

Resumen

La sociedad actual plantea numerosos retos a la educación. Los cambios en las formas de acceder al conocimiento requieren cambios en el aula. La universidad, en su interacción con la sociedad, debe formar personas con competencias para identificar, interpretar, modelar y resolver las situaciones que se les presentan. Resulta necesario entonces, preparar a los alumnos para resolver problemas y tratar la información que reciben del medio, de manera que sean capaces de reconocer las estrategias para su solución y favorecer un mejor entendimiento e interpretación de la realidad. En este contexto, nuestros estudiantes merecen y necesitan la mejor formación matemática posible. Aprender matemática no se limita a una adquisición de conocimientos desde una perspectiva fundamentalmente formal y teórica ni a la repetición memorística de algoritmos y resultados, sino que es consecuencia de construcciones sucesivas, que posibiliten, por un lado, el conocimiento de definiciones, teoremas y propiedades, y, por otro, el uso de las mismas para enfrentar problemas y nuevas situaciones. Las teorías que estudian los fenómenos educativos en el contexto actual, resaltan la importancia del aprendizaje como proceso social.

El propósito de esta propuesta es invitarlos a repensar el aula universitaria entendiendo la importancia de la generación de ambientes para el desarrollo de experiencias de aprendizaje que faciliten la adquisición y construcción de conocimiento matemático de manera flexible y autónoma reconociendo que es necesario dar mayor protagonismo y participación al estudiante. Hay bastante para reflexionar, pensar y trabajar.

Palabras clave: Ambientes de Aprendizaje. Experiencias de Aprendizaje. Aula Universitaria.

Introducción

La sociedad actual plantea numerosos retos a la educación. Los cambios en las formas de acceder al conocimiento requieren cambios en el aula. La formación de un profesional de perfil amplio exige que el egresado universitario domine las bases de los conocimientos científicos y haya adquirido competencias que le permitan incrementar y renovar permanentemente su bagaje científico y profesional. La universidad, en su interacción con la sociedad, debe formar personas con competencias para identificar, interpretar, modelar y resolver las situaciones que se les presentan. Es necesario preparar a los alumnos para resolver problemas y tratar la información que reciben del medio, de manera que sean capaces de reconocer las estrategias para su solución y favorecer un mejor entendimiento e interpretación de la realidad.

En este contexto, nuestros estudiantes merecen y necesitan la mejor formación matemática posible. Debemos poner énfasis en el desarrollo del pensamiento matemático a partir de situaciones problemáticas significativas.

Las teorías que estudian los fenómenos educativos en el contexto actual, resaltan la importancia del aprendizaje como proceso social. Según Cantoral, Reyes y Montiel (2014, p. 93):

...el aprendizaje es un proceso complejo de significación compartida que ocurre en contextos específicos y es por tanto un proceso situado en el juego de prácticas socialmente compartidas en el mundo de las experiencias del aprendiz, dentro y fuera del aula y a lo largo de todas las actividades de su vida diaria.

Se debe dar al alumno la responsabilidad de su propio proceso de aprendizaje. Al respecto, Cantoral (2013) expresa:

En la actualidad, se propone, como una forma de aprender significativamente, que el alumno reconstruya los conceptos. Que el aprendizaje se base en la actividad creadora y en el descubrimiento de las nociones por parte del alumno, que sea él quien descubra y proponga formas de resolver los problemas. (p. 15)

Es importante reconocer que: “La responsabilidad del diseño curricular es del profesor...pero en el desarrollo curricular deben cooperar los estudiantes... La responsabilidad de la organización o transformación del conocimiento es compartida...La interacción estudiante-profesor es bidireccional para negociar significados” (Gargallo, Morera y García, 2015, p. 902).

La construcción de nuevos conocimientos exige la participación activa de las personas. Sancho y Borges (2011) señalan: “aprendemos cuando «construimos» nuestro conocimiento, encajando en nuestra visión del mundo y nuestra experiencia lo que ya sabíamos y lo que es nuevo, y que no aprendemos aisladamente, sino dentro de relaciones sociales y de comunicación” (p. 43).

Ahora, si bien todo aprendizaje parte de una construcción social, es una construcción individual:

El aprendizaje es un proceso personal, nadie aprende por otro; es una construcción propia que se va integrando e incorporando a la vida del sujeto en un proceso cíclico y dinámico, que -a su vez- involucra un cambio relativamente permanente en la capacidad de las personas, su disposición o su conducta. (Crispín, Esquivel, Loyola y Fregoso; 2011; p.12).

Gros (2018) expresa que el éxito del aprendizaje depende, en gran medida, de la capacidad del estudiante para dirigir y gestionar su propio proceso de aprendizaje, estableciendo sus propios objetivos y las estrategias adecuadas para alcanzarlos. En un modelo educativo centrado en el estudiante, el eje de los procesos de enseñanza y de aprendizaje se desplaza del profesor al alumno. Se combina el aprendizaje individual con el trabajo en grupo. La exposición del profesor se reemplaza por la exploración del estudiante. Se incorporan procesos didácticos que potencian estos desarrollos, enriquecidos en gran medida por los beneficios de la utilización de recursos tecnológicos. Esto exige a los docentes replantearnos nuestros modelos de formación y de desarrollo profesional. Necesitamos asumir un nuevo rol propiciando espacios donde se oriente y acompañe al estudiante, generando las condiciones para que, de manera activa y experimental, construya su propio conocimiento.

Los docentes tenemos que relacionar la matemática que enseñamos con el cotidiano del alumno. Poner en juego el binomio conocimiento-realidad. Buscar usos de la matemática que sirvan de herramienta para convertirla en una matemática funcional. El uso que se espera de lo aprendido es para la vida y para interpretar la realidad en que se vive. Desde hace tiempo se entiende que el interés y los logros mejoran de manera significativa si:

se ayuda a los alumnos a hacer las conexiones entre la información y conocimiento nuevos y las experiencias y conocimientos previos. El interés y la participación de los alumnos en su trabajo escolar aumenta significativamente cuando ellos “ven” el por qué están aprendiendo esos conceptos y cómo se pueden usar los mismos para resolver problemas que trascienden el ámbito del aula. (CORD, 2003, p. viii)

Así es que debemos replantear qué enseñamos y la manera en que enseñamos. Somos, a la par de las instituciones, responsables directos de mejorar nuestras prácticas a fin de dar respuestas claras a los desafíos actuales y cambiantes de la sociedad. Hace casi veinte años, Moreno (2006, p. 101) afirmaba:

Los cambios que se están produciendo en la sociedad inciden en la demanda de una redefinición del trabajo del profesor y seguramente de la profesión docente, de su formación y de su desarrollo profesional. Los papeles que tradicionalmente han asumido los docentes enseñando de manera conservadora un currículo caracterizado por contenidos académicos hoy en día resultan, a todas luces, inadecuados. A los alumnos les llega la información por múltiples vías (televisión, radio, internet) y los profesores no pueden hacer como si nada de eso tuviera que ver con ellos.

Esto es primordial considerarlo al analizar nuestras prácticas en el aula. La responsabilidad de la organización o transformación del conocimiento es compartida. La interacción estudiante-profesor, estudiante-estudiante facilita la construcción conjunta del conocimiento.

Teniendo en cuenta todo lo expresado, los docentes estamos obligados a propiciar las condiciones que puedan hacer del aula de matemática un ambiente en el que los estudiantes participen activamente. Debemos generar las condiciones para que desarrollen experiencias de aprendizaje y se fomenten procesos de exploración e indagación a través de estrategias de enseñanza que favorezcan la construcción de conocimiento y el desarrollo del pensamiento matemático teniendo en cuenta la problematización de los saberes y las formas de ponerlo en uso. Es imprescindible posibilitar procesos de reflexión que permitan dar sentido y significado a la actividad matemática. Se plantea la necesidad de generar de forma sistémica y organizada ambientes de aprendizaje en los que los estudiantes participen de manera activa.

Los ambientes de aprendizaje

En nuestra tarea diaria como docentes es necesario analizar y dar respuesta a preguntas como: ¿Qué objetivos perseguimos en esta clase? ¿Qué contenidos vamos a desarrollar? ¿Cómo debemos adaptar los contenidos al aula? ¿Qué estrategias utilizamos? ¿Qué tareas de aprendizaje proponemos a nuestros estudiantes? ¿Con qué recursos contamos? Planificamos desde los contenidos hasta las formas de intervenir en el aula.

De la misma manera, al finalizar la clase, debemos reflexionar sobre los resultados, analizar hasta dónde fue posible cumplir con los objetivos, qué aprendizajes se lograron a través de las tareas planteadas, cómo resolvieron las actividades y qué conclusiones obtuvimos en relación a lo planificado.

Así, continuamente diseñamos y desarrollamos ambientes de aprendizaje. Si bien existen diversas concepciones sobre ambientes de aprendizaje, es importante comprender que trascienden totalmente la noción de espacio físico, concibiéndose como entornos de desarrollo humano, teniendo en cuenta especialmente las relaciones humanas entre todos los actores que participan.

Los ambientes de aprendizaje son escenarios construidos para favorecer de manera intencionada las experiencias de aprendizaje. Todo ambiente de aprendizaje tiene una intención formativa, orientándose a la construcción y apropiación de saberes que permitan el desarrollo de competencias, es decir que puedan ser utilizados por los individuos en las distintas situaciones que se le presenten en su vida cotidiana y en su trabajo profesional. En el portal educativo “Colombia aprende”, definen:

Un ambiente de aprendizaje es un espacio en el que los estudiantes interactúan, bajo condiciones y circunstancias físicas, humanas, sociales y culturales propicias, para generar experiencias de aprendizaje significativo y con sentido. Dichas experiencias son el resultado de actividades y dinámicas propuestas, acompañadas y orientadas por un docente. (Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia, s.f.)

También, en este contexto es importante establecer claramente qué se entiende por experiencia de aprendizaje. Según un informe del Ministerio de Educación de Perú (2021),

.. es una oportunidad que se ofrece a los alumnos para que tengan una vivencia compartida que los lleve a descubrir, conocer, crear, desarrollar destrezas y habilidades. Su principal característica es que el actor central es el alumno, ocupando un papel protagónico en el proceso de aprendizaje pensando, sintiendo y actuando para resolver problemas y enfrentando desafíos que la experiencia de aprendizaje plantea. (pp. 2-3)

En el documento se aclara también que “En una experiencia de aprendizaje el o la docente guía los procesos, su principal misión es mediar los aprendizajes y crear ambientes enriquecidos, es decir, escenarios de aprendizaje que sean significativos”. (p. 4)

Según lo considerado, es importante destacar que se modifica la relación entre el docente y los alumnos. El alumno se vuelve responsable de sus procesos de aprendizaje. El docente deja de ser la única fuente de conocimiento, estimula y desafía al alumno, favorece la interacción con él y con sus pares.

Herrera (2006) distingue cuatro elementos esenciales en un ambiente de aprendizaje:

- Un proceso de interacción o comunicación entre sujetos. La interacción puede ser de manera oral o escrita y, lo que es más importante, en diferentes direcciones entre los distintos actores, a manera de diálogo.
- Un grupo de herramientas o medios de interacción. Los recursos van desde los impresos (apuntes, libros) hasta los digitalizados (textos, imágenes, material multimedia). También se cuenta con el apoyo de otros medios provenientes de bibliotecas físicas y virtuales, hemerotecas, sitios web, etc.
- Una serie de acciones reguladas relativas a ciertos contenidos.
- Un entorno o espacio en donde se llevan a cabo dichas actividades. Diversos factores como iluminación, ventilación, mobiliario, acceso a computadoras y a internet, son fundamentales al planificar ambientes de aprendizaje y es necesario monitorear los recursos de la institución y de los estudiantes.

Un ambiente de aprendizaje constituye un entorno en el que interactúan personas con propósitos educativos.

Diseño e implementación de ambientes de aprendizaje

Entendiendo los ambientes de aprendizaje como escenarios contruidos para favorecer de manera intencionada las situaciones de aprendizaje, su diseño requiere, en primer lugar, de la identificación de ciertos aspectos prioritarios:

- Los conocimientos, capacidades, habilidades y actitudes que forman parte de los aprendizajes esenciales que deberían ser comunes a toda la población, de manera de posibilitar el progreso de las personas y la disminución de las brechas sociales, culturales y económicas.
- Las necesidades, expectativas y demandas de los estudiantes, según el nivel escolar y el contexto donde se desarrolla el ambiente.
- Las formas más eficientes en las que aprendemos y los ritmos de los procesos individuales de aprendizaje. El impacto de la implementación de los ambientes de aprendizaje debe ser tal que aliente a los estudiantes a seguir estudiando, mostrando el aprendizaje como un proceso necesario y constante a lo largo de la vida.
- Las estrategias didácticas que garanticen los aprendizajes propuestos en el ambiente, buscando que sean aprendizajes significativos y duraderos en el tiempo.
- Los ambientes de aprendizaje deben favorecer el desarrollo emocional de las personas, mediados por relaciones que vinculen de manera positiva a todos los participantes. El carácter amable y afectivo de las interacciones potencia ampliamente los aprendizajes.

Como todo proceso pedagógico, los ambientes de aprendizaje, tienen una estructura que responde a ciertas preguntas básicas:

- ¿Para qué aprender? Son los propósitos del ambiente, enunciados formativos que orientan el aprendizaje.
- ¿Qué aprender? Conocimientos, habilidades y actitudes que se pretenden desarrollar o potenciar.
- ¿Cómo valorar el aprendizaje? Es la etapa de evaluación, entendida como un proceso formativo, integral, de seguimiento y retroalimentación del avance de los estudiantes.

Teniendo en cuenta que el único principio organizador de un ambiente de aprendizaje es el aprendizaje, solo después de haber respondido a estas preguntas básicas, que son las bases pedagógicas para que el aprendizaje ocurra, el docente debe preocuparse por las cuestiones didácticas que permiten que el aprendizaje se logre de la manera más apropiada posible:

- ¿Cómo secuenciar los aprendizajes? Teniendo en cuenta el tiempo disponible, ¿de qué manera y en qué orden se encadenan los aprendizajes?
- ¿Qué estrategias didácticas utilizar para propiciar el aprendizaje? Estas estrategias deben ser coherentes con el enfoque pedagógico de la institución y con las estrategias planteadas para el nivel, debiendo buscar las formas de presentar los contenidos de manera de contextualizar el aprendizaje, explorando las concepciones previas de los estudiantes, partiendo de sus intereses y necesidades.
- ¿Qué recursos utilizar para propiciar los aprendizajes? Se refiere tanto a los espacios como a los materiales para el aprendizaje.

De esta manera, son los propósitos, el aprendizaje y la evaluación los que determinan el orden, el tiempo, el espacio, las interacciones y los recursos, no al revés.

Teniendo en cuenta su intención formativa (Secretaría de Educación de Colombia, 2012), el diseño e implementación de ambientes de aprendizaje debe reflejar una estructura acorde a cualquier proceso pedagógico, contemplando distintos momentos:

- Motivación y contextualización del aprendizaje: Implica responder a las preguntas por qué y para qué los estudiantes deben aprender lo que se les propone. Es el punto de partida que permite predisponer a participar.
- Exploración de conocimientos previos: Se indaga sobre los conocimientos y habilidades que tiene el estudiante, relacionados a los aprendizajes que se proponen.

- Objetivos de aprendizaje: ¿Cuál es la intencionalidad didáctica del ambiente que se plantea? ¿Qué se quiere enseñar y para qué va a utilizar los conocimientos involucrados en su vida cotidiana y en su carrera?
- Planteo de estrategias de evaluación: Se definen criterios que orienten la evaluación de todo el proceso. Deben permitir no solo evaluar a los estudiantes, sino monitorear su desarrollo y analizar si va cumpliendo con los objetivos
- Desarrollo del aprendizaje: Se ponen en juego distintas estrategias didácticas, procedimientos, técnicas, recursos y procesos de interacción, que permitan propiciar las condiciones para que se desarrollen los aprendizajes.
- Consolidación y análisis del avance del proceso: ¿Qué conclusiones se obtienen sobre el trabajo de los estudiantes? ¿Cómo retroalimentar el proceso para que todos los estudiantes alcancen los objetivos planteados?
- Evaluación: Implica identificar y recoger evidencias que muestren el progreso de los alumnos respecto a los aprendizajes propuestos. ¿Qué acciones complementarias se pueden proponer para que el estudiante aplique los nuevos aprendizajes en su vida cotidiana o su carrera?

Roles en los ambientes de aprendizaje

La incorporación de nuevos ambientes de aprendizaje solo tiene sentido si se tienen en cuenta los cambios que afectan a todos los componentes del proceso educativo, desde los objetivos y los contenidos, hasta los alumnos y los docentes. La combinación de espacios físicos y virtuales, la introducción de las tecnologías a los escenarios para el aprendizaje, las posibilidades de acceso a materiales en cualquier momento y desde cualquier lugar, han modificado sustancialmente el sentido y la forma de acceder y producir conocimiento, exigiendo cambios que se manifiestan en nuevos roles tanto para el docente y como para el alumno.

Un proceso en el que el énfasis se traslada de la enseñanza al aprendizaje, se caracteriza por una nueva relación con el saber, por nuevas prácticas de aprendizaje, adaptables a situaciones educativas en constante cambio.

Esto requiere alumnos participantes activos y comprometidos en su proceso de formación. Es importante buscar la manera para que los estudiantes se interesen en desarrollar aprendizajes, convirtiéndose en sujetos activos y constructores de aprendizaje. Desde esta perspectiva es necesario promover:

- Posibilidad de acceso a diversos recursos de aprendizaje y desarrollo de destrezas para su utilización. El estudiante debe poder manipular activamente la información, organizarla y elaborar respuestas a situaciones que impliquen un nivel cognitivo de elaboración más complejo que la simple presentación de respuestas que encuentre en los materiales dados.
- Participación en experiencias de aprendizaje individuales que se adapten a las necesidades específicas de cada alumno, basadas en sus habilidades, conocimientos, intereses y objetivos.
- Experiencias de aprendizaje colaborativo para que el trabajo con otros favorezca el desarrollo individual.

De los estudiantes que participan en un ambiente se espera que desarrollen, al menos, las siguientes características:

- Actitud favorable para interactuar con el ambiente.
- Disposición para aprender, para hacer y participar.
- Voluntad para trabajar en equipo, tanto con sus pares como con sus docentes.
- Pensamiento reflexivo y crítico que le permite aportar constructivamente a las tareas propuestas.
- Capacidad para establecer y respetar acuerdos, para resolver pacíficamente los conflictos que se presenten.

El aprendizaje centrado en el alumno requiere tanto de las habilidades del alumno, como de las competencias del docente, quien deberá, entre otras cosas:

- Organizar y llevar a la práctica situaciones de aprendizaje.
- Propiciar el aprendizaje autónomo.
- Acompañar al alumno en el progreso de sus aprendizajes.
- Trabajar de forma colaborativa y cooperativa.
- Capacitarse permanentemente.

Es necesario que, tanto docentes como alumnos, encuentren formas de comunicación amplias, abiertas y flexibles. Que todos puedan expresar sus ideas y opiniones, que se propicie el diálogo y se fomenten espacios para debatir las diferencias por medio de la argumentación. “Un ambiente de aprendizaje puede ser un aula, un laboratorio, un lugar de trabajo o un campo sembrado” (CORD, 2003, p.1). Lo importante es que en, dichos ambientes, los alumnos “descubren relaciones significativas entre ideas abstractas y aplicaciones prácticas en el contexto del mundo real y dichos conceptos son internalizados a través del proceso de descubrir, reforzar e interrelacionar” (CORD, 2003, p.1).

Las estrategias didácticas de un ambiente de aprendizaje

Pensar en las estrategias didácticas de un ambiente implica reflexionar sobre qué tareas presentar a nuestros estudiantes para propiciar los aprendizajes. Las estrategias están relacionadas al tipo de actividades que buscan alcanzar los objetivos propuestos, de manera que permitan contextualizar el aprendizaje, motivar al estudiante, explorar sus concepciones previas, desarrollar los aprendizajes, proyectarlos a la vida cotidiana, entre otras expectativas de logro.

El desarrollo de aprendizajes se concretará por medio de acciones de diferente tipo. Las metodologías que se utilizan para presentar los aprendizajes y orientar al estudiante en su proceso tienen una repercusión importante. El docente que diseña ambientes de aprendizaje debe pensar en variadas estrategias didácticas, cuya puesta en práctica permita aumentar las posibilidades de lograr aprendizajes significativos y permanentes en el tiempo.

La decisión por las metodologías a implementar, debe seguir como principio los tres pilares pedagógicos de un ambiente: objetivos, aprendizajes y evaluación. Las estrategias deben elegirse porque resultan las más apropiadas para que nuestro grupo de estudiantes, teniendo en cuenta su nivel, ciclo y caracterización, su contexto y sus características particulares, alcancen los propósitos y aprendizajes requeridos. Además, las estrategias didácticas seleccionadas deben ser coherentes con las estrategias de evaluación, pues se pretende que el modo en que se enseña y aprenda sea el mismo en que se evalúa, permitiendo al estudiante retroalimentar su proceso de aprendizaje, con sentido y significado.

Existe una gran variedad de actividades que pueden seleccionarse como estrategias para alcanzar los aprendizajes deseados según los objetivos propuestos y los distintos momentos del proceso pedagógico, manteniendo siempre una coherencia con la estrategia de evaluación. Tomando como base la clasificación presentada en el documento Ambientes de aprendizaje para el desarrollo Humano. Reorganización Curricular por Ciclos. Volumen 3 (Secretaría de Educación de Colombia, s.f.), podemos distinguir actividades según su intención:

- **Motivación:** permiten al estudiante contextualizar el aprendizaje e involucrarlos en el ambiente. Buscan que el alumno entienda por qué se debe aprender lo que se le propone, para qué le sirve.
- **Exploración:** tienen por objetivo indagar los conocimientos de los estudiantes sobre un tema determinado.
- **Descubrimiento:** abarcan los distintos tipos de actividades que permiten iniciar el estudio de los nuevos conceptos y sus relaciones. Williner (2018) manifiesta que estas actividades se organizan pensando en el proceso de aprendizaje como proceso de construcción de conocimiento.
- **Interacción guiada:** intentan poner al estudiante en trabajos colaborativos, a partir de orientaciones y lineamientos de interacción que favorezcan el desarrollo de diversas habilidades de los estudiantes, además de poner en práctica el control emocional y sus habilidades para trabajar en equipo.
- **Desarrollo y potenciación del aprendizaje:** permiten alcanzar los aprendizajes a partir de la interacción con su docente, sus compañeros y los recursos de aprendizaje elegidos.
- **Experienciales:** tienen un fuerte potencial para dar significado a los conocimientos, pues ponen a los estudiantes en contacto directo con una realidad que están en proceso de conocer. Permiten, además, asumir roles activos a partir de situaciones sencillas y controlables.
- **Ejemplificación y aplicación:** son importantes para el desarrollo de habilidades en la medida en que el docente muestre el uso de los aprendizajes. Para lograr que el alumno cree matemática, es fundamental que, en primera instancia, pueda comunicar una destreza.
- **Ejecución, potenciación y apropiación:** abren la posibilidad para que el estudiante ponga en práctica el aprendizaje y lo haga propio, innovando y creando.

Esta clasificación resulta útil como orientación en la selección y diseño de las estrategias didácticas en un ambiente de aprendizaje. Es muy importante que contemplemos distintos tipos de actividades, de manera de satisfacer las diferentes necesidades de aprendizaje (ya sean cognitivas como socioafectivas o físicas) y demos la posibilidad de que nuestros estudiantes asuman roles activos y protagónicos.

Recursos de aprendizaje

En matemática, los recursos que van desde los materiales concretos hasta los audiovisuales o digitales, permiten representaciones y modelizaciones de los conceptos, convirtiéndose en mediadores eficaces para su

comprensión. La utilización de recursos en el ambiente de aprendizaje deber considerarse de acuerdo a las experiencias, reflexiones y conocimientos que se desean generar. Las tareas que plantee el docente para guiar su manipulación, los problemas que se derivan de las acciones sobre el recurso, las reflexiones que se generen con esas tareas van a influir de manera notable en la construcción de significados y en la calidad del conocimiento que se construya.

Un buen recurso didáctico debe ser capaz de generar situaciones atractivas para los estudiantes, que favorezcan la apreciación del significado de sus propias acciones, mejorando su actitud hacia el aprendizaje de la matemática, desarrollando su creatividad para la resolución de problemas a partir de la utilización de diferentes estrategias. Un mismo recurso puede ofrecernos diversas posibilidades de uso. Lo importante es que sea capaz de adaptarse a las necesidades y posibilidades de cada alumno.

Los recursos dependen de la creatividad, disposición del docente y las posibilidades que brinda el contexto. La disponibilidad y uso de diferentes recursos es un factor muy importante para la transformación de los procesos de aprendizaje, que no siempre tenemos en cuenta, ya sea porque no son proporcionados por la institución en la que trabajamos o porque no disponemos de tiempo para su preparación. Los espacios físicos donde se desarrollan los ambientes, son también recursos: el patio de la escuela, un parque, un museo, los laboratorios, el gabinete de informática.

Pero es importante tener en cuenta que su utilización no garantiza por si solo el logro de aprendizajes. Además de la elección y preparación de los recursos por su pertinencia pedagógica o su fácil manipulación, es fundamental la planificación de las tareas que el docente proponga a partir del recurso para el desarrollo de los aprendizajes.

La inclusión de recursos didácticos en los ambientes de aprendizaje persigue como propósito:

- Permitir a los docentes organizar los contenidos de manera de facilitar su comprensión por parte de los estudiantes.
- Brindar a los estudiantes herramientas que faciliten y orienten su proceso de aprendizaje.
- Aumentar el interés por el contenido y motivación por aprender por parte de los estudiantes.
- Fomentar las actividades cooperativas y el trabajo en equipos.
- Hacer posible el desarrollo de distintas habilidades de los estudiantes.
- Permitir a los docentes realizar un diagnóstico en cada momento sobre el aprendizaje de los estudiantes.
- Favorecer la comunicación entre el docente y sus alumnos.
- Ampliar el campo de experiencias de los alumnos.

A modo de reflexión

Considerando todo lo expresado, como responsables directos de la formación de nuestros alumnos universitarios - futuros profesionales - y *buscando generar ambientes para desarrollar experiencias de aprendizaje* debemos, entre otras cosas:

- Admitir que nos necesarios cambios en nuestra práctica cotidiana en el aula.
- Generar y ser partícipes de esos cambios.
- Proponer alternativas de trabajo en el aula, aunque nos parezcan *insignificantes*.
- Lograr desprendernos de la organización de los contenidos indicados en los programas donde se nota, en muchos casos, una influencia notable de la estructura formal.
- Poner en un primer plano los aspectos conceptuales por sobre el aprendizaje de reglas.
- Realizar acciones tendientes a que los estudiantes se pongan en camino hacia la construcción de conocimientos en forma progresiva y su contacto con los mismos sea cada vez más profundo de forma que el desarrollo de sus capacidades permita utilizar técnicas cada vez más adecuadas y poderosas.
- Generar propuestas en las que se desarrolle un uso inteligente de los medios que nos brinda la tecnología.
- Ofrecer al alumnado actividades para su formación que incidan en el desarrollo de capacidades que le ayudarán no sólo en sus estudios de matemática.
- Pensar en actividades, estrategias y tareas matemáticas que, siendo motivadoras para el alumno, actúen como dinamizadoras de los aprendizajes.
- Reconocer y aceptar los tiempos que nos tocan vivir.
- Realizar un profundo debate y discusión en relación a los contenidos matemáticos en la carrera universitaria y particularmente en la institución en la que nos desempeñamos.
- Analizar profundamente los posibles cambios en la metodología en relación con los recursos disponibles.
- Renovar nuestras prácticas.

- Dar sentido a nuestras acciones en el contexto institucional.
- Involucrar a los alumnos en su aprendizaje mediante actividades de descubrimiento, investigación y análisis.
- Incentivar a los alumnos a reflexionar sobre su propio aprendizaje.
- Escuchar a los estudiantes.
- Convencerlos de que pueden desarrollar procesos de pensamiento matemático.
- Prepararnos para atender *las particularidades* del grupo con el que estamos trabajando.
- Tener la capacidad de crear condiciones de trabajo adecuadas en el aula favoreciendo el intercambio, el trabajo colaborativo, el respeto por la opinión del otro, la tolerancia y la participación de todos.
- Negociar ambientes de trabajo.
- Motivar a los alumnos a la búsqueda de sus propias estrategias de solución para resolver las actividades.
- Propiciar el aprendizaje activo en el aula y fuera de ella.
- Alentar la discusión de estrategias y soluciones favoreciendo el trabajo en grupo.
- Generar espacios para la defensa de ideas.

Las decisiones que tomemos los profesores tienen consecuencias importantes para los estudiantes, para la institución en la que nos desempeñamos y para la sociedad. Estas decisiones requieren de una firme convicción y de un fuerte compromiso de poder llevarlas adelante.

Es absolutamente necesario que, como docentes innovadores, creativos y dinamizadores de la enseñanza:

- Repensemos el aula matemática universitaria acompañados por nuestros colegas y por nuestra institución.
- Actuemos como profesionales de la educación, buscando que nuestra tarea se valore compartiendo nuestras preocupaciones, pero también nuestros logros.

Referencias Bibliográficas

- Cantoral, R. (2013). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. México: Secretaría de Educación Pública. Recuperado el 03 de junio de 2015 de http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/6586/1/images/desarrollo_del_pensamiento_y_leng_v_smc_baja.pdf
- Cantoral, R.; Reyes, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91-116. Recuperado el 10 de febrero de 2016 de <https://www.redalyc.org/pdf/2740/274032530006.pdf>
- CORD (2003). *Enseñanza contextual de la matemática. Piedra angular del cambio de paradigmas*. Estados Unidos de América: CORD communications. Recuperado el 10 de abril de 2018 de <http://blogs.unellez.edu.ve/jesusoliviar/files/2016/12/Ensenanza-Contextual-de-Matematica.pdf>
- Crispín, M.; Esquivel, M.; Loyola, M. y Fregoso, A. (2011) ¿Qué es el aprendizaje y cómo aprendemos? En M. Crispín (Comp.). *Aprendizaje autónomo: orientaciones para la docencia* (pp. 10-28). México D.F.: Universidad Iberoamericana, AC.
- Gargallo, B.; Morera, I. y García, E. (2015). Metodología innovadora en la universidad. Sus efectos sobre los procesos de aprendizaje de los estudiantes universitarios. *Anales de Psicología* 31(3), 901-915.
- Gros, B. (2018). La evolución del e-learning: del aula virtual a la red. *RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 21(2), 69-82.
- Herrera, M. (2006). Consideraciones para el diseño didáctico de ambientes virtuales de aprendizaje: una propuesta basada en las funciones cognitivas del aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación*, 38(5), 1-19. Recuperado el 2 de marzo de 2022 de <http://rieoei.org/deloslectores/1326Herrera.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (s.f.). *Ambientes de aprendizaje. Desarrollo de competencias matemáticas*. Portal educativo "Colombia Aprende". Recuperado el 8 de junio de 2016 de <http://www.colombiaprende.edu.co/html/productos/1685/w3-article-288989.html>
- Secretaría de Educación de Colombia (s.f.). *Ambientes de aprendizaje para el desarrollo Humano Reorganización Curricular por Ciclos*. Volumen 3. Cartilla herramienta de consulta y orientación para el diseño e implementación de los ambientes de aprendizaje. Segunda edición.
- Secretaría de Educación de Colombia. (2012). *Los ambientes de aprendizaje. Reorganización curricular por ciclos. Volumen 1*. Bogotá humana: Colombia. Recuperado el 10 de mayo de 2021 de <https://repositorios.educacionbogota.edu.co/bitstream/handle/001/796/aareorganizacionporciclos1.pdf?sequence=1>
- Ministerio de Educación de Perú (MINEDU), 2021. ¿Qué es una Experiencia de Aprendizaje? Recuperado el 25 de marzo de 2023 de <https://mineduperu.org/que-es-una-experiencia-de-aprendizaje-2021-minedu/>

- Moreno, T. (2006). La colaboración y la colegialidad docente en la universidad: del discurso a la realidad. *Perfiles Educativos*. Vol. XXVIII, núm. 112, pp. 98-130. Ciudad de México Recuperado el 28 de marzo de 2023 de <https://www.scielo.org.mx/pdf/peredu/v28n112/n112a5.pdf>.
- Sancho, T y Borges, F. (2011). El aprendizaje en un entorno virtual y su protagonista, el estudiante virtual. En B. Gros (ed.). *Evolución y retos de la educación virtual. Construyendo el e-learning del siglo XXI*. (pp. 27-49). Barcelona: Editorial UOC.
- Williner, B. (2018). La comprensión de conceptos involucrados en problemas de optimización. Un estudio en primer año de ingeniería a partir de ideas variacionales y diferentes sistemas de representación. Tesis doctoral. Universidad Nacional del Comahue. Facultad de Ingeniería. Recuperada el 15 de mayo de 2021 de <http://rdi.uncoma.edu.ar:123456789/15484>

Explorando el futuro de la Educación Matemática con la Inteligencia Artificial de Chat GPT

Carina S. GONZÁLEZ-GONZÁLEZ

Departamento de Ingeniería Informática y de Sistemas
Universidad de La Laguna
cigonza@ull.edu.es

Resumen

En los últimos años, la inteligencia artificial se ha utilizado cada vez más para abordar los desafíos en la educación matemática. Por ejemplo, los sistemas de tutoría inteligente pueden personalizar el aprendizaje y ofrecer comentarios precisos y específicos para ayudar a los estudiantes a mejorar su comprensión y desempeño en las matemáticas. Además, los chatbots de inteligencia artificial como Chat GPT pueden interactuar con los estudiantes de manera más natural y accesible, ofreciendo un enfoque más intuitivo para el aprendizaje de las matemáticas. Los antecedentes de la inteligencia artificial en la educación datan de hace varias décadas, y ha habido un creciente interés en su aplicación a la enseñanza y el aprendizaje en los últimos años. La tecnología ha avanzado significativamente en el procesamiento del lenguaje natural y la generación de texto, lo que ha abierto nuevas oportunidades para la educación matemática. Sin embargo, a pesar de las promesas de la inteligencia artificial en la educación matemática, aún existen desafíos a superar. La inteligencia artificial de generación de texto, como Chat GPT, es capaz de generar textos matemáticos y responder a preguntas específicas, pero su capacidad para comprender el contexto y las relaciones complejas en las matemáticas sigue siendo limitada. Además, la tecnología puede resultar costosa y su implementación puede requerir una mayor capacitación y soporte para los educadores. En esta conferencia, exploraremos cómo la inteligencia artificial puede transformar el futuro de la educación matemática y cómo podemos abordar los desafíos para aprovechar al máximo esta tecnología.

Palabras clave: IA en la educación, educación matemática, Chat GPT.

Introducción

La investigación en Inteligencia Artificial (IA) en educación ha experimentado un gran avance en los últimos años, impulsado por el desarrollo de técnicas de aprendizaje automático (machine learning), procesamiento de lenguaje natural (NLP) y redes neuronales, entre otras [1,2]. La aplicación de la IA en educación se basa en una amplia gama de técnicas de inteligencia artificial [2,3], incluyendo el aprendizaje automático (machine learning) y el procesamiento del lenguaje natural (NLP), data mining y learning analytics, sistemas multiagente, redes neuronales, lógica difusa y sistemas bayesianos, entre otras. Por ejemplo, las técnicas de data mining y learning analytics se utilizan para analizar grandes cantidades de datos de los estudiantes con el fin de identificar patrones y tendencias en el rendimiento académico, el comportamiento y la interacción del estudiante, lo cual puede ayudar a los educadores a diseñar planes de estudio personalizados y proporcionar retroalimentación detallada a los estudiantes. En el caso de los sistemas multiagente, se utilizan para crear sistemas de tutoría inteligente que pueden interactuar con los estudiantes y proporcionar ayuda en tiempo real en función de sus necesidades específicas, proporcionando una experiencia de aprendizaje personalizada y adaptativa. Las redes neuronales se utilizan para la clasificación y el análisis de datos, la identificación de patrones de aprendizaje y la creación de sistemas de reconocimiento de voz y texto. La lógica difusa se utiliza para la modelización de incertidumbres y para la creación de sistemas de evaluación adaptativos y personalizados, al igual que los sistemas Bayesianos, que se utilizan para la toma de decisiones y la modelización de incertidumbres en sistemas de recomendación de contenido educativo y sistemas de evaluación adaptativos.

Las técnicas de inteligencia artificial (IA) han dado lugar a una serie de tecnologías que se ofrecen cada vez más "como servicio" [4]. Estas tecnologías abarcan diversas áreas, entre las que destacan el procesamiento del lenguaje natural (la IA se utiliza para interpretar automáticamente textos, incluyendo el análisis semántico y la generación de textos), el reconocimiento del habla (se aplica el procesamiento del lenguaje natural a las palabras habladas, lo que incluye los smartphones, los asistentes personales de IA y los chatbots en los servicios bancarios), el reconocimiento y procesamiento de imágenes (donde la IA se utiliza para el reconocimiento facial y de la escritura a mano, así como para la manipulación de imágenes y los vehículos autónomos), los agentes automatizados (la IA se aplica en avatares de juegos de ordenador, compañeros virtuales, robots sociales inteligentes), la detección de emociones (la IA se utiliza para analizar el sentimiento en textos, comportamientos y rostros), la minería de datos para la predicción (la IA se aplica en campos como los diagnósticos médicos, las previsiones meteorológicas, las proyecciones empresariales, las ciudades inteligentes, las predicciones financieras y la detección de fraudes) y la creatividad artificial (la IA se utiliza en sistemas que pueden crear nuevas fotografías, música, obras de arte o historias).

En la actualidad, se están explorando diversas aplicaciones de la IA en el ámbito educativo, incluyendo la personalización del aprendizaje, la evaluación automatizada, la tutoría inteligente y la detección temprana de problemas de aprendizaje [1, 3]. Una de las áreas más destacadas de la investigación en IA en educación es la personalización del aprendizaje [5], que trata sobre el uso de algoritmos de aprendizaje automático para adaptar la experiencia de aprendizaje a las necesidades y características individuales del estudiante, lo que puede mejorar significativamente la eficacia del proceso de aprendizaje. Otra área de investigación en IA en educación es la evaluación automatizada [6], que implica el uso de algoritmos de aprendizaje automático para evaluar automáticamente el trabajo de los estudiantes, lo que puede ahorrar tiempo y mejorar la objetividad de las evaluaciones. También se puede utilizar la evaluación automatizada para la detección del plagio, como ejemplo lo realiza Turnitin (<https://www.turnitin.com/>). Esta plataforma de detección de plagio utiliza técnicas de IA, como el aprendizaje automático y el procesamiento del lenguaje natural, para identificar y comparar el texto de los estudiantes con otros textos en la web y en su propia base de datos. La plataforma utiliza el aprendizaje automático para identificar patrones de plagio y el procesamiento del lenguaje natural para analizar el texto y compararlo con otros textos. También se ha investigado sobre el uso de la IA para la tutoría inteligente [6], que implica el modelado del conocimiento del estudiante, la base de datos de conocimiento experto, modelado de estrategias docentes y uso de agentes virtuales inteligentes para proporcionar retroalimentación y apoyo a los estudiantes. Esto puede ayudar a mejorar la calidad del aprendizaje y reducir el costo de la educación. Un ejemplo es el sistema de tutoría inteligente de Carnegie Learning (<https://www.carnegielearning.com/>), que utiliza un modelo de redes neuronales para evaluar el desempeño de los estudiantes en tiempo real. El modelo de redes

neuronales procesa la entrada de los estudiantes (por ejemplo, sus respuestas a preguntas de prueba) y luego genera una salida que indica qué tan bien están realizando en el tema en cuestión. El sistema de tutoría utiliza esta salida para proporcionar retroalimentación personalizada y adaptativa a los estudiantes. Además, la IA también está siendo utilizada para la detección temprana de problemas de aprendizaje [6], lo que puede ayudar a identificar y abordar los problemas antes de que se conviertan en obstáculos importantes para el aprendizaje.

Existen numerosas aplicaciones educativas muy conocidas que utilizan técnicas de IA, tales como Knewton (<https://www.knewton.com/>), Duolingo (<https://es.duolingo.com/>), Smart Sparrow (<https://www.smartsparrow.com/>) o Gradescope (<https://www.gradescope.com/>). Knewton es una plataforma de aprendizaje adaptativo que utiliza técnicas de IA para adaptar la experiencia de aprendizaje a las necesidades individuales de cada estudiante y proporcionar retroalimentación detallada en tiempo real. Duolingo es una plataforma de aprendizaje de idiomas que utiliza técnicas de IA, como el procesamiento del lenguaje natural, para personalizar la experiencia de aprendizaje para cada estudiante y proporcionar retroalimentación adaptativa. Smart Sparrow es una plataforma de aprendizaje adaptativo que permite a los educadores crear cursos personalizados utilizando técnicas de IA para adaptar la experiencia de aprendizaje a las necesidades individuales de cada estudiante. Y, Gradescope es una plataforma de evaluación de tareas que utiliza técnicas de IA, como la visión por ordenador y el procesamiento del lenguaje natural, para automatizar la corrección de tareas y proporcionar retroalimentación detallada a los estudiantes.

Asimismo, diferentes países han introducido la IA en sus sistemas educativos [7]. Por ejemplo, el sistema educativo finlandés ha implementado los programas Elements of AI y Building AI diseñados por la Universidad de Helsinki, los cuales utilizan técnicas de machine learning para enseñar a los ciudadanos sin conocimientos técnicos sobre el tema. Estonia utiliza métodos basados en data mining y machine learning para identificar factores que puedan contribuir al abandono escolar de los estudiantes. En Polonia, se ha implementado chatbot para enseñar habilidades técnicas y de programación a los estudiantes, mientras que en los Países Bajos se utiliza un método flexible que involucra a los estudiantes en el aprendizaje a través del uso de agentes inteligentes y técnicas basadas en IA para recuperar información de Internet. Además, existen varias iniciativas para introducir IA en la educación a través de plataformas como Coursera, Educalab y edX, que combinan técnicas basadas en IA con grandes cantidades de datos generados por las interacciones de los estudiantes con sus entornos de aprendizaje, que se utilizan en distintos países como Francia, España, Alemania, Italia, y otros países del mundo.

El estado del arte en esta materia es amplio, y lleva muchos años desarrollándose, y posiblemente veremos en un presente-futuro próximo más avances emocionantes en este campo, impulsados por técnicas de IA cada vez más sofisticadas.

A continuación, veremos algunas de las aplicaciones de IA en educación matemática, para luego ver las tendencias actuales existentes, sus potenciales problemas, desafíos y oportunidades.

Ejemplos de aplicaciones de Inteligencia Artificial en la Educación Matemática

La IA ha sido utilizada en educación matemática para mejorar la forma en que se enseña, se aprende y se evalúa. Como ejemplos de proyectos y trabajos relacionados con la IA en educación matemática podemos encontrar a la conocida plataforma educativa en línea Khan Academy (<https://es.khanacademy.org/>) que utiliza IA para personalizar la experiencia de aprendizaje para cada estudiante. Esta plataforma utiliza un algoritmo de aprendizaje automático para evaluar el rendimiento del estudiante y adaptar el contenido en consecuencia. Otro proyecto destacado es la plataforma MathSpring (<http://mathspring.org/>) desarrollado por las universidades de Massachusetts Amherst y el Worcester Polytechnic Institute. MathSpring es un software tutorial inteligente que permite la personalización y adaptación de contenidos y actividades y ayuda a los estudiantes a resolver problemas de matemáticas. Asimismo, el sistema ALEKS (Assessment and Learning in Knowledge Spaces) (<https://www.aleks.com/>) utiliza un algoritmo de IA para adaptar el contenido a las necesidades de aprendizaje de cada estudiante y proporcionar retroalimentación personalizada. En el idioma español encontramos a la plataforma Smartik (<https://www.smartick.es/>) que utiliza la inteligencia artificial y el big data para detectar el ritmo de aprendizaje y progreso de los estudiantes y les propone un plan de estudios personalizado. El algoritmo creado aprende con cada niño y con los datos que recoge en cada sesión de los estudiantes ofrece ejercicios acordes a sus necesidades y

presentan actividades ni muy fáciles para que no se relajen, ni muy duros para que no se frustren. Además de personalizado, el aprendizaje puede ser ludificado y asistido a través de asistentes virtuales, como por ejemplo el proyecto EMATIC (Educación Matemática a través de las TIC) [8] que es un Sistema Tutorial Inteligente multidispositivo centrado en la enseñanza de las matemáticas, especialmente para niños con dificultades educativas. El pensamiento lógico y el aprendizaje de diferentes aspectos de las matemáticas básicas son los principales objetivos de aprendizaje de EMATIC. Además, EMATIC permite a los alumnos realizar de forma no repetitiva el mismo tipo de ejercicio, haciendo que el proceso de aprendizaje sea tan dinámico y entretenido como si de un juego se tratara. En este sentido, también vemos como la IA puede ser utilizada para crear juegos educativos de matemáticas personalizados y adaptativos. Por ejemplo, la aplicación Mathspace (<https://mathspace.co/>) utiliza la IA para crear juegos y actividades interactivas que ayudan a los estudiantes a aprender matemáticas de manera efectiva.

Para la visualización de conceptos matemáticos, vemos como la IA puede ser utilizada para crear visualizaciones y modelos interactivos que ayuden a los estudiantes a comprender mejor los conceptos matemáticos abstractos. Por ejemplo, GeoGebra (<https://www.geogebra.org/>) es una herramienta de matemáticas interactiva que utiliza la IA generativa para crear visualizaciones en 3D de formas geométricas y operaciones matemáticas, o el software de matemáticas Maple (<https://www.maplesoft.com/>) utiliza la IA para resolver problemas matemáticos complejos y para crear modelos y simulaciones matemáticas. La IA puede ser utilizada para crear ejercicios y problemas matemáticos personalizados, como se utiliza en la herramienta de matemáticas Mathigon (<https://es.mathigon.org/>) que permite crear ejercicios y problemas matemáticos interactivos que se adaptan a las habilidades y necesidades de cada estudiante. Los consignados sólo son algunos ejemplos de los proyectos e investigaciones que se están desarrollando en la IA aplicada a la educación matemática.

Tendencias en Inteligencia Artificial: Deep Learning e IA Generativa

El deep learning es una técnica avanzada de machine learning que utiliza algoritmos de redes neuronales profundas para analizar grandes cantidades de datos y extraer patrones y características [9]. En el contexto educativo, el deep learning se utiliza para una variedad de aplicaciones, algunas de las cuales son las siguientes:

- Reconocimiento de voz y texto: el deep learning se utiliza para desarrollar sistemas de reconocimiento de voz y texto, lo que puede ser útil en la creación de tecnología educativa como chatbots para ayudar a los estudiantes a resolver sus dudas, programas de reconocimiento de escritura para corregir automáticamente la ortografía y la gramática, y sistemas de transcripción de conferencias para proporcionar notas detalladas a los estudiantes.
- Identificación de patrones de aprendizaje: el deep learning se utiliza para identificar patrones de aprendizaje a partir de datos de los estudiantes, lo que puede ayudar a los educadores a diseñar mejores planes de estudio personalizados para los estudiantes. Por ejemplo, se pueden utilizar algoritmos de deep learning para analizar el comportamiento de los estudiantes en un programa de aprendizaje en línea y para identificar los patrones que indican si un estudiante está en riesgo de abandonar el programa.
- Asistencia en la evaluación: el deep learning se utiliza para ayudar a los educadores a evaluar la comprensión de los estudiantes de un tema específico. Por ejemplo, se pueden utilizar algoritmos de deep learning para evaluar automáticamente las respuestas de los estudiantes a las preguntas de opción múltiple y proporcionar una retroalimentación detallada y personalizada.
- Detección de plagio: el deep learning se utiliza para detectar el plagio en los trabajos de los estudiantes. Se pueden entrenar algoritmos de deep learning para identificar similitudes entre los trabajos de los estudiantes y los textos disponibles en línea.

Por otra parte, la inteligencia artificial generativa es un campo de la inteligencia artificial que se enfoca en crear sistemas que puedan generar nuevos contenidos, como imágenes, música, texto y otros tipos de datos. Estos sistemas utilizan técnicas de aprendizaje profundo y redes neuronales para aprender de los patrones presentes en los datos de entrenamiento y generar nuevos datos a partir de estos patrones.

Entre las técnicas más comunes utilizadas en la inteligencia artificial generativa, se encuentran las Redes neuronales generativas adversarias (GAN) [10], las Redes neuronales recurrentes (RNN) [11], los autoencoders [12] y los modelos de lenguaje generativo [13]. Las GAN se componen de dos redes

neuronales, una generadora y una discriminadora. La red generadora crea nuevas muestras a partir de datos de entrenamiento, mientras que la discriminadora trata de distinguir las muestras generadas de las muestras reales. La generadora busca mejorar sus resultados para engañar a la discriminadora, mientras que la discriminadora trata de identificar las muestras generadas. Las RNN se utilizan para generar secuencias de datos, como música o texto, a partir de patrones presentes en los datos de entrenamiento. Las RNN utilizan conexiones de retroalimentación para mantener una memoria de lo que se ha generado previamente y generar nuevas secuencias basadas en esa memoria. Los autoencoders se utilizan para crear representaciones de alta calidad de los datos de entrada, y aprenden a comprimir los datos de entrada en una representación más pequeña y luego a descomprimirlos de nuevo en su forma original. Esta técnica se puede utilizar para generar nuevos datos que sean similares a los datos de entrada. Los modelos de lenguaje generativo se utilizan para crear texto a partir de patrones presentes en los datos de entrenamiento, y utilizan técnicas como el modelado de lenguaje, la codificación de palabras y la generación de secuencias para crear nuevos textos que sean coherentes y cohesivos.

La inteligencia artificial generativa tiene varias aplicaciones educativas, que pueden ayudar a los estudiantes a aprender y a los educadores a enseñar de nuevas maneras [14, 18]. Algunas de estas aplicaciones incluyen la generación de contenido educativo, ya que puede ser utilizada para crear ejercicios, cuestionarios, materiales didácticos y vídeos explicativos, que, además, pueden ser personalizados según las necesidades y habilidades de cada estudiante. También permiten la creación de chatbots educativos que pueden ser utilizados para responder a preguntas de los estudiantes y proporcionar retroalimentación personalizada, que pueden ser entrenados para responder preguntas comunes y para proporcionar ayuda y recursos adicionales. Asimismo, la IA generativa puede ser utilizada para ayudar a los estudiantes a escribir ensayos y otros textos, ayudando a los estudiantes a mejorar su gramática, ortografía y estilo de escritura, y a generar ideas para sus ensayos. También puede ser utilizada para adaptar el aprendizaje a las necesidades y habilidades de cada estudiante, analizando el rendimiento de cada estudiante y proporcionar recomendaciones y recursos personalizados para ayudarlos a mejorar. Por otra parte, la IA generativa puede ser utilizada para crear juegos educativos personalizados que ayuden a los estudiantes a aprender de manera más efectiva y proporcionando retroalimentación inmediata.

En particular, las aplicaciones de la inteligencia artificial generativa a la educación matemática, incluyen la generación de ejercicios y problemas matemáticos, la tutoría personalizada, la visualización de conceptos matemáticos, el modelado y simulación matemática y el desarrollo de nuevos contenidos y recursos educativos [15-17]. La IA generativa puede ser utilizada para crear ejercicios y problemas matemáticos personalizados que se adapten a las habilidades y necesidades de cada estudiante. Estos problemas pueden ser generados automáticamente en función de las habilidades y desafíos que cada estudiante necesita abordar. Los sistemas basados en IA pueden proporcionar retroalimentación personalizada y específica a cada estudiante, ayudando a los estudiantes a comprender mejor los conceptos matemáticos y a identificar y corregir errores específicos. También, la IA generativa puede ser utilizada para crear visualizaciones y modelos interactivos que ayuden a los estudiantes a comprender mejor los conceptos matemáticos abstractos, por ejemplo, puede utilizarse para crear visualizaciones en 3D de formas geométricas y operaciones matemáticas. Asimismo, puede ser utilizada para modelar y simular sistemas matemáticos complejos, ayudando a los estudiantes a comprender mejor los conceptos matemáticos y a aplicarlos a problemas reales. Y también, puede ser utilizada para desarrollar materiales educativos interactivos y personalizados, creando por ejemplo juegos y simulaciones para que los estudiantes aprendan y practiquen conceptos matemáticos.

Por último, Chat GPT (Generative Pre-trained Transformer), que es un modelo de lenguaje de IA generativa, puede ser utilizado en una variedad de tareas de procesamiento de lenguaje natural, como chatbots, asistentes virtuales, generación de texto, traducción automática, análisis de sentimientos y más [18]. En este sentido, puede ser útil en educación matemática al proporcionar una herramienta interactiva para que los estudiantes practiquen y desarrollen habilidades matemáticas, como resolución de problemas, análisis de datos y comprensión de conceptos complejos. También puede ayudar a los estudiantes a explorar diferentes enfoques y soluciones a los problemas, y a recibir retroalimentación instantánea y personalizada en su aprendizaje. Además, Chat GPT puede ser utilizado por profesores y tutores para diseñar actividades de enseñanza más efectivas y adaptativas para los estudiantes.

Problemas, desafíos y oportunidades

En la actualidad existen varios problemas en la educación matemática que podrían abordarse mediante el uso de la IA, por caso, las dificultades en la comprensión de conceptos, la falta de personalización en la enseñanza, la falta de recursos educativos (en general en todas las áreas educativas) o la evaluación. Los métodos tradicionales de enseñanza de las matemáticas, frecuentemente, no son lo suficientemente personalizados para satisfacer las necesidades individuales de cada estudiante, hecho que puede resultar en un menor rendimiento académico. La IA puede ayudar a abordar estos problemas mediante el uso de técnicas como el aprendizaje automático, el procesamiento del lenguaje natural y la visión por computadora. Por ejemplo, podría utilizarse IA para crear simulaciones interactivas que permitan a los estudiantes explorar conceptos matemáticos en forma más visual y práctica, se podría adaptar el contenido y la metodología de enseñanza a las necesidades y habilidades de cada estudiante, permitiéndoles avanzar a su propio ritmo y enfoque. La IA podría evaluar el conocimiento de los estudiantes en forma más precisa y personalizada mediante el uso de algoritmos de aprendizaje automático que analizan múltiples factores, como el tiempo de respuesta, la frecuencia de errores y la complejidad de las preguntas. Además, la IA podría generar recursos educativos personalizados y de alta calidad para cada estudiante, lo que les permitiría tener acceso a la información y el apoyo que necesitan para tener éxito en matemática.

Aunque la IA podría ser una herramienta valiosa para mejorar la educación matemática al abordar los problemas actuales y proporcionar soluciones personalizadas y de alta calidad para cada estudiante, existen varios desafíos para la IA en la educación matemática. Estos desafíos que incluyen el acceso a los datos, ya que la IA necesita grandes cantidades de datos para aprender y mejorar su desempeño. En la educación matemática, podría ser difícil reunir suficientes datos para entrenar a una IA. Asimismo, en muchos casos, la IA no proporciona explicaciones claras sobre cómo llegó a sus conclusiones, lo que puede dificultar la comprensión de los estudiantes y la confianza en los resultados. También se puede advertir encontrar resistencia al cambio en algunos educadores y estudiantes que pueden ser resistentes a la adopción de nuevas tecnologías en el aula, ocasionando dificultades en la implementación de la IA en la educación matemática. Como oportunidades, vemos que la IA tiene el potencial de adaptarse a las necesidades individuales de cada estudiante, lo que puede mejorar significativamente el rendimiento académico. Asimismo, la IA puede proporcionar retroalimentación inmediata sobre el desempeño del estudiante, lo que puede mejorar el proceso de aprendizaje. También la IA puede ofrecer nuevas formas de enseñar matemáticas, como simulaciones interactivas y tutoriales personalizados, que pueden ser más efectivas que los métodos tradicionales. Además, la IA puede hacer que la educación matemática sea más accesible para los estudiantes con discapacidades o que no tienen acceso a recursos educativos de alta calidad. Por tanto, vemos que la IA tiene el potencial de transformar la educación matemática al ofrecer una educación más personalizada, más efectiva y más accesible para todos los estudiantes sirviendo de apoyo al profesorado en su labor.

Conclusiones

La investigación en IA en educación ha avanzado mucho en los últimos años gracias al desarrollo de técnicas como el aprendizaje automático, el procesamiento del lenguaje natural, data mining, sistemas multiagente, redes neuronales, lógica difusa y sistemas bayesianos, entre otros. Estas técnicas se utilizan para personalizar el aprendizaje, la evaluación automatizada, la tutoría inteligente y la detección temprana de problemas de aprendizaje. La personalización del aprendizaje es una de las áreas más destacadas de la investigación en IA en educación, ya que se adapta el contenido de aprendizaje a las necesidades y características individuales de cada estudiante. La evaluación automatizada también es una técnica valiosa, que puede ahorrar tiempo y mejorar la objetividad de las evaluaciones. La IA también se está utilizando para la tutoría inteligente, donde se modela el conocimiento del estudiante y se utilizan agentes virtuales inteligentes para proporcionar retroalimentación y apoyo. Además, la IA está siendo utilizada para la detección temprana de problemas de aprendizaje, lo que puede ayudar a identificar y abordar los problemas antes de que se conviertan en obstáculos importantes para el aprendizaje. Como tendencias en IA, hemos analizado el deep learning y la inteligencia artificial generativa, y su aplicación en el ámbito educativo. El deep learning se utiliza para reconocimiento de voz y texto, identificación de patrones de aprendizaje, asistencia en la evaluación y detección de plagio, entre otros. Por otro lado, la inteligencia artificial generativa se enfoca en crear sistemas que puedan generar nuevos contenidos, como imágenes,

música, texto y otros tipos de datos. En el ámbito educativo, la inteligencia artificial generativa tiene varias aplicaciones, como la generación de contenido educativo, chatbots educativos, ayuda a la escritura de ensayos y adaptación del aprendizaje a las necesidades de cada estudiante. Ambas ramas de la inteligencia artificial pueden ser de gran utilidad para mejorar y personalizar el aprendizaje y la enseñanza.

La IA se ha convertido en una herramienta valiosa para mejorar la enseñanza y el aprendizaje en la educación matemática. Los ejemplos de proyectos y trabajos mencionados en el texto demuestran cómo la IA puede ser utilizada para personalizar la experiencia de aprendizaje de cada estudiante, adaptar el contenido y las actividades a sus necesidades de aprendizaje y proporcionar retroalimentación personalizada. Además, la IA también puede ser utilizada para crear juegos educativos y visualizaciones interactivas que ayuden a los estudiantes a comprender mejor los conceptos matemáticos abstractos. Podemos concluir que la IA tiene el potencial de mejorar significativamente la educación matemática al proporcionar nuevas formas de enseñanza personalizada y retroalimentación inmediata para cada estudiante. Sin embargo, la falta de datos adecuados, la resistencia al cambio y la falta de interpretabilidad son algunos de los desafíos que deben superarse para lograr una adopción efectiva de la IA en la educación matemática. Además, la IA también tiene la oportunidad de hacer que la educación matemática sea más accesible para todos los estudiantes, incluidos aquellos con discapacidades y aquellos que no tienen acceso a recursos educativos de alta calidad.

Es importante destacar que la IA no reemplaza a los educadores humanos, sino que puede ser una herramienta útil para complementar el proceso de enseñanza y mejorar el aprendizaje de los estudiantes. Si se abordan adecuadamente los desafíos y se aprovechan las oportunidades, la IA tiene el potencial de revolucionar la forma en que se enseña y se aprende matemáticas.

Referencias Bibliográficas

- [1] Chen, X., Zou, D., Xie, H., Cheng, G., & Liu, C. (2022). Two decades of artificial intelligence in education. *Educational Technology & Society*, 25(1), 28-47.
- [2] Prahani, B. K., Rizki, I. A., Jatmiko, B., Suprpto, N., & Amelia, T. (2022). Artificial Intelligence in Education Research During the Last Ten Years: A Review and Bibliometric Study. *International Journal of Emerging Technologies in Learning*, 17(8).
- [3] González-González, C. S. (2004). Sistemas inteligentes en la educación: una revisión de las líneas de investigación y aplicaciones actuales. RELIEVE: v. 10, n. 1, p. 3-22. http://www.uv.es/RELIEVE/v10n1/RELIEVEv10n1_1.htm
- [4] Chan, L., Hogaboam, L., & Cao, R. (2022). Artificial intelligence in education. In *Applied Artificial Intelligence in Business: Concepts and Cases* (pp. 265-278). Cham: Springer International Publishing.
- [5] Murtaza, M., Ahmed, Y., Shamsi, J. A., Sherwani, F., & Usman, M. (2022). AI-based personalized e-learning systems: Issues, challenges, and solutions. *IEEE Access*.
- [6] Fengchun Miao, Wayne Holmes, Ronghuai Huang, and Hui Zhang, AI and education: Guidance for policymakers, United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization 7, place de Fontenoy, 75352 Paris 07 SP, France, UNESCO 2021, ISBN 978-92-3-100447-6.
- [7] Lloret, C. M., González, A. H., & Raboso, D. D. Sistemas y recursos educativos basados en IA que apoyan y evalúan la educación.
- [8] González, C.S., Muñoz, V., Toledo, P., Mora, A., Moreno, L. (2014). EMATIC: an inclusive educational application for tablets. In Proceedings of the XV International Conference on Human Computer Interaction (Interacción'14). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, Article 94, 1-8. <https://doi.org/10.1145/2662253.2662347>
- [9] LeCun, Y., Bengio, Y., & Hinton, G. (2015). Deep learning. *nature*, 521(7553), 436-444.
- [10] de la Torre, J. (2023). Redes Generativas Adversarias (GAN) Fundamentos Teóricos y Aplicaciones. *arXiv preprint arXiv:2302.09346*.

- [11] Arana, C. (2021). *Redes neuronales recurrentes: Análisis de los modelos especializados en datos secuenciales* (No. 797). Serie Documentos de Trabajo.
- [12] Pinaya, W. H. L., Vieira, S., Garcia-Dias, R., & Mechelli, A. (2020). Autoencoders. In *Machine learning* (pp. 193-208). Academic Press.
- [13] García Torija, A. I. (2021). Diseño generativo: algoritmos como método de diseño.
- [14] Flores, F. A. I., Sánchez, D. L. C., Urbina, R. O. E., Coral, M. Á. V., Medrano, S. E. V., & González, D. G. E. (2022). Inteligencia artificial en educación: una revisión de la literatura en revistas científicas internacionales. *Apuntes Universitarios*, 12(1), 353-372.
- [15] Baidoo-Anu, D., & Owusu Ansah, L. (2023). Education in the era of generative artificial intelligence (AI): Understanding the potential benefits of ChatGPT in promoting teaching and learning. *Available at SSRN 4337484*.
- [16] Hwang, G. J., & Tu, Y. F. (2021). Roles and research trends of artificial intelligence in mathematics education: A bibliometric mapping analysis and systematic review. *Mathematics*, 9(6), 584.
- [17] Richard, P. R., Vélez, M. P., & Van Vaerenbergh, S. (2022). Mathematics education in the age of artificial intelligence. *How artificial intelligence can serve the mathematical human learning*.
- [18] García-Peñalvo, F. J. (2023). The perception of Artificial Intelligence in educational contexts after the launch of ChatGPT: Disruption or Panic?

La resolución de problemas y la investigación en Matemática y Educación Matemática

Juan E. NÁPOLES VALDES

UNNE, FaCENA, Argentina

jnapoles@exa.unne.edu.ar

Introducción

Una de las tareas que son inherentes a la labor profesional de un profesor, es el dominio de los métodos de la actividad científica investigativa y los aplique en la solución de problemas propios de su profesión. En el caso de la Educación Matemática, esta función investigativa se da en un doble aspecto: educativo y matemático.

Aquí presentaremos algunos aspectos relativos a la labor investigativa en general, y después en los campos educativo y técnico, es decir, matemático.

En ambos casos, el profesor debe diagramar la investigación en sí mismo y, en particular, determinar los cuatro componentes fundamentales de una investigación científica: el Problema de Investigación (por qué de la investigación), el Objetivo (para qué), El Objeto de Estudio (qué de la investigación) y los Métodos de Investigación (cómo de la investigación). Aquí nos centraremos en el Problema de Investigación, el corazón de la investigación¹.

Desarrollo

La Investigación Científica surge por la necesidad que tiene el hombre de darle solución a los problemas que se manifiestan en su vida cotidiana; de conocer la naturaleza que lo rodea para transformarla y ponerla en función de satisfacer sus necesidades e intereses.

La Investigación Científica es aquel proceso, de carácter creativo e innovador que pretende encontrar respuesta a problemas trascendentes y con ello lograr hallazgos significativos que aumentan el conocimiento humano y lo enriquecen. Tal proceso implica la concatenación lógica y rigurosa de una serie de etapas o tareas del proceso del conocimiento. Sin embargo, estamos hablando de un proceso que es cualquier cosa menos sencillo, ya que no existen, como lo hemos dicho, lineamientos o modelos definitivos, "recetas", y el camino está plagado de obstáculos diversos, marchas, contramarchas, e incluso que puede llevar a desandar un camino (no importa cuán avanzado estemos en él) para retomar uno nuevo, ante la imposibilidad de resolver satisfactoriamente el problema y cumplir los objetivos propuestos, es decir, la Investigación Científica debemos encararla preparados y con un alto espíritu de perseverancia, que en muchas ocasiones, es lo que salva nuestra empresa.

Todo proceso de Investigación Científica está orientada a la solución de problemas científicos. Todo problema científico se formula conscientemente y su solución debe ser alcanzada en el curso de la investigación.

El primer componente de la Investigación Científica será el concepto de problema.

Según Labarrere², algunos autores conceptualizan el concepto de problema en términos de contradicción que debe ser resuelta, de déficit y búsqueda de información, de transformación de situaciones, etcétera. Es notable que ya en el siglo XVII el matemático y filósofo francés R. Descartes, en la regla 12 de sus **“Reglas para la dirección del espíritu”**, afirmaba: *“Yo no supongo más que los datos y un problema. Sólo en esto imitamos a los dialécticos: así como para enseñar las formas de los silogismos ellos suponen conocidos sus términos o*

¹ Muchos de los conceptos presentados aquí, están ampliados en la obra propia “Metodología de la Investigación Científica. Notas como (Pre) Texto”, Universidad de la Cuenca del Plata, Corrientes, 1998.

² Labarrere, A. F. (1996). “Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos”, Pueblo y Educación, La Habana.

materia, de la misma manera nosotros exigimos previamente que el problema sea previamente comprendido. Pero no distinguimos, como ellos, dos extremos y un medio, sino que consideramos el problema entero así: 1ro, en todo problema debe haber algo desconocido, pues de lo contrario no habría problema; 2do., ese algo debe estar designado de alguna manera, pues de otro modo no habría razón para investigar ese algo y no otra cosa; 3ro, ese algo no puede estar designado sino por algo conocido”.

Más adelante, Labarrere (pág. 6) señala que “...un problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades de y entre los objetos que no son accesibles directa e indirectamente a la persona; (...) es toda relación en la cual hay algo oculto para el sujeto, que este se esfuerza por hallar”. Concretando, para que una situación se denomine problema es necesario que:

- exista una persona que desea resolverla (resolutor),
- exista un estado inicial y un estado final (meta a alcanzar),
- y que exista algún tipo de impedimento para el paso de un estado a otro.

Con esta descripción se comprende que lo que resulta un problema para un sujeto puede no serlo para otro. Cada problema constituye un reto, se desconoce tanto la vía de solución como el tiempo que demorará solucionarlo. No obstante, se necesita confiar en que la inteligencia y habilidades que se poseen son adecuadas y suficientes para abordarlo. Es absurdo admitir que se pueda partir de cero. Según Schoenfeld³ el resolutor cuenta con recursos cognoscitivos que irá mostrando al trabajar con el problema como la intuición (conocimiento informal relacionado con el dominio), los hechos, los procedimientos algorítmicos y no algorítmicos así como las comprensiones (conocimiento proposicional) acerca de las reglas admitidas en el dominio.

Resolver un problema consiste en el proceso de ataque, en el abordaje del mismo por parte del sujeto. Nosotros, aún cuando el resolutor no disponga de la idea de solución entendemos, que si se encuentra enfrascado en hallar la respuesta, se encuentra resolviendo el problema. Así parafrasean Brenes y Murillo⁴: “Se entenderá que resolver un problema es hacer lo que se hace cuando no se sabe que hacer, pues si se sabe lo que hay que hacer, ya no hay problema” (pág. 377).

Polya⁵, por su parte, aseveraba que “...resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados” (pág. 1). Resolver problemas es una actividad humana fundamental. De hecho, el pensamiento humano trabaja la mayor parte del tiempo sobre problemas. “Cuando no dejamos la mente a su libre albedrío, cuando no la dejamos soñar, nuestro pensamiento tiende hacia un fin; buscamos medios, buscamos resolver un problema”⁶.

Según Bertoglia (pp. 111-113), actualmente está en boga considerar, básicamente, dos tipos de problemas: los problemas cerrados y los problemas abiertos⁷. En los primeros la solución se deduce en forma lógica a partir de la información que aparece en el planteamiento del problema y que resulta suficiente para encontrar la respuesta correcta. El resolutor dispone de toda la información, sólo necesita integrarla aplicando los recursos de la lógica; por ello suelen llamarse “problemas de inferencia lógica”. Posamentier and Stepelman (pág. 126) proponen el siguiente problema en el que, para optimizar su solución, conviene utilizar tanto la implicación aducida, como su contrarrecíproco.

³ Schoenfeld, A. H. (1992)-“Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in Mathematics”, in D. Grouws (Ed.) “Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning”, New York, MacMillan.

⁴ Brenes, V. y M. Murillo (1994)-“Algunos objetos de estudio del constructivismo”, UNA-UCR-CONICIT, Costa Rica.

⁵ Polya, G. (1980)-“On Solving Mathematical Problems in High School”, in: “Problem Solving in School Mathematics” (Yearbook of the NCTM), Stephen Krulich (Ed.), Reston.

⁶ Polya, G. (1945)-“How to solve it”, Princeton, Princeton University Press, pág. 377 (existe traducción al español: “Como plantear y resolver problemas”, Trillas, México, 1965).

⁷ Bertoglia, L. (1990)-“Psicología del aprendizaje”, Universidad de Antofagasta, Chile.

Un trabajador de control de calidad afirma estar muy seguro, de que todos los platos de metal manufacturados tienen una vocal impresa sobre una cara, poseen un número par sobre la otra. ¿Cuáles de los siguientes platos deben ser volteados, para estar seguros de que la regla ha sido seguida?

A

N

5

6

Este tipo de problemas, ellos lo denominan “no rutinario”⁸.

Por su parte en los problemas abiertos el resolutor necesita ir más allá de la información recibida, utilizándola de manera distinta y/o modificando los significados atribuidos a los elementos del ejercicio. Ahora los recursos lógicos resultan insuficientes y se precisa de creatividad. Los problemas abiertos se aproximan mucho a lo que sucede en la vida real; hay que hacer consideraciones para la respuesta, pues no se da toda la información necesaria. Un ejemplo es el caso de una persona que debe descubrir un procedimiento, que le permita distribuir entre tres personas, en forma equitativa, las dos casas que han recibido como herencia.

El problema (el por qué) de la investigación lo podemos definir como la situación inherente a un objeto, dado por la necesidad existente en un sujeto, el cual desarrollar una actividad para transformar la situación mencionada.

El problema es objetivo en tanto es una situación presente en el objeto; pero es subjetivo, pues para que exista el problema, la situación tiene que generar una necesidad en el sujeto.

Cualquier problema científico es consecuencia del desconocimiento de la existencia en una esfera de la realidad de: elementos y relaciones de dicha realidad objetiva. El planteamiento del problema es la expresión de los límites del conocimiento científico actual que genera la insatisfacción de la necesidad del sujeto.

¿Cualquier situación problemática constituye un problema científico?

Para que un problema sea un problema científico debe de reunir determinados requisitos como son:

- La formulación del problema debe basarse en un conocimiento previo del mismo.
- La solución que se alcance al problema estudiado debe contribuir al desarrollo del conocimiento científico, al desarrollo de la ciencia.
- Debe formularse y debe resolverse aplicando los conceptos, categorías y leyes de la rama del saber.

Así que la formulación de un problema científico debe partir de un conocimiento previo de la ciencia en cuestión y debe estar estrechamente vinculado, con problemas específicos que se presentan en la relación del hombre con la naturaleza y la sociedad. La fuente fundamental de problemas de investigación es la actividad práctico-transformadora del hombre. Toda actividad humana engendra nuevas situaciones problemáticas, las cuales demandan su solución y posible respuesta. Otra fuente que genera problemas de investigación, el problema mismo donde el investigador se enfrenta a nuevos problemas colaterales que no están dentro de su radio de acción o que se habían escapado de su observación inmediata.

Otra fuente de problemas lo constituyen el mismo proceso de desarrollo del conocimiento científico; dicho proceso resulta largo y tortuoso y va dejando lagunas que es necesario completar en la medida de que este avance. Incluso cuando realizamos diversas consideraciones de carácter restrictivo en el proceso de investigación, estamos determinando problemas abiertos a los que hay que volver en determinado momento para completar la investigación. Estas situaciones sin resolver, constituyen a su vez múltiples problemas que el investigador debe de enfrentar para satisfacer las necesidades prácticas y enriquecer el conocimiento científico. En investigaciones sociales, y principalmente de carácter educativo, muchas veces podemos formular el problema, solo después de analizar regularidades e identificar relaciones, muchas veces con carácter descriptivo, aún cuando hayamos teniendo clara la situación que nos impulsó a la investigación.

⁸ Posamentier, A.S. and J. Stepelman (1996)-”Teaching secondary school mathematics”, Prentice-Hall, Inc., A Simon & Schuster Company, Englewood Cliffs, New Jersey.

Aplicar respuestas conocidas a situaciones nuevas pueden ser fuente de nuevos problemas al encontrarse que dichas soluciones no den respuestas a las nuevas situaciones. La crítica a soluciones conocidas buscando sus puntos más controvertidos, son situaciones que pueden dar origen a nuevos problemas científicos.

El problema surge como resultado del diagnóstico de la situación del objeto en que se manifiesta un conjunto de fenómenos y hechos no explicables.

Para lograr una exitosa formulación del problema, es necesario conocer la teoría e historia precedente acerca del mismo. El desarrollo científico acerca del problema ser el punto de partida sobre el cual se elaboran los nuevos conocimientos.

El planteamiento del problema es fundamental, ya que de él depende la estrategia o diseño de su solución. La formulación correcta es señal de talento científico desarrollado en el ejercicio constante. Fred N. Kerlinger señala que:

Para hacer buenos planteamientos del problema, existen tres criterios: primero, el problema debe expresar la relación entre dos o más variables. En él se elaboran preguntas como ¿está A relacionado con B?, ¿cómo están A y B relacionados?, ¿cómo está A relacionado con B en las condiciones C y D? ... Segundo, el problema se debe establecer claramente y sin ambigüedades en forma de pregunta ... El tercer criterio es a menudo difícil de satisfacer, ya que requiere que el problema y su planteamiento se hagan de tal forma que signifiquen posibilidades de prueba empírica⁹.

El problema científico debe ser formulado en los conceptos propios de la ciencia, partiendo del sistema de conocimientos científicos, donde se precisa de forma clara el objeto de la investigación. Resumiendo, los criterios para plantear adecuadamente el problema de investigación son los siguientes:

1. El problema debe expresar una relación entre dos o más variables.
2. Debe estar formulado claramente y sin ambigüedad, (preferiblemente) como pregunta (por ejemplo, ¿qué efectos ...?, ¿en qué condiciones ...?, ¿cómo se relaciona ... con ...?, la actual ... impide ..., etc.).
3. El planteamiento debe implicar la necesidad (o no), y la posibilidad, de realizar un diseño experimental en nuestro proyecto de investigación. Recordemos que las ciencias fácticas pueden trabajar con aspectos cuantificables y con aspectos cualitativos.

Las cualidades que debe reunir un problema científico para que este se considere como tal son:

Objetividad. Todo problema tiene que responder a una necesidad real de la sociedad: (Importancia práctica y su significación social). El problema tiene que ser expresión de un desconocimiento, la solución de un problema tiene que traer como resultado la aparición de un nuevo conocimiento.

Especificidad. No puede ser impreciso, al extremo de ser vago. Para ello se hace necesario determinar cuál va a ser el objeto de estudio de la investigación y qué cuestiones particulares nos interesan.

Contrastabilidad empírica. Los términos incluidos en la formulación del problema necesitan ser definidos de forma tal que permitan el trabajo directo del investigador en la búsqueda de la información en un tiempo adecuado.

Tipos de problemas: considerando el tipo de relaciones que se pretenden encontrar con el estudio del objeto en cuestión: descriptivos y explicativos.

- **Descriptivos:** Busca solo una fotografía, es decir, la caracterización de la situación del objeto de estudio, los elementos componentes de dicho objeto, o la relación entre ellos y sus propiedades de un modo superficial o fenomenológico.
- **Explicativos:** Son aquellos problemas que tienen como objetivo brindar una caracterización causal acerca del por qué se dio determinado fenómeno, objeto o propiedad. Con este tipo de problema se va a la

⁹ Kerlinger, F.N. (1988²)-"Investigación del comportamiento", Trad. J. Eleni Hernández et al, Ed. McGraw-Hill/Interamericana, pág. 19.

búsqueda de la esencia de los fenómenos. Con la solución acertada de estos problemas se pueden establecer predicciones sobre hechos o situaciones futuras.

Reflexiones finales

Si bien todo lo anterior puede ser ilustrado en términos de investigaciones matemáticas, puras o aplicadas, quisiéramos señalar un aspecto que no está muy delimitado.

¿Cuándo podemos decir que se generalizan los resultados de una investigación? En el sentido estricto de la palabra, cuando se “amplia” cualquiera de los cuatro componentes de la investigación, es decir, esa ampliación, contiene como caso particular el componente original.

¿Cuándo se extienden los resultados de una investigación? Cuando la nueva ampliación no contiene el componente original como un caso particular, es decir, si lo pensamos en términos de conjuntos, la intersección es no vacía, pero el componente original, digamos A, no es subconjunto estricto del nuevo, por ejemplo, B, como en la generalización.

Ambos procesos están presentes en la investigación matemática, en el caso de la Educación Matemática, solo puede hablarse del segundo, la unicidad de la investigación educativa, en términos del contexto, hace imposible que sea un caso particular de otra investigación. De hecho, hasta el propio problema cambió y eso, en investigaciones sociales, es común.

Heurística y Simulación, aliadas incondicionales de la Resolución de Problemas

Miguel DELGADO PINEDA

Universidad Nacional de Educación a Distancia, España

Resumen

Que la Matemática sea reconocida como un conjunto de conocimientos donde su aprendizaje requiere aprender a resolver problemas, no implica que el conocimiento matemático sólo se produce vía método inductivo-deductivo. Para resolver un problema, primero debemos tener la certeza de que ese problema es resoluble, si no un problema puede ser un sueño imposible. Por ello, un primer acercamiento no inductivo-deductivo puede facilitar nuestra predisposición personal sobre la búsqueda de solución de un problema.

En este trabajo se tratan dos ejemplos concretos que son abordado experimentalmente siguiendo tres vías propuestas: La vía heurística, la vía simulada y la vía erudita. Estos problemas fueron objeto de estudio experimental con dos muestras; una de sujetos muy bien cualificados matemáticamente, profesores en activo, y una muestra estratificada de estudiantes universitarios.

La experiencia indica que es muy factible, y provechoso, concatenar alguna de las dos primeras vías con la vía erudita para poder generar el conocimiento matemático de una forma natural.

Palabras clave: Problema de Matemática. Resolución de problemas. Heurística matemática.

Simulación matemática. Matemática experimental.

Abstract

Introducción

En este trabajo se proponen dos alternativas al desarrollo usual de afrontar la resolución de un problema de matemáticas por parte de los estudiantes, al menos en un primer momento de su atención. Dos son los tipos de acercamiento que proponemos: uno de carácter heurístico y otro de carácter modo simulado. Entendemos que el utilizar alguna de estas dos acercamientos en el proceso inicial de análisis y estudio de un problema puede aportar cierta confianza al estudiante para intentar exponer una resolución tradicional posteriormente. Es decir, proponemos una vía heurística y otra vía simulada para todo problema que el estudiante no es capaz de catalogar como aplicación directa de aplicación de teoría estudiada. Con estas vías proponemos un acercamiento al problema y a su resolución, haciendo uso de algunos registros de representación semiótica: el registro metafórico y el registro analógico de Delgado (2016) y los cinco registros de representación de Duval (1999). Estas vías no son unas formas homologables a una resolución tradicional, ahora bien, son vías que permiten saber si un problema matemático tiene solución, o no, y si esa solución es única, o no. Y saber esto es mucho para perseverar en el intento de resolución homologable.

Muy probablemente, la característica de las Matemáticas más reconocible por el gran público, o la que mejor recuerda, es que en Matemáticas, se tienen que resolver problemas. Ahora bien, no suele haber una idea uniforme de los que son problemas de matemáticas en ese gran público. En general se hace alusión a la resolución de ecuaciones como objeto matemático más recordado.

Quizás, somos los profesores universitarios de Matemáticas quienes mejor nos damos cuenta de la dificultad de establecer una definición holística de las Matemáticas, pues reconocemos sus distintas áreas, sus diversos sistemas de razonamiento y los distintos métodos de resolución de problemas. Que no es fácil definir de una forma precisa la Matemática lo reconoce cualquier profesor de Matemáticas, con independencia del nivel docente en el que se encuentre. Cada profesor es consciente de cada una de las facetas que tienen la materia matemática en su nivel educativo y también es consciente de que esa dificultad para definirla, se incrementa al cambiar de nivel académico. Ahora bien, a nosotros nos interesa tratar con la resolución de problemas en Matemática, por ello, debemos iniciarnos de alguna definición plausible. Emplear la forma en la cual la define el diccionario de la Real Academia Española y de la Asociación de Academias de la Lengua Española. Dícese de la palabra **Matemática**: “*Ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones.*” En ese mismo diccionario se reconoce la interpretación; “*Perteneciente o relativo a las matemáticas*” y se considera que esta palabra admite la interpretación de adjetivo como sinónimo de “*Exacto*” y “*Preciso.*”

También, este diccionario reconoce la expresión **Matemática aplicada** como “*una rama de la Matemática que se ocupa de la aplicación de esta a la resolución de problemas de otras disciplinas, como la física, la biología o la economía.*” Hoy en día, deberían incorporarse muchas otras disciplinas como las ciencias sociales y los estudios técnicos y los tecnológicos. Si somos observadores vemos que en esta última definición aparece la expresión *resolución de problemas*.

Quizás si el lector es profesor de Matemáticas, no esté conforme con esos contenidos del diccionario, sin embargo, eso es a lo que cualquiera puede aludir cuando se le interpela por la Matemática. Muchos profesores, incluso investigadores de Matemática Educativa, tienden a confundir la parte con el todo, la parte de matemáticas que enseñan o investigan, generalmente muy algebraica, con el global de las áreas matemáticas. Esto es muy patente en la mayoría de los artículos publicados acerca de conceptos de Cálculo Matemático como el número real, el límite de una función, la derivada,...

¿Qué suele destacar un profesor de la Matemática a sus estudiantes? Para contestar a esta pregunta me remito a los 45 años de experiencia docente en la formación de profesores. Esta experiencia que mucho más precisa que una simple encuesta puntual, puesto que recorre una amplio periodo de tiempo y se corresponde con una muestra acumulada, o estratificada, enorme. Intentando unificar una respuesta plausible, destaco que los profesores, incluso siendo unos eruditos matemáticos, pretendemos dar una imagen a nuestros estudiantes de que cualquier teoría matemática es un espacio pentagonal regular en cuyos vértices situamos los Conceptos, los Métodos, la Sintaxis, la Semántica y las Matemáticas, de forma que cualquier problema de esa teoría esta es un punto de ese conjunto convexo que queda determinado por algún “tipo de distancia” de ese punto a cada vértice, que algunos consideran dimensiones o facetas del problema.

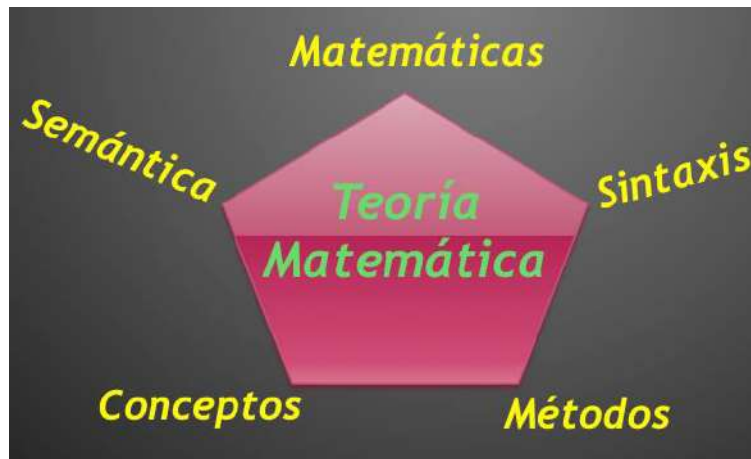


Figura 1: Imagen convexa de una teoría matemática

Con este tipo de visión de una teoría matemática, resulta que el estudiante tiende a creer que todo lo que se le proponga en esa teoría es factible de entender y reproducir. Es decir, que de todo Problema que se le proponga, podrá decidir si es cierto o es falso. En general, al aplicar los métodos usualmente más utilizados como son la Deducción y la Inducción. En cierta manera supone que todo problema propuesto por el profesor es decidible, cuestión que no se cumple ni siquiera en la Aritmética. Un ejemplo que podemos creer cierto es el siguiente: Supuesto que cada uno de los objetos del universo, observable o no, está compuesto por un número finito de átomos y supuesto que somos capaces de extraer un átomo de cada objeto, nos preguntamos si podríamos formar un objeto con todos esos átomos extraídos. Sin duda, al considerar al universo como un conjunto de objetos la dificultad pesa sobre si ese conjunto universo es finito o no.

También suele ocurrir que el estudiante cree que un problema no puede estar sobre- saturado de información. Es decir, cree que tiene la información precisa para ser resuelto de alguna forma. Proponemos un ejemplo como muestra que se puede experimentar con facilidad: Solicitar la medida de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo y en lugar de dar una terna pitagórica para los tres lados, se presenta otra terna muy parecida que no es pitagórica. El estudiante debería analizar los datos y responde que la solución del problema es que “no tiene solución”. Esto es así debido a que con ese enunciado no se cumple el requisito fundamental que es el teorema de Pitágoras del triángulo rectángulo. El lector no debería sorprenderse si un estudiante de Enseñanza Secundario o Bachillerato le comunica unas medidas angulares. Aquí debemos aclarar que algunos autores como Larios (2000) establecen una diferencia entre un problema y un ejercicio, dándole un carácter al ejercicio de situación que se resuelve a través de procedimientos rutinarios que conducen a la respuesta. La verdad es que entendemos si un ejercicio de un texto remarcado fuera del contexto de un tema concreto se transforma en problema o sigue siendo ejercicio. Además, el calificativo de rutinario pudiera ser para el profesor pero no, necesariamente, para el estudiante. Como ejemplo podría indicarse la determinación del número de ceros de una función real de variable real en un determinado intervalo.

Se podría entender que todo aquello que no sea aplicar las leyes lógicas y la inducción pudiera, desde un primer instante, quedar al margen de las matemáticas para un estudiante. Así pues, surge una cuestión de interés educativo: ¿Cómo puede llegar un estudiante a sospechar que un problema, o su negación, tiene una solución? Otra cosa es si éste es capaz de establecer una resolución deductiva. Por ejemplo, si a un estudiante se le solicita que estudie un límite de una función en un punto, casi siempre entenderá que ese límite existe, cuando pudiera ser que no existiera como en el caso de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto 0. ¿Quién puede afirmar que si un estudiante no expone una resolución deductiva es por falta de conocimiento? Nosotros no podemos afirmarlo, puesto que en algunos casos confundimos la falta de maña del estudiante con la falta de conocimiento. Un ejemplo donde esto se suele apreciar es cuando a un estudiante se le solicita una acotación de alguna expresión numérica o algebraica; por ejemplo esos famosos épsilon que hay que asegurar eligiendo un delta adecuado que muchas veces es una fracción de ese épsilon.

Sin querer generalizar recomendamos mirar los problemas o los ejercicios de los cuestionarios referenciados de muchos artículos de la literatura educativa para confirmar que todos esos problemas poseen solución. La encuentren, o no, los estudiantes encuestados. Así pues, un estudiante no reconocerá como problema una cuestión que no sea una aplicación directa de los resultados teóricos que estudia; lo

que Larios (2000) denomina ejercicio. De Guzmán (2007) indica como “verdaderos problemas” a lo que Larios (2000) denomina problemas.

Vías heurística y simbólica de un primer paradigma

Un ejemplo de problema no reconocible como problema por el estudiante es el siguiente: Utiliza el libro El Principito para decirme la primera palabra de la hoja cuyo valor es el triple de la suma de sus dígitos.

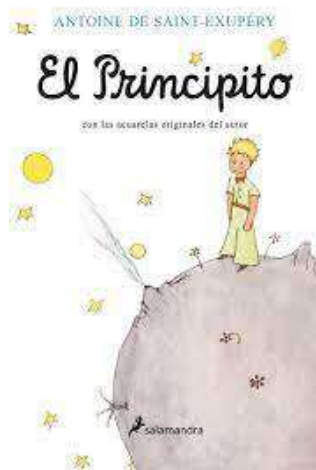


Figura 2: Buscar la página indicada

Hemos elegido este primer problema porque se le puede plantear a cualquiera persona y puede ser resuelto por un estudiante de Enseñanza Primaria, de Enseñanza Secundaria, de Bachillerato y de Enseñanza Universitaria. La gracia de este problema es su enunciado donde no se facilita ningún dato numérico y que atañe a conocimientos básicos de aritmética entera.

Desde luego, la expresión Problema tiene diferentes significados para las distintas teorías didácticas. Poyla (1962) describía a un problema como una situación que requiere buscar conscientemente alguna acción adecuada para lograr un objetivo claro en su concepción y que no se alcanzara inmediatamente. Algunas teorías sustituyen la expresión Problema por alguna otra expresión contenida y básica en los fundamentos de esa teoría. Charnay (1994) declara que un problema, para un estudiante, puede ser observado como una terna de componentes: situación, alumno y entorno. Además, añade que el problema existe sólo si un estudiante percibe su dificultad. Así pues, parece indicar que los problemas son inherentes al aula. Por otra parte, Schoenfeld (1985) indica que un problema es una relación binaria entre un individuo y una tarea. Precisamente por esto indica que la dificultad de definir el término problema no esta absolutamente relacionado con la Matemática.

La muestra de interpretaciones nos indica que la palabra problema puede significar muchas cosas distintas y con más de una característica dentro de una lista. Sin embargo, en este artículo utilizamos una interpretación general, y accesible a cualquier persona, la que está recogida en el diccionario de la RAE, pues dudo que un estudiante de Enseñanza Secundaria o Enseñanza Universitaria tenga otra concepción distinta de lo que es un problema.

Dice la RAE de **Problema**: “Planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos.” Aunque también añade la acepción; “Cuestión que se trata de aclarar.”

Que hay problemas y ejercicios en la Matemática es una cuestión fundamental en el aprendizaje de los estudiantes. Pero la existencia de estudiantes que llegan a creer que resolver un problema dentro de una teoría es una cuestión de práctica algorítmica y combinatoria de resultados conocidos (teoremas y proposiciones), nos hace pensar que esto no es espontáneo en ellos y que es consecuencia del proceso de enseñanza-aprendizaje elegido por el profesor. Además, esto muestra que esa elección no es totalmente adecuada o hay algo que no estamos haciendo bien.

Una visión totalmente idealizada de la demostración rigurosa de los resultados impiden ver que muchos problemas son formalizados después de tener alguna idea muy imaginativa que denominamos *idea feliz*. ¿Cómo se pueden tener ideas felices de una forma natural? La generación de tales ideas no suelen ser espontáneas ni el estudiante ni en el profesor, por ello, hay que buscar por otras vías como la heurística y la simulación mucho antes que intentar la resolución inductiva-deductiva. Esta resolución matemática debe quedar como un producto final de un largo proceso.

El diccionario de la RAE describe **Heurística** como “*Técnica de la indagación y del descubrimiento*”, aunque también recoge “*Búsqueda o investigación de documentos o fuentes históricas.*” Además indica que en algunas ciencias la heurística se entiende como “*Manera de buscar la solución de un problema mediante métodos no rigurosos, como por tanteo, reglas empíricas, etc.*” Esta última será la definición que emplearemos en este trabajo.

Como bien se puede entender la forma de buscar una solución a un problema no es necesariamente resolver un problema en Matemáticas. Polya (1997) interpretaba que la heurística que pudiera emplear un estudiante se centraba en encontrar y buscar soluciones y disfrutar de la experiencia de cómo actividad. Además, interpretaba que la heurística requiere que se produzca una búsqueda creativa, en cierta medida basada en la experiencia y fruto de una investigación racional puntual.

Hay muchos autores que hacen referencia e estrategias heurísticas a nivel educativo haciendo referencia a diversas forma de intentar buscar una supuesta solución particular, o una aproximación parcial a una solución. En general, son denominadas estrategias heurísticas si se aplica una regla que bien pudieran no ser usable como directriz de búsqueda general y no directrices pero que tiene un uso específico.

Se está utilizando una estrategia heurística si se restringe convenientemente el conjunto de datos de un problema para que al estudiante se le facilite la búsqueda de soluciones. También se considera un heurístico si se elige un camino más o menos aleatorio al buscar una solución numéricamente, es decir, utilizar la técnica de ensayar una situación y comprobar si se produce error o no. Por ejemplo, en Tejada(2017) se asume el tanteo y error como técnica heurística en educación.

En general, se suele catalogar de heurística una estrategia, a un método, a un criterio o algún truco usado para hacer más sencilla la solución de problemas difíciles. Si bien el término heurístico lo uso por primera vez A. Einstein en un artículo sobre la luz, fue G. Polya quien lo hizo popular al indicar en Polya (1965) que el fundamento de la heurística es estar acostumbrado de resolver problemas y observar cómo otros resuelven problemas. Además, da una lista de reglas de utilidad ante la dificultad de afrontar la resolución de un problema.

Hoy en día se habla del conocimiento heurístico como de un tipo especial de conocimiento usado por los humanos para resolver problemas complejos (Wikipedia).

Para hacer frente heurístico a nuestro paradigma empleamos la simple búsqueda en bruto, pero con medios tecnológicos. Definimos una pila de objetos de GeoGebra de manera que las páginas del un libro quedan marcadas por tres deslizadores, uno para las unidades, U_1 , otro para las decenas, D_{10} , y otro para las centenas, C_{100} . Cada uno de estos deslizadores sólo toman los valores enteros desde el 0 al 9 de forma que se construyen los números $100C_{100} + 10D_{10} + U_1$ y $3(U_1 + D_{10} + C_{100})$ al manipular los deslizadores. Ahora la búsqueda heurística es muy simple, puesto que sólo se requiere manipular sistemáticamente las posiciones de los deslizadores de manera que esos dos números coincidan.

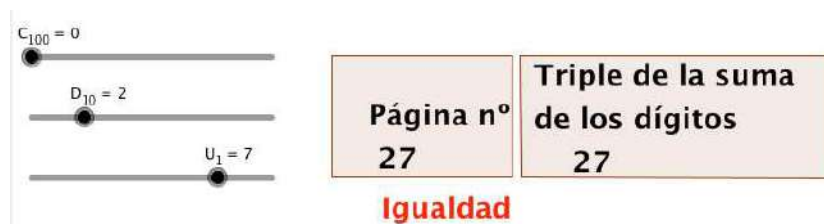


Figura 3 Aplicación heurística con GeoGebra para el primer paradigma.

Es claro que en esta actuación se ha utilizado un registro de representación metafórico, puesto que un número es sustituido los valores que tienen tres deslizadores independientes. A su vez, cada deslizador es un registro de representación analógico dado que el valor de cada unidad se entiende como la posición de un punto del intervalo que define el deslizador.

Esta es una de las posibles vías heurísticas que el profesor puede presentar para afrontar el problema y para que el estudiante tenga la certeza de que la solución existe. Así pues, al estudiante le queda emplear el método matemático de resolución del problema.

Otra forma de llegar a la certeza de que el problema posee solución es empleando la vía de la simulación. El diccionario de la RAE describe **Simulación** como “*acción de simular*” y **Simular** como “*representar algo, fingiendo o imitando lo que no es.*”

Para este paradigma emplearemos otra aplicación en GeoGebra y haremos referencia a los registros de representación simbólico, algebraico y gráfico. El simbólico se reconoce al empleas como número de una

página una variable real x que está definida en el intervalo $[1,99]$, aunque también aparece el registro analógico al hacer la trasposición de una incógnita entera por una variable real. El registro algebraico se reconoce en las expresiones de las unidades $[x] - 10 \left\lfloor \frac{[x]}{10} \right\rfloor$ y de las decenas $\left\lfloor \frac{[x]}{10} \right\rfloor$, donde $[x]$ representa la parte entera del número real x .

El registro gráfico es notorio al representar las gráficas de la función $f(x) = x$ y la función $g(x) = 3 \left([x] - 9 \left\lfloor \frac{[x]}{10} \right\rfloor \right)$.

Con esos elementos definidos, se realiza la búsqueda de algún punto en común de esas dos gráficas, puesto que un posible punto común implica encontrar una solución al problema. Dada la naturaleza de función g discontinua en los valores enteros, hacemos uso de un deslizador que toma valores enteros desde 1 al 99 y que hace mostrar un punto rojo y comprobar que se trata de un punto común. En la figura 4 parecen existir dos puntos en común, pero el uso del deslizador muestra que sólo hay uno.

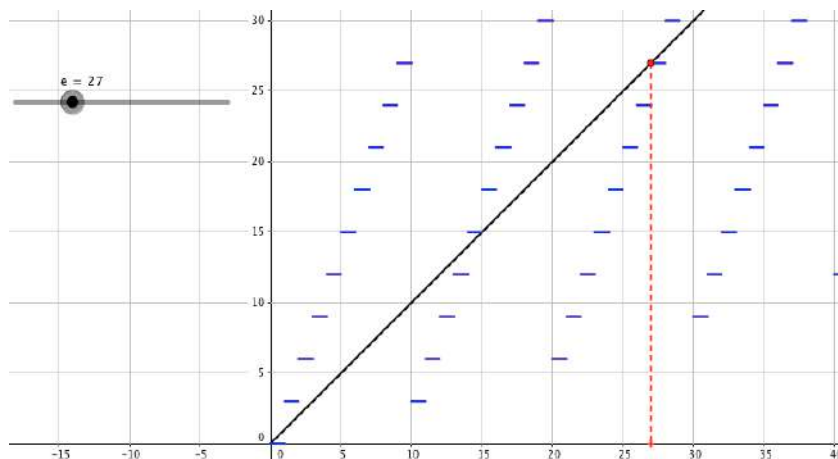


Figura 4. Determinación gráfica de solución al primer paradigma.

Esta vía simulada otorga al estudiante la certeza de que la solución existe y sólo le queda describir la resolución mediante el método tradicional. Ahora bien, esta simulación está pensada más para que el profesor se la muestre a sus estudiantes, puesto que de inicio un estudiante no usará funciones definida a trozos como la función g .

Aquí destacamos que el paso inicial para resolver un problema es tener la convicción de que ese problema tiene solución. También destacamos que tener cierta creencia de que existirá solución a un problema no es nada fácil, al menos para el profesor. En el caso del estudiante es distinto, puesto que entiende que en el contrato didáctico del profesor y el estudiante figura la seguridad de que el profesor propondrá problemas que poseen solución y podrá resolver.

Dos preguntas emergen sobre la heurística y sobre la simulación. La primera es ¿Conoce el estudiante el uso sistemáticos de estas vías? La respuesta es negativa si el profesor no las emplea en el aula. La segunda: ¿Tiene el estudiante capacidad para afrontar por sí sólo este tipo de acercamiento? Al estudiante se le presupone la capacidad de aprender, por lo tanto puede aprender este tipo de acercamientos. Además, esa capacidad será reconocida si el profesor fomenta el uso de esas vías, al ser estos acercamientos muy estéticos empleando tecnologías informáticas. Estas forma de vías serán aprendidas de la misma forma y al mismo tiempo que se aprenden los contenidos matemáticos. Con la utilización de estos métodos le mostramos al estudiante que la Matemática tiene una componente experimental aunque se tenga que hacer una comunicación formal.

Vías eruditas del primer paradigma y experimentación con profesores

Si bien el libro elegido para este problema tiene menos de 100 páginas, entendemos que el problema debe ser resuelto para problemas con menos de 1000 páginas, pues mas de ese número de páginas hay pocos libros de acceso general. Este mismo problema con otro libro se lo propusimos a una muestra de 16 profesores de Enseñanza Secundaria que fueron estudiantes de mis dos cursos de Formación Permanente del Profesorado; cursos de actualización continua del profesor de Matemáticas. El objetivo que nos propusimos es ver cómo se desarrollaban esos profesores de la muestra, pues son la punta de lanza antes de que estas vías sean adoptada por sus estudiantes. Se les presentó el problema como primer reto al cual debían contestar, y nosotros esperábamos la respuesta correcta desde el punto de vista matemático siguiendo un método algebraico.

La vía matemática para resolver este problema deberá seguir los pasos del método deductivo de la Escuela de Atenas, para ello, se hace hincapié en el significado de la escritura posicional decimal de un número.

Consideradas las unidades U , las decenas D y las centenas C , entonces se cumple la igualdad $100C + 10D + U = 3(U + D + C)$ con la restricción $U + D + C < 28$ puesto que $U, D, C \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Así pues, resolver el problema consiste en resolver el sistema diofántico formado por una ecuación y una inecuación de tres variables
$$\begin{cases} 100C + 10D + U = 3(U + D + C) \\ U + D + C < 28 \end{cases} .$$

También puede verse como una ecuación lineal con una restricción. Precisamente esa restricción impone que el número de centenas sea 0, con lo cual queda la ecuación $7D = 2U$. Como $\text{mcd}\{2,7\} = 1$, entonces

la única solución posible es
$$\begin{cases} U = 7 \\ D = 2 \\ C = 0 \end{cases} .$$

En la experimentación resultó que todos los profesores dieron la solución correcta, 27, aunque se restringieron a libros de menos de 100 páginas. Doce profesores escribieron una única ecuación con tres incógnitas; $10D + U = 3(U + D)$. De esta ecuación obtuvieron la ecuación $7D = 2U$, que fue resuelta de forma heurística, es decir, por prueba y error. Esto fue así, puesto que nadie hizo referencia a que $\text{mcd}\{2,7\} = 1$ y la divisibilidad entera. Los cuatro restantes no expusieron el método de resolución.

Una vez que contestaron 27, se les preguntó la existencia de otras páginas que cumplan una misma propiedad. Cuatro profesores creían que había otras páginas que cumplieran esa propiedad en libros de 1000 páginas, o más.

Antes de darles la resolución formal del problema, les propusieron nuevos retos cuando se generalizó la propiedad de ser igual a $3(U + D + C)$ y se cambió por $4(U + D + C)$, por $5(U + D + C)$,... hasta $9(U + D + C)$. Nuevamente todos dieron la solución correcta intentando seguir el método que habían utilizado anteriormente.

Queda patente este problema de Matemáticas Recreativas puede ser abordado desde diversas perspectivas, incluso la formal, otra cosa es que la resolución sea más o menos rigurosa. Destacamos que se asumió ese enunciado sin datos como problema a resolver y que los profesores no tuvieron reparo alguno en entender lo que significaba resolver ese problema. Nos sorprendió que a la vista de la solución erudita, los profesores no situaban al problema en alguna parte del currículum académico que desarrollaban con sus estudiantes en clase. La razón era simple se trataba de un sistema formado por una ecuación y una inecuación y ese tipo de sistemas no se trataban en secundaria. Sin duda, algo hicimos mal en la experimentación.

En este trabajo hemos asumido la definición del diccionario de la RAE sobre la palabra Problema: *“Cuestión que se trata de aclarar”* y asumimos la Resolución de Problemas como la acepción de Problema del diccionario: *“Planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos.”*

Algo tradicionalmente reconocido como el concepto de Problema que se plantea de alguna forma como una pregunta que bien puede ser descrita mediante un posible enunciado, no es reconocido tan fácilmente en algunas teorías didácticas, puesto que la forma de presentar el problema parece ser esencial, cuando básicamente un problema es una pregunta que puede formular cualquiera y que éste no sabe la respuesta de antemano.

Si la idea de problema puede ser más o menos genérica, resulta que en Gascón (1994) se escribe sobre la notable ambigüedad en la terminología “resolución de problemas”. Este autor indica que existe una convicción ampliamente compartida por la comunidad matemática de que la resolución de problemas juega un papel fundamental en la enseñanza de las matemáticas, pero resalta que el término resolver un problema de matemáticas depende esencialmente del modelo epistemológico de los términos: problema, enseñar y aprender. De Guzmán (2007) indica que con la resolución de problemas se intenta transmitir aquellos pensamiento de utilidad en la resolución de problemas, y esto se hace de forma sistemática.

En ese trabajo se recogen distintas interpretaciones de la cuestión, que el autor denomina perspectivas de la resolución de problemas. En este caso, simplemente hemos entendido que resolver un problema es dar una respuesta adecuada al reto planteado mediante un enunciado más o menos preciso. Además, aceptamos la idea ampliamente reconocida por todos los profesores: “hay que resolver problemas en Matemáticas”, y es por ello, que todo aquel que estudió hace tiempo matemáticas, recuerda los problemas que contaba su profesor de Matemáticas, al menos algún enunciado.

Acercamientos al segundo paradigma

Si bien el primer problema se trató con un grupo de profesores con el objetivo de que se concienciaran de las dos vías remarcada y la importancia que pudieran tener en su labor profesional, no podíamos dejar pasar de actuar según esas vías con los estudiantes. Por ello, consideramos que un segundo problema pueda ser iniciado mediante estas vías con estudiantes directamente.

La elección de este ejemplo está motivada, por un lado, por tratar dos conceptos tan importante en Matemáticas como son el de variable real y el de función real de una variable real. Por otro, por un ser problema que se puede ser resuelto desde la Enseñanza Primaria hasta Enseñanza Universitaria sin muchas consideraciones. Además, el enunciado no aporta dato numérico alguno como en el caso anterior. El enunciado es: Determina la distancia a la que está una hormiga que avanza por un cuadrado, de un determinado vértice en función de lo recorrido por la hormiga.

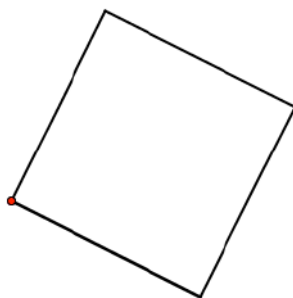


Figura 5: Recorrido posible en el segundo paradigma.

Es evidente que se entiende que la hormiga sólo puede moverse por el perímetro del cuadrado. En esta situación, remarcamos que la hormiga puede disponer de tiempo que precise para moverse o puede estar parada, puesto que no el tiempo la variable independiente que utilizamos. Lo único que no puede hacer la hormiga es retroceder. Una cuestión que pudiera ser elemental, pero que el estudiante no tiene claro desde el inicio, es el sentido del recorrido no modifica la expresión de la función distancia al vértice. Esto es un primer resultado heurístico obtenido al realizar una secuencia de medidas de la distancia en uno y en otro sentido.

Al ver el cuadrado de la figura 5 pudiera pensarse que el estudiante de Enseñanza Primaria pudiera tener dificultades para afrontar este problema, pero esto no es así puesto que el resultado de mayor nivel que se requiere es el teorema de Pitágoras. El principal escollo que encuentra un estudiante de Enseñanza Secundaria con esa figura es que cree que debe utilizar la expresión que determina la distancia entre dos puntos del plano, pues la figura es plana y se solicita la distancia entre dos puntos.

En muchas ocasiones disponer de un dibujo, o boceto, permite al estudiante ejemplificar una situación concreta, esta es una de las reglas de Polya. Un profesor debe forzar la situación para que el estudiante dibuje un cuadrado de lados no paralelos a los márgenes de folio donde dibuja, puesto que suele dibujar un cuadrado de lados paralelos a los márgenes, sobre todo si es de papel cuadriculado. En esencia, da lo mismo como lo dibuje, pues en este problema sólo interviene el cuadrado y un vértice de éste y lo que mide la distancia recorrida por la hormiga. Una lista de objetos declarados en GeoGebra permitirá simular la resolución del problema cuando se asigna una medida al lado.

Laboratorio de Simulación Matemática
 Distancia de un punto a otro de un cuadrado
Miguel Delgado Pineda. 2020

UNED	Facultad de Ciencias	D. Matemáticas Fundamentales	π -Mat
------	----------------------	------------------------------	------------

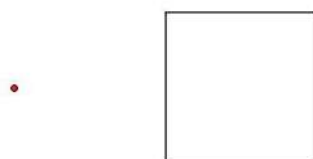


Figura 6: Imagen inicial de la simulación GeoGebra

Al interactuar con la aplicación para elegir el vértice, la longitud del lado, 2, y modificar la posición de la hormiga mediante un deslizador que toma valores entre 0 y 1 con un salto de 0.01, se pueden obtener dos aproximaciones a los registros gráfico y tabular de la función solicitada, según la hormiga avance por cada uno de los lados. El recorrido se presenta en color verde y la distancia en color azul. El vértice se dibuja en rojo y la hormiga queda representada por el punto negro.

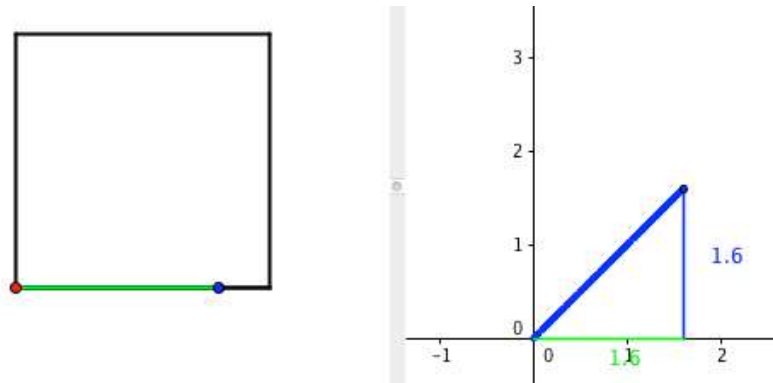


Figura 7: Vista de la simulación según se recorre el primer lado.

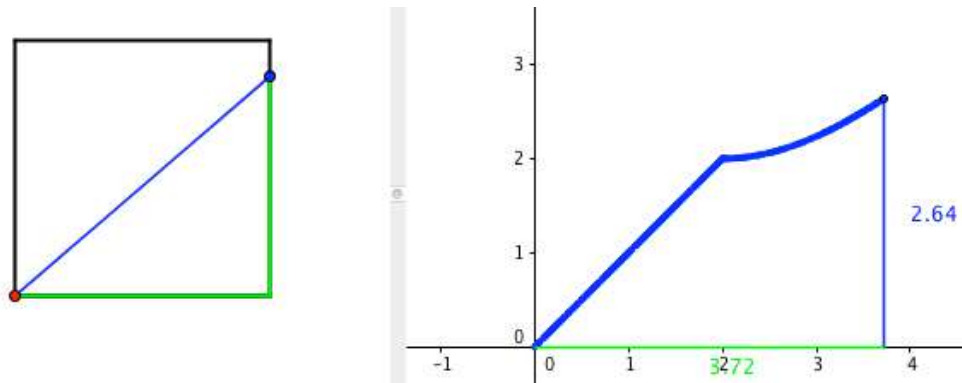


Figura 8: Vista de la simulación según se recorre el segundo lado.

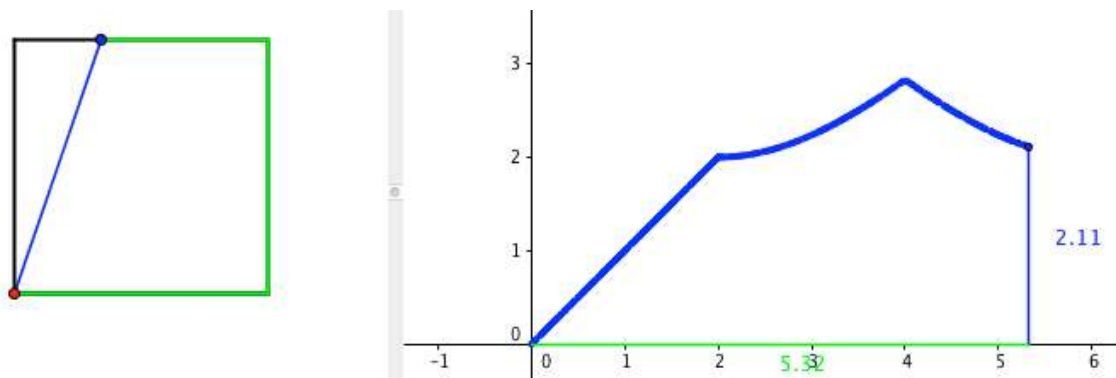


Figura 9: Vista de la simulación según se recorre el tercer lado.

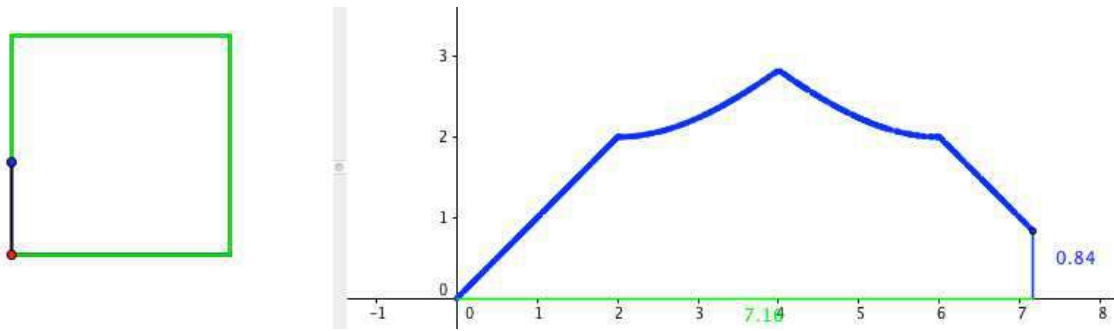


Figura 10: Vista de la simulación según se recorre el cuarto lado.

Debe quedar claro que en este proceso simulado se ha obtenido una aproximación gráfica construida punto a punto. Que nosotros veamos una línea continua es debido a nuestra capacidad visual que no es capaz de distinguir dos píxeles en pantalla muy próximos. También dejamos claro que esta simulación fue mostrada por el profesor en sesión de trabajo en gran grupo después de las actuaciones experimentales de todos los estudiantes.

Un acercamiento heurístico fue experimentado con estudiantes universitarios mexicanos bajo la supervisión de la doctora Magally Martínez Reyes (UAMEX, México) con la que ya hemos publicado varios artículos en relación a este problema. Con un primer grupo se experimentó midiendo directamente en cuadrados dibujados en el suelo del patio (una sesión de clase), midiendo en un cuadrado dibujado en la pizarra blanca (otra sesión de clase) y utilizando las herramientas de medida de Geogebra en un cuadrado dibujado en la pantalla de otro computador (otra sesión de clase). Se tuvo una muestra de treinta y cuatro estudiantes de Ingeniería de Computación (primer curso) que se distribuían en grupos de cuatro o cinco componentes. Una sesión de clase sirvió para hacer la reunión de todo el grupo en conjunto, mostrándose la simulación anterior.



Figura 11: Vista de los experimentos con 34 estudiantes de Ingeniería de Computación.

Similar experiencia se realizó con otro grupo de sesenta estudiantes de Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones análogamente agrupados. En esta ocasión dibujaron un cuadrado directamente en la tierra y midieron en la sesión fuera del aula.



Figura 12: Vista del experimentos con 60 estudiantes de Ingeniería de Electrónica.

Todos los grupos de estudiantes tuvieron un primer escollo que fue dibujar un cuadrado, cosa que en general no es nada fácil aunque pudiera parecerlo. En la experimentación se les dotó de un protocolo que debían comprobar antes de hacer mediciones. También se les presentó otro protocolo que debían rellenar adecuadamente para hacer una secuencia de medidas del recorrido y de la distancia. En la figura 13 hay una respuesta gráfica construida por un grupo de esos estudiantes que puede servirnos de ejemplo.

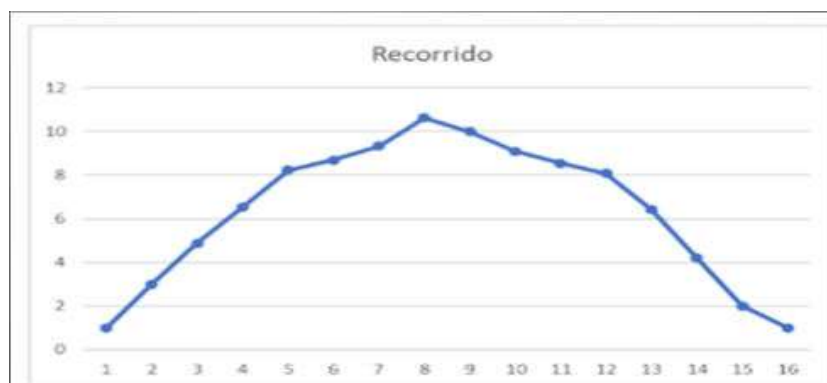


Figura 13: Respuesta gráfica de un grupo de estudiantes de Ingeniería.

Conviene analizar la respuesta gráfica de la figura 13. Es claro que se realizó una secuencia de dieciséis medidas del par (recorrido, distancia). Parece que se realizaron sobre un cuadrado de lado cuatro unidades de algún tipo, realizando cuatro anotaciones por lado. Ahora bien, esto no es así puesto que trabajaron con un cuadrado de lado unidad. La gráfica mostrada se construye al tomar subdivisiones de los lados de igual longitud y en lugar de mostrar longitudes de recorrido y distancia muestra número de subdivisiones y distancia, sin hacer referencia al cambio de escala en cada eje.

También se observa que la realización de las medidas de las distancia no fueron correctas del todo, es decir, hubo errores. Esto se debe a varias causas: error producido al medir, error al anotar medidas y error al graficar los puntos de esa esa secuencia, puesto que los cuadrados cumplían los requisitos del protocolo establecido. Esto nos permite afirmar que un proceso heurístico no es algo que se pueda ejecutar sin la debida atención y evitar no producir efectos indeseados. Experimentar si, pero con mucho cuidado. El simple hecho de obtener un cuadrado base de la experimentación debe ser eso, un cuadrado y no algo parecido.

En realidad los estudiantes obtuvieron un registro tabular del que intentaron obtener un registro gráfico. Nos sorprende por un lado que unos estudiantes universitarios realizaran interpolación lineal entre dos puntos consecutivos. Esto refleja la forma en la cual se enfrentaron al concepto de función en sus primeros momentos en otros niveles académicos. Por otro lado que se interpoló sin hacer referencia a la continuidad de la función y se dibujo continua sin ninguna explicación.

Es claro que las cuatro primera medidas y las cuatro últimas se corresponde con dos tramos rectos, pero las otro ocho medidas no correspondieron a tramos rectos. Ese detalle no incomodó a los estudiantes ni generó la necesidad de una revisión de las medidas realizadas, incluso después de interpolar. Los estudiantes no emplearon una nube de puntos más fina en esos tramos no rectos para asegurar un acercamiento más preciso en esos tramos. Esto nos indica que aunque los procesos sean heurísticos el profesor debe enseñar la forma correcta de ejecutarlo para que estos acercamiento sean útiles de verdad.

Ningún grupo ofreció una expresión explícita de la función buscada. La función respuesta no es de expresión única puesto que es una función definida a trozos. Los estudiantes buscaban una expresión única y ninguna de las funciones conocidas tenía una gráfica similar. Se trata de función no negativa acotada, continua en su dominio, no derivable en algunas partes de su dominio, justo para los valores del recorrido en los que la hormiga cambia de lado.

Si la hormiga sólo recorre una única vez ese perímetro y la medida del lado es 2, se trata de la función la de la figura 14.

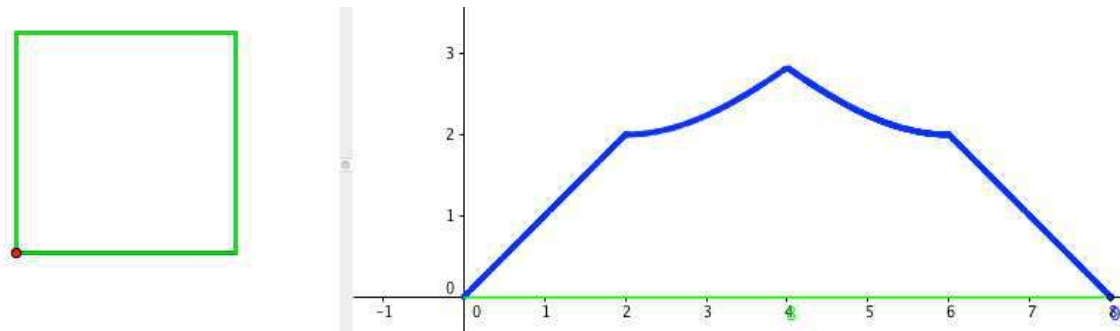


Figura 14: Gráfica de la función a una vuelta.

Si la hormiga recorre indefinidamente ese perímetro y la medida del lado es l , entonces es una función cuyo dominio es toda la semirrecta $[0, \infty)$, periódica de periodo $4l$, con puntos máximos locales para los valores del recorrido $(4k + 2)l$ y puntos mínimos en los valores $4kl$ para cualquier k entero positivo. El valor mínimo absoluto es 0 y el máximo absoluto es $\sqrt{2}l$. Su expresión explícita está contenida en la figura 15.

$$f(x) = \begin{cases} x & 4kl < x \leq (4k + 1)l \\ \sqrt{l^2 + (x - l)^2} & (4k + 1)l < x \leq (4k + 2)l \\ \sqrt{l^2 + (3l - x)^2} & (4k + 2)l < x \leq (4k + 3)l \\ 4 - x & 3l < (4k + 3)l < x < 4(k + 1)l \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Figura 15: Expresión explícita de la función sin parada de la hormiga

Conclusiones

Aunque hay diversas interpretaciones didácticas y psicológicas dentro del marco de la Matemática Educativa del concepto Problema de Matemáticas se ha optado por la definición tradicional que recoge el diccionario de la RAE por ser la definición más ampliamente conocida por tradición matemática. Igualmente existen en el ámbito de la Didáctica de la Matemática muchas interpretaciones de lo que representa la expresión Resolución de Problemas, sin embargo, hemos asumimos la concepción de Resolución de Problemas como la respuesta desconocida a un problema que debe obtenerse a través de métodos matemáticos, pues es la más ampliamente divulgada y empleado en el día a día del estudiante, docente e investigador. Es decir, hemos optado por unas interpretaciones tradicionales aunque pudieran parecer ingenuas y no se ajuste a ciertas consideraciones didácticas. Los problemas de Matemáticas existen mucho antes que muchas teorías didácticas.

Una vía tradicional de resolver un problema se puede interpretar un grafo que une los tres vértices de un triángulo de resolución: Problema, Deducción e Inducción. Ese grafo debe unir la base con el otro vértice. Sin duda, se puede entender que se dibujen distintos grafos, de igual forma que de algunos problemas se conocen distintas formas de resolverlo.



Figura 16: Espacio tradicional de la resolución de un problema

Nosotros optamos por un espacio de resolución de un problema no triangular. Nuestra imagen es la de una estrella de cinco puntas, véase figura 17, y si bien la resolución se asemeja a establecer grafo que une las puntas inferiores con la superior. Con esta imagen queremos visualizar la forma de abordar un

problema basado esencialmente en la deducción o inducción. Emplear el método deductivo o el método inductivo es la meta cuando afrontamos la resolución de un problema.

Si bien la meta puede estar oculta de primera mano, no es menos cierto que tratar un problema de forma heurística o de forma simulada nos puede convencer de que existe esa meta. Empleando la analogía del grafo, nadie puede negar que la resolución se puede iniciar con un grafo que une alguno de las dos puntas laterales de la figura 17. Este grafo previo se puede conectar al grafo que une las puntas inferiores con la superior. Así pues, podemos generalizar la idea de resolución de problemas haciendo uso previo de la resolución o de la simulación.



Figura 17: Espacio real de la resolución de un problema.

Cada uno de los ejemplos que se han presentado han sido experimentado; uno con profesores y otro con estudiantes. Sin duda la experimentación muestra que los métodos heurísticos empleados deben ser aprendidos para que tengan eficacia y no queden sepultados entre los errores de medidas en la experimentación. Los profesores deben entender que la Matemática tiene cierto carácter experimental, heurístico o simulado, que deben poner en práctica para que la resolución de los problemas llegue a los estudiantes con la mente abierta al formalismo. En el primer ejemplo, se propuso que los profesores viesan esa matemática experimental como tal y para que les sirviera de referencia en su tarea docente. En el segundo ejemplo, se propuso ver la forma en la cual los estudiantes aceptan esa matemática experimental con el fin de que aprendan la necesidad de formalizar las resoluciones de los problemas. Los resultados indican que es necesario un cambio de cultura del profesor para que ese cambio de cultura pueda anidar en el estudiante.

Referencias Bibliográficas

- Charnay, R. (1994), "Aprender (por medio de) la resolución de problemas", en Parra, C. y Saiz I., *Didáctica de la Matemática. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires, Paidós.
- De Guzmán, M. (2007). Enseñanza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, 19 – 58. España.
- Delgado Pineda, M. (2016). Registros para una función real cualquiera de variable real. *El Cálculo y su Enseñanza*, 6, pp. 1-28. México.
- Duval, R. (1999): Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basis issues for learning. Educational Resources Information Center (ERIC).
- Gascón, J. (1994): El papel de la resolución de problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. *Educación Matemática Vol:6 N: 3*. Noviembre.
- Larios, V. (2000). Las conjeturas en los procesos de validación matemática. Un estudio sobre su papel en los procesos relacionados con la Educación.
- Polya, G. (1962). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Editorial Tecnos. Madrid, España.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* [título original: *How To Solve It?*]. Editorial Trillas, México.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

RAE. Diccionario de la Real Academia Española y de la Asociación de Academias de la Lengua Española. <https://dle.rae.es/>

Derivada Generalizada Local. Aplicaciones con aplicaciones con Núcleos Conformes y No Conformes

Paulo M. GUZMÁN

En esta comunicación, utilizando un operador diferencial conforme generalizado, realizamos un estudio de la solución de la conocida ecuación diferencial que modela un circuito RC. Es un circuito eléctrico que consta de un resistor de resistencia R , un capacitor de capacitancia C y una fuente de tensión dispuesta en serie. En particular, usamos diferentes núcleos, conformes y no conformes en su solución analítica para poder estudiar las propiedades que presenta en cada caso y realizar una comparación con la solución del caso ordinario. Esta solución para cada núcleo se da en términos de una derivada generalizada donde $0 < \alpha \leq 1$. Para mantener la dimensionalidad física de los parámetros involucrados, introducimos un nuevo parámetro que caracteriza la existencia de estructuras generalizadas en la ecuación.

En el año 2018 definimos una derivada generalizada conforme de la siguiente manera (ver [1]):

Definición 1: Dada una función $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, la N -derivada de f de orden α es definida por:

$$N_F^\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon F(t, \alpha)) - f(t)}{\varepsilon},$$

para todo $t > 0$, $\alpha \in (0,1)$ siendo $F(t, \alpha)$ una función. Si f es α -diferenciable en algún $(0, \alpha)$, y

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} N_F^\alpha f(t),$$

existe, entonces:

$$N_F^\alpha f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} N_F^\alpha f(t).$$

Esta definición es una generalización natural de la derivada ordinaria.

La definición 1 es un operador de tipo local, ya que se trata de un límite de un cociente incremental, lo que nos sugiere que su interpretación geométrica debe ser vista de manera similar a la derivada ordinaria: la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(t, f(t))$, y

$$N_F^\alpha f(t) = F(t, \alpha) f'(t),$$

donde f' es la derivada ordinaria de primer orden. El factor $F(t, \alpha)$ nos informa sobre la forma de la curva que representa la coordenada $f(t)$. Más aún, es claro que la influencia del núcleo $F(t, \alpha)$ implica la variación de la velocidad de convergencia, mayor o menor, con respecto al límite del cociente incremental para la derivada ordinaria.

Como antecedente, en el año 2021 hemos publicado un trabajo (ver [2]) donde estudiamos la conocida Ley de Enfriamiento de Newton con operadores diferenciales generalizados conformes utilizando diferentes núcleos.

Esta ley establece que la tasa de pérdida de calor de un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y su entorno.

Puntualmente, lo que afirma la Ley de Newton es que el enfriamiento de un cuerpo es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura instantánea del cuerpo $T(t)$, $t > 0$ y el medio ambiente T_e :

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_e), \quad T(0) = T_0,$$

donde T_0 es la temperatura inicial en $t = 0$.

Reemplazando nuestro operador en la última ecuación, obtuvimos la Ley general de enfriamiento conforme de Newton

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{k^\alpha}{F(t, \alpha)}(T(t) - T_e).$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria con parámetro $0 < \alpha \leq 1$, cuando $T(0) = T_0$, tiene la solución particular

$$F(t, \alpha) = T_e + (T_0 - T_e) \exp\left(-\int_0^t \frac{k^\alpha}{F(s, \alpha)} ds\right), 0 < \alpha \leq 1,$$

donde la función $F(t, \alpha)$ desempeña el papel de un núcleo generalizado.

La solución que encontramos posteriormente la analizamos con diferentes núcleos y realizamos un análisis de los diferentes casos comparándolos entre ellos y con la solución del caso ordinario, destacando las ventajas que se presentan en el caso generalizado.

Referencias Bibliográficas

- [1] Guzmán, P.M.; Langton, G.; Lugo Motta, L.M.; Medina, J.; Nápoles, J.E. A new definition of a fractional derivative of local type, *J. Math. Anal.* 2018, 9, 88–96.
- [2] Vivas-Cortez, M.; Fleitas, A.; Guzmán, P.M.; Nápoles, J.E.; Rosales, J.J. Newton's Law of Cooling with Generalized Conformable Derivatives, *Symmetry* 2021, 13, 1093. <https://doi.org/10.3390/sym13061093>

New results on an exponential fractal derivate

Miguel VIVAS-CORTEZ

**Faculty of Exact and Natural Sciences
School of Physical Sciences and Mathematics
Pontifical Catholic University of Ecuador
mjvivas@puce.edu.ec**

Abstract

In this paper, we establish the versions corresponding to Rolle's Theorem, Mean Value Theorem, and Extended Mean Value for a new fractal derivative. We also found new results associated with this fractal derivative.

Keywords: Fractal Derivative, Fractal Integral, Fractal Exponential Function, Mean Value Theorem.

Introduction

The study of fractional calculus [2, 3] has had an important development during the last century, as well as in the first two decades of this century.

The impact of this study has been reflected in important applications in the branches of pure and applied mathematics, and its applications in engineering have begun to increase substantially during the last two decades.

The Chinese mathematician W. Chen introduces a derivative that involutes fractal geometry with the Hausdorff measure, called the Hausdorff derivative, which has played a fundamental role in the treatment of mathematical models for anomalous diffusion processes.

In 2018, the Hausdorff integral is introduced, thus giving way to the Hausdorff calculus [4, 5] the Chen derivative of a function $g(t)$ is defined by:

$$C^\alpha(g)(t) = \lim_{z \rightarrow t} \frac{g(z) - g(t)}{z^\alpha - t^\alpha},$$

if g differentiable, then

$$C^\alpha(g)(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{\alpha} g'(t).$$

A new definition of fractal derivative of function $g(t)$ is introduced in 2022 [1] as follows:

$$F^\alpha(g)(t) = \lim_{h \rightarrow t} \frac{g(h) - g(t)}{e^{h^\alpha} - e^{t^\alpha}},$$

if g differentiable, then

$$F^\alpha(g)(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{\alpha e^{t^\alpha}} g'(t).$$

In this paper, we demonstrate the respective versions of the mean value theorem and extended mean value theorem for the new fractal derivative given in [1].

Preliminaries and Rolle's theorem

In this section we will give some preliminary results whose proof can be found in reference [1], as well as the proof of the version of Rolle's theorem for the fractal derivative given in definition Definition 1.

Definition 1. Let a function $x: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. The fractal derivative F^α of x of order $\alpha \in (0,1]$ is defined by

$$F^\alpha(x)(t) := \lim_{h \rightarrow t} \frac{x(h) - x(t)}{e^{h^\alpha} - e^{t^\alpha}}. \quad (1)$$

We say x a F^α -differentiable if $F^\alpha(x)(t)$ exists for all $t \in I$.

Example 2. The fractal derivative of certain functions:

- a) $F^\alpha(1) = 0$.
- b) $F^\alpha(t^p) = \frac{pt^{p-\alpha}}{\alpha e^{t^\alpha}}$.
- c) $F^\alpha(e^{t^\alpha}) = 1$.

Theorem 3. [1, Th. 3] If a function $x: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is F^α -differentiable at $t_0 \in I, \alpha \in (0,1]$, then x is continuous at t_0 .

Theorem 4. Let x, y are is F^α -differentiable, then

- a) $F^\alpha(ax + by) = aF^\alpha(x) + bF^\alpha(y)$.
- b) $F^\alpha(\lambda) = 0$, for all constant function.
- c) $F^\alpha(xy)(t) = F^\alpha(x(t)) \cdot y(t) + x(t) \cdot F^\alpha(y(t))$.
- d) $F^\alpha\left(\frac{x}{y}\right)(t) = \frac{F^\alpha(x(t)) \cdot y(t) - x(t) \cdot F^\alpha(y(t))}{y^2(t)}$.

Theorem 5. (Fractal Chain Rule). Let x differentiable and y F^α -differentiable, then

$$F^\alpha(x \circ y)(t) = x'(y(t)) \cdot F^\alpha(y(t)).$$

Lemma 6. Let a function $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differentiable, then

$$F^\alpha(x(t)) = \frac{t^{1-\alpha} x'(t)}{\alpha e^{t^\alpha}}$$

Theorem 7. Let $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a continuous function and F^α -differentiable in $I \subset \mathbb{R}$ for some $\alpha \in (0, 1]$. If $F^\alpha(x(t)) \geq 0$ for all $t \in I$, then x is a non-decreasing function on I . Similarly, if $F^\alpha(x(t)) \leq 0$ for all $t \in I$, then x is a non-increasing function on I .

Proof. If $z \geq t$, then $z^\alpha \geq t^\alpha$ so that $e^{z^\alpha} \geq e^{t^\alpha}$ or $e^{z^\alpha} - e^{t^\alpha} \geq 0$. Therefore,

$$\lim_{z \rightarrow t^+} \frac{x(z) - x(t)}{e^{z^\alpha} - e^{t^\alpha}} \geq 0,$$

we get $x(z) - x(t) \geq 0$. Hence $x(z) \geq x(t)$, for all $t, z \in I, z \geq t$. \square

Theorem 8. (Racetrack Type Theorem). Let $a > 0$, $x, y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ are given functions satisfying:

- a) x and y are F^α -differentiable for some $\alpha \in (0, 1]$;
- b) $F^\alpha(x(t)) \geq F^\alpha(y(t))$ for all $t \in (a, b)$.

We have

(A) If $x(a) = y(a)$, then $x(t) \geq y(t)$, for all $t \in (a, b)$.

(B) If $x(b) = y(b)$, then $x(t) \leq y(t)$, for all $t \in (a, b)$.

Proof. Consider the auxiliary function $z(t) = x(t) - y(t)$. Then z is F^α -differentiable on $[a, b]$ for some $\alpha \in (0, 1]$. From here we obtain that $F^\alpha(z(t)) \geq 0$, for all $t \in (a, b)$, so by Theorem 7, z is a non-decreasing function. Hence, for any $t \in [a, b]$, $z(a) \leq z(t)$, and since $z(a) = x(a) - y(a) = 0$, the results follow.

The similar form, for any $t \in [a, b]$, we have $z(t) \leq z(b)$. Hence, $x(t) - y(t) \leq x(b) - y(b) = 0$ and the results follow. \square

Theorem 9. (Rolle Theorem). Let $a > 0, x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ be a given function, that satisfies:

- a) x is continuous on $[a, b]$;
- b) x is F^α -differentiable on (a, b) , for some $\alpha \in (0, 1]$; and
- c) $x(a) = x(b)$.

Then, there exists $c \in (a, b)$ such that $F^\alpha(x)(c) = 0$.

Proof. We have this using contradiction. From assumptions, since x is a continuous in $[a, b]$ and $x(a) = x(b)$, then exist at least one $c \in (a, b)$, which is a point local extreme. For other hand, how x is F^α -differentiable in (a, b) for some $\alpha \in (0, 1]$, we have

$$\begin{aligned} F_+^\alpha(x)(c) &= \lim_{t \rightarrow c^+} \frac{x(t) - x(c)}{e^{t^\alpha} - e^{c^\alpha}} \\ &= F^\alpha(x)(c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow c^-} \frac{x(t) - x(c)}{e^{t^\alpha} - e^{c^\alpha}} \\
&= F_-^\alpha(x)(c),
\end{aligned}$$

but $F_+^\alpha(x)(c)$ and $F_-^\alpha(x)(c)$ have opposite signs. Hence $F^\alpha(x)(c) = 0$. □

Theorem 10. (Mean Value Theorem). *Let $a > 0, x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ be a given function, that satisfies:*

- x is continuous on $[a, b]$;
- x is F^α -differentiable on (a, b) , for some $\alpha \in (0, 1]$.

Then, there exists $c \in (a, b)$ such that

$$F^\alpha(x)(c) = \frac{x(b) - x(a)}{b - a} \cdot \frac{c^{1-\alpha} e^{-c^\alpha}}{\alpha}$$

Proof. The auxiliary function $y(t) = x(t) - x(a) - \left(\frac{x(b)-x(a)}{b-a}\right)(t-a)$ satisfies all conditions of Rolle's Theorem, therefore, exists $c \in (a, b)$, such that $F^\alpha(y)(c) = 0$. Hence,

$$\begin{aligned}
F^\alpha(y)(t) &= F^\alpha(x(t)) - \frac{x(b) - x(a)}{b - a} \cdot F^\alpha(x(t)) \\
&= F^\alpha(x(t)) - \frac{x(b) - x(a)}{b - a} \cdot \frac{t^{1-\alpha}}{\alpha e^{t^\alpha}}
\end{aligned}$$

Consequently,

$$0 = F^\alpha(y)(c) = F^\alpha(x(c)) - \left(\frac{x(b) - x(a)}{b - a}\right) \cdot \frac{c^{1-\alpha}}{\alpha e^{c^\alpha}}$$

From where

$$F^\alpha(x(c)) = \left(\frac{x(b) - x(a)}{b - a}\right) \cdot \frac{c^{1-\alpha}}{\alpha e^{c^\alpha}} \quad \square$$

Conclusions

In this paper we have found results associated with the fractal derivative given in [1] Sadek and Alaoui, we have found results of the type Rolle, Mean Value, Extended Mean Value, as well as a Racetrack type theorem.

We hope through this research to motivate new results on the fractal derivative, which can go in different directions, such as the study of fractal derivatives in several variables, integral transforms, or differential equations for models with fractal derivatives among others.

The question proposed by Sadek and Alaoui about the physical or geometric interpretation of the fractal derivative given in [1] remains open.

References

- [1] Alaoui, H., Sadek, L. A new definition of the fractal derivative with classical properties. 2022. HAL
- [2] Guzman, P., Lugo, L., Nápoles Valdés, J., & Vivas-Cortez, M. (2020). On a new generalized integral operator and certain operating properties. *Axioms*, 9(2), 69. doi:10.3390/axioms9020069

- [3] Vivas-Cortez, M., Nápoles Valdés, J., Hernández, J., Velasco, J. and Larreal, O. (2021). On non-conformable fractional Laplace transform. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 15(4), 403–409. <https://doi.org/10.18576/amis/150401>
- [4] Chen, W. (2006). Timespace fabric underlying anomalous diffusion. *chaos, Solitons & Fractals*, 28(4), 923-929.
- [5] Chen, W., Sun, H., Zhang, X. & Koroak, D. (2010) Anomalous diffusion modeling by fractal and fractional derivatives. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(5), 1754-1758.

Tecnología y Educación Matemática Trayectorias Inseparables

Teresa LOIACONO
teresaloiacono@yahoo.com.ar

Resumen

Tratando de reflexionar sobre la importancia de las tecnologías en la educación, que sin duda llegaron para quedarse, principalmente en lo relativo a la educación matemática, viajaremos en el tiempo desde la máquina de Turing hasta la gran revolución que significó Internet en la sociedad. Reflexionaremos sobre su repercusión en la forma de comunicarnos y de acceder a la información y como este invento aceleró el desarrollo de tecnologías que paulatinamente se fueron introduciendo en la educación. Asimismo, como estas impactaron de manera integral en la misma y especialmente en el caso argentino. Exploraremos como el vertiginoso progreso del conocimiento científico y tecnológico, nos obligó a repensar la forma de educar y por lo tanto al sistema educativo en su conjunto. En este andar, las instituciones educativas debían adecuarse para atender y responder a las nuevas demandas de su entorno. Nos abocaremos a algunas tecnologías que podemos usar dentro del aula, fuera de ella y en simultáneo. Citaremos especialmente al ChatGPT y GPTcero.

Palabras Clave: Turing, Internet, WWW, tecnologías educativas.

INTRODUCCIÓN

Hacia fines de la década de los 90 los debates acerca de la formación de los educadores del siglo XXI, exigía que éste, mediante el intercambio de ideas y la reflexión, se convierta en el gestor didáctico de su aula, con ese fin era necesario que pueda aprovechar las enormes posibilidades que brinda la incorporación de los avances tecnológicos. Comienza la necesidad de crear las condiciones para que los docentes incorporen en sus clases las Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación (TICs).

Hablar de las tecnologías se hace impensable sin hablar de matemática. Desde sus inicios sus caminos estaban unidos. Nos remontaremos a los inicios de la computación y como fueron impactando los avances tecnológicos en la formación de educadores y en la enseñanza misma.

ANTECEDENTES HISTÓRICOS

Los orígenes de la computación se deben al matemático y lógico inglés **Alan M. Turing**. Hacia 1933 su objeto de estudio era la fundamentación de la lógica matemática, con ese fin se dedicó al estudio de los trabajos de lógica de **Russell** y **Whitehead** y fundamentalmente en los de la Escuela Formalista. Por esa época, **Hilbert**, máximo exponente de los formalistas, se planteaba “*si era posible encontrar algún método o proceso por el cual pudiera decidirse si cualquier afirmación matemática era probable*”.

Turing, buscando una respuesta a ese problema, comienza a trabajar con las funciones recursivas. En 1936 formaliza los conceptos de “algoritmo” que le permite crear la primera computadora abstracta, llamada “**Máquina de Turing**” y sentar las bases para el desarrollo de la computación digital y el nuevo campo de la inteligencia artificial.

Los trabajos del lógico inglés, permitieron que la matemática **Ada Lovelace** y **Charles Babbage**, comenzaran a trabajar en lo que sería el primer algoritmo destinado a ser procesado por una máquina, por lo que se la considera como la primera programadora de computadores.

En 1944 la empresa IBM construye la computadora electromecánica **Harvard Mark I**, que permitió con posterioridad que Inglaterra construyera los computadores **Colossus**, con el objetivo de descifrar las comunicaciones de los alemanes durante la Segunda Guerra Mundial.

Los avances continuaron y en 1946 en la Universidad de Pensilvania se pone en funcionamiento la primera computadora electrónica de propósito general.

¿Qué ocurría en Argentina?

A fines de la década del 50 y comienzo de los 60, el **Dr. Manuel Sadosky**, director del Departamento de Matemática, de la Universidad de Buenos Aires (UBA), planteó dos ideas cruciales: *obtener una computadora para la Facultad*, que sirviera tanto para los trabajos científicos como para otro tipo de tareas y *crear un Instituto de Matemática Aplicada*, que sirviera de base institucional para el uso de la computadora.

En 1960, llega Buenos Aires, Clementina, la primera computadora en UBA. Pero aún no había profesionales para su puesta en funcionamiento, recién en 1961 comienza a prestar servicio.

Dos años después, se crea la carrera de Computador Científico.

Clementina trabajaba en forma semejante a un teletipo. Posteriormente se le adaptó un lector de tarjetas perforadas de fabricación nacional, que facilitaba el ingreso de datos y crear el primer lenguaje de computación argentino, llamado **COMIC**. Dejó de funcionar a mediados de 1971.

Internet

En 1958, en Estados Unidos, el ministerio de defensa, fundó la agencia ARPA (Advanced Researchs Projects Agency). Tenía como fin, diseñar un proyecto para crear una red de ordenadores, denominada ARPANET. Sus científicos comenzaron armando una red entre 40 ordenadores localizados en distintos lugares y demostraron que el sistema era operativo. Este avance provocó que entre 1974 y 1982 se crearan gran cantidad de redes.

En 1982, ARPANET adoptó el protocolo **TCP/IP** (Protocolo de Control de Transmisión/ Protocolo Internet) Estas siglas es una denominación que permite identificar al grupo de protocolos que hacen posible la transferencia de datos entre redes y ordenadores. En aquel momento se creó **Internet**. Su aparición modificó el modo en que nos relacionamos con las personas, las cosas, el mundo y un gran avance tecnológico. Posibilitó a Tim Berners-Lee y un grupo de científicos del CERN (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire) en Ginebra, interesados en poder buscar y mostrar fácilmente documentación a través de Internet, diseñar un navegador/editor al que llamaron de **World Wide Web (WWW)**.

En 1991 esta tecnología fue presentada al público, revolucionando la forma en que las personas buscan información.

La aparición de Internet y una mayor accesibilidad a una computadora, motivó que las tecnologías fueron ocupando un papel importante en la educación, como quedó en evidencia en la época de pandemia.

LAS TECNOLOGÍAS EN EDUCACIÓN

El camino de las tecnologías, desde que Turing comienza a trabajar con funciones recursivas y diseñar su *Máquina*, estuvo unido a la matemática y la educación. Los avances tecnológicos y científicos se fueron sucediendo con gran celeridad, facilitados por una rápida difusión. Fue necesario crear carreras en computación y afines. Formar profesionales que las puedan dictar. *¿Qué ocurría con la educación matemática?*

La Educación Matemática en el Tiempo

A mediados del siglo XX

En el año **1958**, durante el Congreso Internacional de Matemática, se plantea la necesidad de una reforma en los métodos educativos empleados en Europa. Algunos de los conceptos a introducir por tal reforma, fueron: la teoría de conjuntos, adopción del simbolismo moderno, estructuras algebraicas, sistemas axiomatizados. Había que adecuar la formación matemática al desarrollo científico y tecnológico y reducir la brecha entre la matemática preuniversitaria y universitaria. Cuando comienzan a implementarse, no todos los docentes estaban preparados, no comprendían el fin ni el porqué de los mismos. Sobreviene una crisis en la enseñanza de la matemática. En Simposios, Jornadas, Congresos, la temática recurrente es: *Repensar la forma en que impartimos nuestras clases*.

En esa búsqueda aparecen como auxilio las tecnologías.

Hacia fines del siglo XX

En las últimas décadas del siglo XX, la utilización de las tecnologías en educación era un tema de debate. Nos planteábamos cuestiones como: ¿Permitiríamos usar las calculadoras en clase? ¿En qué etapa? ¿Primaria? ¿Media? ¿Universidad? ¿qué tipo de calculadoras?

El cuestionamiento no era privativo de los educadores, los matemáticos puros también lo hacían. En 1976, Kenneth Appel y Wolfgang Haken, de la Universidad de Illinois, con la ayuda de John Koch, demuestran el *Teorema de los cuatro colores*. Teorema formulado en 1853, por Francis Guthrie. Deducción cuestionada porque la solución propuesta requería cientos de horas de cálculos mediante computador. No obstante, dicha solución ha resistido el escrutinio y la prueba del tiempo. Se empieza a tomar conciencia de que “no existe una única forma de validar conocimiento matemático”.

Paralelamente van apareciendo distintas teorías de aprendizaje. En la década de 1970 se desarrolla la *teoría constructivista*. En los 90' Yves Chevallard crea la noción de la transposición didáctica y Guy Brousseau la *teoría de las situaciones*.

En 1995, en el marco de la IX Conferencia Interamericana, el Dr. Nicolás Balacheff, comentaba la importancia que tenían las computadoras, las calculadoras y determinados software para ayudar a estudiar, para aprender y aclarar conceptos o resolver situaciones problemáticas. Pensaba que utilizar una calculadora como la TI-92 en el aula, era un buen apoyo para el aprendizaje. Esta es una calculadora científica, tiene incorporado software como el CABRI, resuelve integrales, sistemas de ecuaciones, grafica, entre otras cosas.

En esos tiempos, en jornadas, congresos, instituciones educativas, se dictaban cursos de distintos software matemáticos que iban apareciendo, como el MATHEMATICA; MATLAB; DERIVE; MAPLE; B GRAF II.

América Latina tenía dificultades para contar con la infraestructura necesaria para montar laboratorios de computación. En general, tanto a las instituciones educativas como a los docentes no le era fácil acceder a las nuevas tecnologías.

Aun así, muchos docentes compenetrados con la problemática educativa, las teorías de educación imperantes y las tecnologías con las cuales contaban, comenzaron a innovar sus clases.

A modo de ejemplo podemos citar el trabajo interdisciplinar, efectuado por profesores las cátedras de Análisis Matemático I, Álgebra y Macroeconomía, de UADE (Universidad Argentina de la Empresa), sobre la base de la última matriz insumo producto estimada para la Argentina.

“Hacia 1997 el Instituto Nacional de Estadísticas y Censos presentó la publicidad del lanzamiento de una encuesta, que luego debería "alimentar" con datos la estimación para ese año de la matriz de insumo producto para la Argentina. Utilizando dicho anuncio como motivación para los alumnos, se les propuso navegar por Internet o directamente recurrir al INDEC de "ladrillo" para obtener información sobre esta nueva estimación de la matriz insumo - producto en el país.

*También se les solicitó responder a interrogantes del tipo: ¿cómo se estima? ¿Para que sirve? ¿Contribuye con la toma de decisiones?, para que de esta manera tomaran noción de la aplicabilidad del álgebra lineal y de matrices. El interés que despertaron estos primeros trabajos entre los alumnos motivó que siguiéramos avanzando con la **configuración de una herramienta que les permitiese operar directamente con la estimación de la matriz insumo producto a través del empleo de planillas de cálculo.***

*En el trabajo, describimos los pasos que van desde la resolución de un sistema de ecuaciones lineal, al álgebra matricial y a la teoría necesaria para permitir su aplicación a un modelo insumo - producto. Finalmente **"jugamos" con la economía argentina** a partir de los respectivos cuadros estimados para el año 1997, cargados en una planilla de cálculo, luego de reducir la matriz original de 72 filas por 72 columnas a una de 14 por 14.*

Un "juego" o ejercicio de los más clásicos, es aquel por el cual los alumnos podrán ver qué ocurre con la variación del volumen de demanda total y sectorial cuando varía la cantidad demandada de bienes finales o demanda final, es decir los bienes de consumo final y de inversión. Asimismo, que ocurre, por ejemplo con las importaciones. También podrán ver como los resultados se alejan de la realidad cuando, por ejemplo la matriz se reduce demasiado respecto de la original, lo que los obligará a un trabajo adicional de desglose de sectores en dos o más subsectores.”

Principios del siglo XXI

A comienzos del siglo XXI, nos encontrábamos con un mundo globalizado y un vertiginoso progreso del conocimiento científico y tecnológico, por lo tanto el Sistema Educativo, en general, y las instituciones educativas, en particular, debían adecuarse para atender y responder a las nuevas demandas de su entorno, aceptando los desafíos de redefinir el rol docente, pensar nuevas formas de acceso al conocimiento y consolidar el uso de elementos tecnológicos que enriquezcan el proceso de enseñanza- aprendizaje. En Argentina, ante este nuevo escenario, se comienzan a elaborar cambios en el Sistema Educativo, en los años siguientes:

***2005** en los profesorados de Educación Superior se comienza a implementar nuevos diseños curriculares, una de las características es acercar al futuro formador a la realidad en la cual se va a desempeñar, dotando a la educación del futuro docente de medios y herramientas desde el propio comienzo de la carrera mediante trabajos de campo. De tal manera que le permitan tomar conciencia real del adolescente actual, la sociedad en la que está inmerso, su problemática y los nuevos medios que tiene a su alcance: el avasallante mundo tecnológico. Quienes fuimos educados con los antiguos diseños curriculares, estudiamos Psicología y Pedagogía desde la propia teoría, hoy en día el contexto social del adolescente y su entorno, se constituye en los cimientos para poder entender su psicología y para, en consecuencia, poder actuar pedagógicamente.

***2006** se sanciona la Ley de Educación Nacional (LEN) N °26206.

***2008** acompañando esos cambios el Instituto nacional de Formación Docente, financia: “Nuevos materiales didácticos en la formación docente”

***2010** por decreto 459/10 se pone en marcha el programa **Conectar Igualdad**, como una política de inclusión digital de alcance federal. Se distribuyeron netbooks en el período 2010-2012, a docentes y alumnos de educación secundaria de escuela pública, educación especial y de institutos de formación docente. La propuesta inicial era desarrollar contenidos digitales que se puedan utilizar en propuestas didácticas y trabajar en los procesos de formación docente con el propósito de transformar paradigmas, modelos y procesos de aprendizaje y enseñanza. El programa se discontinuó y no se terminó de formar a los docentes. Las instituciones tampoco llegaron a acceder al wifi.

***2014** los diseños curriculares de los profesorados de Educación Superior vuelven a adecuarse; en CABA se comienza a implementar la LEN, bajo el nombre de Nueva Educación Secundaria (NES).

***2018** por el decreto 386/2018 se reemplaza el programa Conectar Igualdad por **Aprender Conectado**. Esta es una propuesta del Ministerio de Educación de la Nación, cuya misión principal es integrar la comunidad educativa en la cultura digital, promoviendo la innovación pedagógica y la calidad de los aprendizajes.

***2020** en marzo se suspenden las clases en todos los niveles debido a la pandemia del covid-19. Tiempos de pandemia, tiempo de desafíos. Se pone en evidencia que los docentes no estaban preparados para dictar sus clases en forma virtual. Muchas instituciones, formadores y estudiantes no tenían la tecnología necesaria. Docentes que no contemplaban que dar clase on-line no es lo mismo que presencial. Olvidaban que el material y la forma en dar sus clases debía estar adecuado al estudiante. Comprender que no era igual darle clase a un niño de preescolar, que a un adolescente o un adulto.

Entre mediados del 2020 y 2021, se:

* *dictan* cursos de capacitación digital para alumnos y docentes, nuevos enfoques pedagógicos reflatando los conceptos de la educación virtual.

* *crean* comunidades en redes sociales y blogs educativos con la participación de profesores y padres tales como:

<https://www.facebook.com/groups/ProfesDigitales>

<https://alejandria.com.ar/>

<https://www.padresorganizados.ar/>

<https://www.comunidad.madrid/servicios/educacion/educacion-cifras>

* *generan* múltiples variedades de recursos tecnológicos, las plataformas ofrecen materiales, juegos, seminarios, asistencia al docente.

***2022** Por decreto 11/2022 “Créase el “PROGRAMA CONECTAR IGUALDAD” en el ámbito del MINISTERIO DE EDUCACIÓN, con el objeto de proporcionar recursos tecnológicos en las escuelas públicas de gestión estatal y de elaborar propuestas educativas con el fin de favorecer la incorporación de las mismas en los procesos de enseñanza y de aprendizaje.”

Revisitemos algunas tecnologías que podemos usar dentro del aula, fuera de ella y en simultáneo.

La Tecnología en Educación dentro del aula

Algunas de las tecnologías que podemos usar dentro del aula son:

1-La pizarra digital interactiva

Un recurso sumamente útil e innovador, aunque pocas instituciones lo poseen es la **pizarra digital interactiva**.

Una de las características más significativas es la de permitir todo tipo de enlaces: a documentos del docente, a Internet, a selecciones por tema, gráficos entre otras cosas y al retomar el tema a la clase siguiente, damos continuidad a lo tratado, reservando el material empleado para repasarlo al comienzo de la reunión, reduciendo al mínimo el consumo de tiempo que ello conlleva.

Es importante destacar, la utilidad con los alumnos a distancia, que disponiendo del software, reciben del docente llamados para focalizar la atención hasta ahora imposibles, como puede ser, destacar una definición o una representación gráfica, como si el alumno estuviera en clase.

2-Test de elecciones múltiples

Las posibilidades son: test de elecciones múltiples (Multiple Choice), respuestas verdadero- falso, respuestas breves predeterminadas o respuestas abiertas.

Uno de estos software es **SOCRATIVE** es un recurso que puede ser usado en distintos momentos de la clase logrando un feedback sumamente enriquecedor, dado que permite motivarlos en el comienzo de la clase, corregir errores de interpretación o distracciones del alumnado durante el desarrollo y conocer el grado de aprendizaje logrado. El empleo de cuestionarios en tiempo real con visualización de resultados permite la discusión, extensión y crecimiento del grupo.

3-Mapas conceptuales

Entre las más utilizadas, nos encontramos con **CMAP TOOL**, herramienta que se encuentra en las netbooks del programa **Conectar Igualdad**. Consiste en la presentación gráfica de conceptos teóricos. Permite hacer mapas conceptuales y compartir lo elaborado utilizando Internet, por lo que se transforma en una herramienta colaborativa.

4-Posters multimedia

Otra posibilidad de resumir conocimientos, en una forma muy amena, es la creación de un **póster**, mediante el programa Glogster: *“The creative visual learning platform that every educator and student deserves”* (www.glogster.com/) Es una plataforma educativa de creatividad visual, fácil de usar. Se puede crear un póster en forma privada o darlo a conocer, los alumnos son invitados por el docente a participar en la concreción del mismo, permite agregar fotografías, sonidos, links, entre otras cosas.

5-Aplicaciones a la educación de los códigos QR

La amplia difusión y aplicación de estos códigos en la vida diaria nos sugieren que también podamos utilizarlos para agregar una nota distintiva en educación.

QR quiere decir **QUICK RESPONSE**.

Es muy fácil hacer un código QR que nos llevará a una página de Internet.

Hagamos las guías de ejercicios con un código QR y al finalizar las mismas que le muestren al estudiante las respuestas o las soluciones o la información para profundizar los temas que se tratan en la guía. De acuerdo con el objetivo de aprendizaje, tendremos un código QR que lo derivará al contenido necesario.

6-Simuladores

Dos **simuladores** gratuitos y accesibles son:

I) Simulaciones Interactivas PhET : <https://phet.colorado.edu/es/>

Fundado en 2002 por el ganador del Premio Nobel Carl Wieman, el proyecto de simulaciones interactivas de PhET de la Universidad de Colorado en Boulder crea simulaciones interactivas gratuitas de matemáticas y ciencias. También tiene actividades.

II) Desmos: www.desmos.com

Este ofrece calculadoras, actividades matemáticas digitales y un plan de estudios para ayudar a todos los estudiantes a amar las matemáticas y amar aprender matemáticas.

7-Graficadoras como FOOPLOT, es una herramienta online para hacer gráficos.

La Tecnología en la Educación fuera del aula

La tecnología ha permitido:

* que en tiempos de pandemia la educación no se interrumpa

* el acceso a la educación de personas que se encuentran imposibilitadas de asistir a clases o por diversas razones, prefiere no hacerlo en forma presencial

Es allí donde surgen distintas aplicaciones que permiten acercar a los docentes y a los alumnos de variadas formas, en una **clase virtual**

Además de las que se pueden realizar por ZOOM, por MEET, por canales de YOUTUBE se encuentran otras como:

Live Stream (www.livestream.com)

Join Me (www.joinme.com)

Mikogo (www.mikogo.es)

Cada una de las aplicaciones, presentan ventajas y desventajas, que habrá que evaluar al momento de tomar una decisión.

En general permiten el contacto visual y escuchar al docente, por lo tanto resultan de gran ayuda para los alumnos no presenciales o a distancia. Son excelentes recursos para un sistema educativo híbrido.

La Tecnología en la Educación dentro y fuera del aula

Algunas de ellas son:

1-Las plataformas educativas

Sebastián Díaz Becerro, las define así:

“Una plataforma educativa virtual, es un entorno informático en el que nos encontramos con muchas herramientas agrupadas y optimizadas para fines docentes. Su función es permitir la creación y gestión de cursos completos para Internet sin que sean necesarios conocimientos profundos de programación”. “Para ello, estos sistemas tecnológicos proporcionan a los usuarios espacios de trabajo compartidos destinados al intercambio de contenidos e información, incorporan herramientas de comunicación (chat, correos, foros de debate, videoconferencias, blogs, etc.) y, en muchos casos, cuentan con un gran repositorio de objetos digitales de aprendizaje desarrollados por terceros, así como herramientas propias para la generación de

recursos". Plataformas Educativas, un entorno para profesores y alumnos. Temas para la educación. Revista digital para profesionales de la enseñanza. Mayo/09

¿Para qué empleamos las plataformas educativas?

Fundamentalmente para que el docente pueda poner al alcance del alumno, contenidos de distintos formatos para completar y profundizar los conocimientos adquiridos o adquirir nuevos. También permite la actividad colaborativa a través de foros, salas de chat y mensajería. Los docentes pueden comunicarse masivamente con los alumnos o en forma individual o grupal. Esto genera la posibilidad de distintas actividades. Hay posibilidades de asignar calificaciones, asistencia, entre otras cosas.

Actualmente una gran cantidad de instituciones educativas tienen plataformas, como la del Instituto Superior del Profesorado Dr. J. V. González, la de la Facultad de Ciencias Económicas de UBA, otra plataforma que se usó mucho, por su accesibilidad era Moodle.

A los software y plataformas ya vigentes en la pandemia se fueron sumando otras, como:

***Cloudlabs** una plataforma multilingüe que ofrece simuladores gamificados de laboratorios virtuales

***Blackboard** que ofrece servicios institucionales, clases a los docentes, pizarra interactiva, entre otros

*Microsoft crea: **Office 365** para las universidades

* Adobe crea su plataforma **Adobe Educa**

* **Edpuzzle**: "Es una plataforma que permite realizar videos crear diálogos, encuestas y preguntas asociadas a un video (propio o ajeno) que se activan cuando el archivo multimedia llega a un lugar o tiempo determinado por quien edita las intervenciones" definición dada por el Instituto Nacional de Formación Docente (INFOD) en la edición de un tutorial para poder utilizarlo, en el explica sus características

* **Dreamshaper**: esta plataforma ofrece una amplia variedad de proyectos en diferentes áreas, como tecnología, diseño, creatividad y emprendimiento. Una característica, de esta herramienta, es que genera portfolios, estos son una excelente forma de evaluar a los alumnos a lo largo del tiempo, especialmente en esta etapa post pandemia. Permite monitorear el trabajo de los alumnos, trabajando de manera integrada con el LMS de la institución educativa.

LMS, por lo general, es una aplicación de software o una tecnología basada en la nube. Su objetivo principal es mejorar el proceso de aprendizaje.

2-**Los teléfonos celulares**

A partir de la proliferación y el desarrollo de la telefonía móvil y de los recursos incorporados a los mismos, surge en el ámbito educativo el movimiento denominado "mobile learning".

AL respecto podemos leer en la página de la UNESCO:

"El aprendizaje móvil se está convirtiendo en una de las soluciones a los problemas que confronta el sector educativo. Por eso el programa de actividades de la UNESCO se basa en un número cada vez mayor de iniciativas conjuntas encaminadas a estudiar de qué manera las tecnologías móviles pueden propiciar la consecución de la Educación para Todos (EPT)".

Los celulares ***cumplieron un papel importantísimo en los tiempos de pandemia***, permitieron formar grupos de WhatsApp, entre docentes y alumnos, entre los docentes y padres, entre alumnos y a través de ellos, compartir inquietudes, dudas, contenidos, ejercitación, entre otros temas.

En el aula nos permite acceder al uso de Internet, cuando no tienen disponible una PC para las aplicaciones que resulten convenientes. Buscar datos, acceder a información, ingresar a software "online" para resolver problemas. Utilizar códigos QR para llegar a contenidos o respuestas en cualquier situación de aprendizaje. Utilizar Apps, como INTEGRATOR para resolver integrales, o a un graficador. Es un buen auxiliar para una clase dinámica, interactiva, colaborativa.

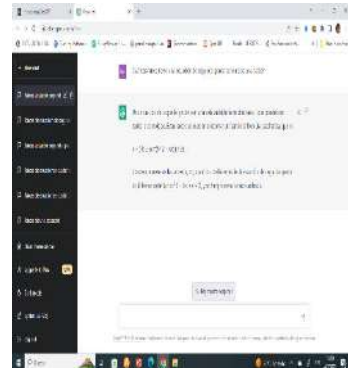
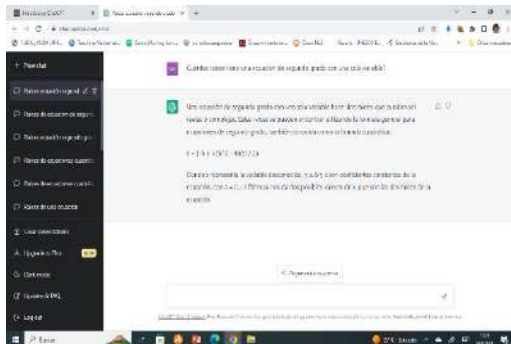
Un párrafo especial se merecen el **ChatGPT , chat GPZero y el Metaverso**

ChatGPT

El ChatGPT, es un sistema de ***chat con inteligencia artificial*** lanzado en noviembre de 2022 por OpenAI Interactúa con el usuario de forma conversacional. El formato de diálogo hace posible que ChatGPT responda preguntas de seguimiento, admita sus errores, cuestione premisas incorrectas y rechace solicitudes inapropiadas. Esta herramienta se viralizó en todos los ámbitos, obviamente también en el educativo.

Cabe preguntarnos: ¿Esta herramienta es útil en el proceso enseñanza-aprendizaje? ¿Ayudará a mejorar las capacidades intelectuales de nuestros estudiantes? ¿A motivarlos en la búsqueda de respuesta, soluciones, deducciones? O simplemente provocará todo lo contrario.

Podemos utilizar las bondades y limitaciones de Chat GPT, haciendo más dinámicas las clases. Por ejemplo que le pregunten: ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación de segundo grado?



Chat GPTZero

Es un chat , que permite identificar en un archivo , frases, párrafos, respuestas escritas por I A. El ChAt GPTZeroX fue creado especialmente para educadores.



Metaverso

El metaverso es un entorno simulado construido digitalmente. En él, hay efectos visuales y de sonido que crea en el usuario la idea de encontrarse en un entorno que realmente existe. Su aplicación a la educación, actualmente es motivo de controversia. Algunos piensan que esta herramienta superará las limitaciones actuales de la educación online y con ella se lograrán los objetivos de desarrollo sostenible de la ONU, para 2030

CONCLUSIÓN

Para concluir, las tecnologías son un eficiente auxiliar para los docentes y alumnos. Las clases se pueden tornar más dinámicas, motivadoras, renovadoras. Pero es importante que los formadores, no olvidemos que al utilizarlas debemos tener en cuenta las características propias del educando, a quien van dirigidas, cuáles son las más adecuadas de acuerdo las distintas teorías de aprendizaje, recordar a Piaget y sus estudios sobre la evolución del pensamiento, a neurólogos y neurobiólogos que se han ocupado de la educación, como **Marsel Mesulam**, estos han demostrado que la actividad cerebral y las funciones para aprender deben ser siempre novedosas y que el aburrimiento es una de las principales causas del fracaso.

Referencias Bibliográficas

- Arbib,M. (1.981) Cerebros, máquinas y matemáticas. Alianza Editorial. Madrid
- García Venturini, A. E. (2011) Historia de la matemática en la Argentina. Buenos Aires. Ediciones Cooperativas ISBN 978-987-652-091-1
- Botta Sampietro, M., Mora Pereira, Y. (2016) Alan Turing. Un Genio Desconocido. Actas CUREM 6 ISSN 1688-9886 263
- Loiacono, T. (1996). IX Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Educación Matemática, Vol. 8 N°1;131-134 Grupo Editorial Iberoamérica. México.
- Loiacono, T. (1996). La Educación Matemática en las Carreras No Matemáticas. En Memorias de XI Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Facultad de Ciencias Económicas y afines. U. N. de Entre Ríos.
- Borghi; Ferrando; Loiacono; Theller. Jugando con la Economía Argentina. Del álgebra lineal a la programación económica. XVI Jornadas Nacionales de Docentes de Matemáticas de Facultad de Ciencias Económicas y afines. Universidad Argentina John F. Kennedy. Octubre 2001.
- Bustos, H., Larribau, M. y otros (2008). Nuevos materiales didácticos en la formación docente. Buenos Aires. Editorial I. S. P Dr. J. V. González ISBN: 978-987-1500-03-1.
- Borghi, M. C., Loiacono, T. (2015). Uso de Tecnologías en Educación Superior. Antes y Ahora. En Memorias de XV Jornadas de Tecnología Aplicada a la Educación Matemática Universitaria.
- Loiacono, T. (2019). Creatividad e Imaginación en la Formación de Formadores. II SEM-V Simposio de Educación Matemática-Virtual, Educación Matemática enriquecida por Interdisciplinariedad con la Tecnología. TOMO I. ISBN 978-987-3941-66-5
- Dusel, I. (2011). Aprender y enseñar en la cultura digital. Fundación Santillana. Bs. As. Argentina.
- Loiacono, T. (2022). Desafío de la Educación Matemática en Tiempos Híbridos. Memorias del IIISEM-V (III Simposio de Educación Matemática-Virtual). UNLu: 12 y 13 de mayo 2022.A publicar por EDUNLU.

Alvarez Vázquez, J.A.; Freyre Gonzalez, J.A.; Rivera López,R. Breve Historia de la Lógica

<http://w3.mor.itesm.mx/~logica/>

<http://www.archives.gov/education/> (10- 10- 2012)

<https://www.institutoideas.com.ar/secundaria-del-futuro-un-analisis-sobre-la-ultima-reforma-educativa-en-caba/>

Teorema de los Cuatro Colores <https://www.unocero.com/ciencia/kenneth-appel-y-la-prueba-del-teorema-de-los-cuatro-colores/>

Historia de Internet.[https://www.fib.upc.edu/retro-](https://www.fib.upc.edu/retro-informatica/historia/internet.html#:~:text=EN%201982%2C%20ARPANET%20adopt%C3%B3%20el,cre%C3%B3%20Internet%20(International%20Net))

[informatica/historia/internet.html#:~:text=EN%201982%2C%20ARPANET%20adopt%C3%B3%20el,cre%C3%B3%20Internet%20\(International%20Net\)](https://www.fib.upc.edu/retro-informatica/historia/internet.html#:~:text=EN%201982%2C%20ARPANET%20adopt%C3%B3%20el,cre%C3%B3%20Internet%20(International%20Net)) (3-12-2022)

Marcel Mesulam :[https://congresodeneuropsicologia.com/ponentes/dr-marsel-mesulam/\(10-2-2023\)](https://congresodeneuropsicologia.com/ponentes/dr-marsel-mesulam/(10-2-2023))

<http://moodle.org/> (10 -04-2015)

<http://edu.glogster.com/> 1 (10 -04-2015)

<https://definicion.de/tcp-ip/>

<https://edpuzzle.com/>

<https://dreamshaper.com/es/>

<https://openai.com/blog/chatgpt>

<https://gptzero.me/>

Metaverso: <https://academy.binance.com/es/articles/top-7-technologies-that-power-the-metaverse> (3-12-22)

Las Plataformas Educativas, su impacto y potencialidad en el Aprendizaje Virtual

María Cristina BORGHI

Fundación Solydeus

macristinaborghi@gmail.com

Resumen

En la virtualidad, la educación en general, y la educación matemática en particular, requieren cada vez más de recursos sofisticados que logren motivar a los docentes y estudiantes para la tarea común.

Las instituciones deben proveer los recursos para que esto sea posible y los docentes deben prepararse para emplearlos adecuadamente. La elección de una plataforma educativa no es una tarea menor. Se deberán tener en cuenta los objetivos y las necesidades de docentes, alumnos y directivos.

Para conocer la opinión de la comunidad educativa se ha desarrollado y validado una encuesta en idioma inglés sobre los entornos virtuales utilizados especialmente en educación superior y posteriormente ha sido traducida y adaptada al español. A partir de su aplicación se han obtenido importantes conclusiones.

Las plataformas almacenan y procesan información que resulta de gran utilidad para todos los involucrados. En la actualidad ha surgido un creciente interés por el análisis de datos del aprendizaje, en todos sus niveles. Estos datos permiten personalizar algunos aspectos, de acuerdo con las necesidades del estudiantado. Nos ocuparemos de las analíticas académicas, del aprendizaje y las visuales del aprendizaje en el contexto de los entornos virtuales. Las analíticas académicas proveen información a directivos y administradores. Las analíticas del aprendizaje y las analíticas visuales empleadas en el e-learning o en el blended-learning asistirán a los docentes en el logro de los objetivos propuestos y a los alumnos para conocer su propio desempeño y guiar sus acciones para el logro de su mejor rendimiento académico.

Palabras Clave: Virtualidad en Educación. Analíticas de aprendizaje. Analíticas visuales. Plataformas educativas.

Introducción

La tecnología en educación matemática ha avanzado a pasos agigantados en los últimos años debido a las necesidades impuestas por la pandemia y la post-pandemia. La tecnología física en el aula: pizarras digitales, realidad virtual, aumentada, mixta, extendida, etc. Y todos los dispositivos móviles o las PCs han cambiado la forma de la enseñanza-aprendizaje, llevando a alumnos y docentes a un mundo incipientemente conocido. Nos dimos cuenta, impulsados por la situación, que disponíamos de herramientas que podían cambiar, como lo han hecho, nuestro sistema educativo.

Si bien lo que presentaré tiene un nivel de generalidad importante, está pensado para los cursos de matemáticas y materias afines y para los niveles medios en adelante, o sea cuando el alumno ya es lo suficientemente independiente como para utilizar los distintos recursos disponibles con facilidad. Incluimos entonces, la escuela media, los terciarios y los universitarios y llegaremos a algunas conclusiones importantes en lo que hace a la formación de formadores.

De esa forma, pasamos, en general, de la educación virtual impuesta por las circunstancias, al blended learning que es lo que estamos implementando en la actualidad. Es más, habiendo superado la etapa del e-learning, algunos autores hablan del fracaso del mismo y proponen como más útil el b-learning. Por ejemplo, Pascual (2003) opina que un curso estrictamente a distancia dificulta la integración del alumnado como comunidad educativa por la falta de la relación interpersonal presencial.

Y todos nosotros sabemos que, en lo que hace a los cursos de Matemática y materias afines, esta presencialidad del docente con los alumnos hace más fluido el intercambio, la corrección de errores, la autocorrección, etc. Todo aquello que las respuestas asincrónicas no pueden reemplazar.

La educación virtual en el periodo 2020 a 2022 dejó un sabor bastante amargo en docentes y alumnos, los docentes fueron obligados a desarrollar clases virtuales con escasa o ninguna preparación previa.

Y leyendo a Bartolomé, Antonio y Aiello (2006) vemos que esto era señalado como uno de los motivos de fracaso.

Muchos docentes, de todos los niveles, creyeron que la virtualidad era la transcripción de las clases presenciales.

Otros intentaron adaptar los materiales y quienes dictaban clases en más de una institución debieron lidiar con distintas plataformas y sus peculiaridades.

Los alumnos no se sintieron motivados, especialmente por la extensión de las clases, con escaso o nulo feedback. Y la consecuencia fue la altísima deserción de los estudiantes o el bajísimo nivel de los conocimientos adquiridos.

Pero, finalmente, la lección ha sido positiva para todos.

En la actualidad, se ha implementado un sistema mixto, que, si bien tiene aspectos positivos y negativos, vamos en camino de mejorarlo.

Ahora sabemos que:

- 1) Las instituciones tienen que estar preparadas (software y hardware) para el uso de tecnología. La elección de una plataforma educativa es muy importante. Algunas características importantes para la elección de una plataforma son: La sencillez en el manejo por parte de los estudiantes, adaptabilidad, comunicación fluida (chats, foros, mails, comunidades, etc.), flexibilidad, estadísticas, soporte técnico, etc.
- 2) El docente debe contar con las competencias necesarias para llevar al cabo el proyecto de e-learning, b-learning, etc. Podemos pensar en una gran cantidad de roles que debería asumir para ello, desde experto en su materia, como lo será, seguramente, hasta Diseñador Instruccional, Diseñador Gráfico, gestor de plataforma LMS, etc.
- 3) El proyecto es educativo, no de tecnología. Una plataforma bien elegida no da garantías de que se asegure el proceso de enseñanza-aprendizaje. Y algunas aplicaciones son útiles para ciertos temas, pero no para todos. Y tratándose de un área en permanente evolución, el docente debe mantenerse siempre al día en el estado del arte.

- 4) Los alumnos deben estar siempre motivados. El aburrimiento puede surgir, aún con el empleo de tecnología en el aula o fuera de ella, por más sofisticada que sea.

Las plataformas educativas

Profundicemos el tema de las plataformas educativas. Cuando nos referimos a ellas, es posible que nos encontremos con un software especializado del tipo LMS (Learning Management System) donde confluyen los alumnos, docentes y administradores para el desarrollo de las interacciones necesarias para el proceso de enseñanza- aprendizaje.

A su vez, si nos encontramos con un software que además, nos permite la creación de contenidos, su gestión, reutilización, etc, decimos que se trata de un LCMS (Learning Content Management System).

Algunos ejemplos de plataformas son:

- Edmodo
- Moodle. (acrónimo de *Modular Object- Oriented Dynamic Learning Environment, ambiente de aprendizaje dinámico, orientado a objetos y modular*).
- Blackboard.
- SuccessFactors.
- SkillSoft.
- Schoology
- Sumtotal
- Ispring

O aquellas dedicadas a Matemática como Khan Academy, con contenidos muy completos e interesantes o ejercicios interactivos de distintos niveles en matemática, como interMatia, entre otros.

Algunas de las presentadas son gratuitas, también las hay de código abierto, y con distintas capacidades tecnológicas.

Evaluación de entornos virtuales

Para conocer los entornos virtuales en profundidad, a partir de las opiniones de los usuarios, surgió en 2005 DELES: Distance Education Learning Environment Survey de los investigadores Scott L. Walker y Barry J. Fraser, que evalúa áreas como:

- apoyo al Instructor/profesor,
- interacción y colaboración estudiantil,
- relevancia personal,
- aprendizaje auténtico,
- aprendizaje activo,
- autonomía estudiantil
- satisfacción del usuario.

Se utilizó, al menos, en 27 estudios independientes, logrando importantes contribuciones a la temática.

Fue por ello que la encuesta fue replicada por otros autores, entre ellos, Fernández-Pascual, Ferrer-Cascales y Reig-Ferrer de la Universidad de Alicante quienes utilizaron la versión en español de DELES (Sp-DELES) para evaluar el grado de satisfacción de los estudiantes. El estudio, “Entornos virtuales: Predicción de la satisfacción en contexto universitario”, muestra los resultados de la encuesta realizada a 265 estudiantes de la Universidad de Alicante que tomaron cursos híbridos o a distancia, y pone de manifiesto que se está desarrollando la “cultura de la calidad” en los involucrados en las transformaciones que van teniendo lugar.

Por su parte, en 2015, Berrocal de Luna y Megías Ruiz, se ocuparon de buscar “Indicadores de calidad para la evaluación de plataformas virtuales” con el objetivo de efectuar una descripción, identificando variables propias del e-learning y finalmente relacionar uso con diseño de cada plataforma evaluada. Los autores concluyen que, si bien las plataformas estudiadas han sido creadas para e-learning, se han utilizado mayormente en blended-learning.

Información disponible en las plataformas

A partir de la interacción de los individuos involucrados en el uso de las plataformas (docentes, investigadores, alumnos, administradores) se genera todo tipo de información que está disponible a distintos niveles y que sirve para distintos objetivos.

Para conocer el impacto de la tecnología empleada, es necesario contar con excelente información.

Así es que han surgido disciplinas como las analíticas académicas, las analíticas del aprendizaje y la minería de datos educativos.

Veamos sus diferencias:

Las analíticas académicas surgen en 2005 cuando Goldstein y Katz, mediante el empleo de la gestión de la información y tecnología, se ocuparon del análisis de instituciones de nivel superior, recopilando y procesando gran cantidad de datos con la finalidad de lograr que se cumplieran los objetivos de las mismas y que se lograra la mejora de los subsistemas que las integraban.

Por su parte Iten, Arnold y Pistilli (2008) presentan las analíticas académicas como método de minería de datos en el campo de la educación para fortalecer el cumplimiento de los objetivos de las instituciones.

Otros autores que se han ocupado del tema han sido Norris y Lefrere (2011), Daniel (2015) y García Tinisaray (2015) con planteos similares.

En cambio, las analíticas del aprendizaje, a su vez, apuntan “a la medición, recolección, análisis e informe de datos sobre estudiantes y sus contextos, con el propósito de entender y optimizar el aprendizaje y los entornos en que ocurre” según lo precisado en la “Primera Conferencia Internacional de analíticas del aprendizaje y conocimiento” (2011).

Dejando de lado las analíticas académicas, que se refieren a aspectos institucionales, nos ocuparemos de las analíticas del e-learning, o sea, los datos y procesos que surgen del empleo de medios electrónicos en la educación. Y también de las analíticas visuales en e-learning, o sea, el empleo de interfaces visuales interactivas para apoyo al razonamiento analítico, como lo presentan Thomas y Cook (2006).

El análisis de datos disponibles puede utilizarse de distintas formas, con fines descriptivos, de diagnóstico, predictivos o prescriptivos. O sea, para aumentar el conocimiento de la situación de enseñanza-aprendizaje, o con el propósito de tomar decisiones de cambio para la mejora del proceso.

Con lo cual, a partir de los datos que se recopilan y elaboran en las distintas plataformas se da información importante a alumnos, docentes, directores de departamento, decanos y en general, administradores de las instituciones.

¿Qué tipo de información puede suministrarnos una plataforma?

Nos ocuparemos de los tres niveles que se interrelacionan a través de una plataforma educativa

1. Alumno
2. Docentes/tutores
3. Directivos/Administradores, etc.

A nivel del alumno: Este podrá consultar: actividades realizadas, actividades pendientes, evaluaciones y retroalimentación de las mismas, calificaciones, insignias conseguidas, etc. Recibirá notificaciones sobre sus tareas pendientes a punto de vencer y también podrá interiorizarse sobre el uso que ha hecho de la plataforma (tiempo empleado en la misma, temas que ha visitado y que no ha revisado aún, etc.). Podrá comunicarse por mail, foros, etc. con sus pares, con sus docentes o tutores, con administradores.

A nivel de los docentes: El tema es más complejo y, en algunos casos, excede los alcances de esta presentación. El docente puede recopilar datos de veces que el alumno ingresó a la plataforma, materiales que revisó (en muchos casos las plataformas incluyen gráficos de actualización dinámica, por ejemplo

MOODLE), tareas que resolvió, foros en los que participó, etc. Recibirá notificaciones de alerta sobre alumnos con tareas pendientes. De esta forma, está en condiciones de efectuar un seguimiento personalizado de los alumnos y modificar o no, sus estrategias para desarrollar las mejores capacidades de los alumnos. La interacción de docente-alumno mediada por la plataforma, seguramente no reemplaza la presencialidad, pero permite que el docente dedicado tenga herramientas para avanzar en la consecución de los objetivos.

Mucho se habla y se escribe sobre el tema de la retención del alumnado y todo esto permite al docente identificar la situación de cada estudiante e implementar las acciones personalizadas adecuadas para lograr la motivación suficiente para que el curso no sea abandonado.

También es posible que el docente evalúe el material o los recursos que se encuentra utilizando, las plataformas cuentan con encuestas que permiten medir distintas características del objeto seleccionado.

Una de las actividades más utilizadas en las plataformas, para la evaluación de conocimientos del alumno, suelen ser los cuestionarios, con sus diversas posibilidades de respuesta.

Y empleando informes que en las plataformas están disponibles, los docentes, después de obtener los resultados de una evaluación a los alumnos, pueden utilizar cálculo de valores estadísticos (promedios, calificaciones medias, mediana, desvío standard, asimetría de la distribución de puntuación, etc.) con los cuales es posible inferir si la evaluación ha sido efectiva o sea, si las calificaciones muestran equilibrio o si por exceso de dificultad, o de simpleza, no se distingue entre los alumnos mejor y peor preparados.

En Matemática, los cuestionarios suelen ser de difícil confección y además, no es fácil encontrar la forma de evaluar el proceso de resolución que emplea el alumno. Mayor facilidad se puede encontrar en la implementación en materias como Investigación Operativa y Programación Operativa.

Si se tratara de evaluar los conocimientos adquiridos en el tema Programación Lineal de la materia Investigación Operativa, en un curso de grado, para la carrera de Administración de Empresas, podrían formularse preguntas sobre: el concepto, tipos de soluciones y aplicaciones de la programación lineal, tipos de variables (reales, slack, artificiales), convexidad, optimización y análisis de la solución óptima (en caso de que la hubiere). A los efectos prácticos, se han agrupado los ítems en 6 grupos de preguntas. Es posible realizar un estudio estadístico de los resultados, según lo mencionado anteriormente.

Algunas plataformas también nos proveen información sobre los ítems que se presentan a continuación en la tabla.

Nro.	Identificación	Índice de dificultad	Peso estimado	Peso efectivo	Índice de discriminación	Eficiencia discriminativa
1	Concepto P.L	45%	16,66%	20%	58%	66%
2	Variable real	40%	16,66%	15%	52%	63%
3	Variable slack	48%	16,66%	15%	45%	60%
4	Convexidad	80%	16,66%	20%	49%	55%
5	Optimización	55%	16,66%	20%	50%	56%
6	Análisis	70%	16,66%	10%	70%	90%

A modo de ejemplo, digamos que un desvío standard pequeño indicaría que las calificaciones son todas muy próximas entre sí, una asimetría de la distribución positiva y superior a uno, indicaría que la evaluación no permite discriminar en las proximidades de la calificación límite entre aprobado y reprobado, etc.

El índice de dificultad se elabora en base a la cantidad de alumnos que respondieron en forma incorrecta o no respondieron. El índice de discriminación correlaciona el puntaje de una determinada pregunta con el de todo el cuestionario y su valor se asocia con la efectividad de la pregunta.

Resumiendo, la interpretación de los valores obtenidos permite al docente inferir la eficiencia y eficacia del cuestionario utilizado y mejorarlo en lo sucesivo, si fuera necesario.

Este tema abre un panorama muy interesante a los docentes y merece atención por parte de ellos.

A nivel de las autoridades, es posible analizar contenidos, nivel de dificultad, actividades, organicidad del diseño del aula virtual, o evaluar el desempeño docente se deberá recurrir nuevamente a la elaboración de encuestas (generalmente personalizadas y anónimas) sobre los distintos tópicos que permitirán la generación de los resultados.

Los administradores de las instituciones y los estratos superiores (niveles departamentales) podrán emplear modelos para la predicción y prescripción.

Hay modelos analíticos incorporados en las plataformas, algunos de tipo estático y otros de aprendizaje automático (machine learning). Los modelos estáticos permiten determinar:

Alumnos o cursos sin actividad.

Actividades pendientes para alumnos o cursos.

Nivel de matriculación de los cursos y aquellos con escasa matriculación que no podrán comenzar.

Alumnos que nunca ingresaron al curso, etc.

En cuanto a los modelos predictivos, basados en aprendizaje automático, requieren el procesamiento de datos históricos y permiten efectuar diagnósticos y predicciones sobre los cursantes. Por ejemplo, es posible recibir informes sobre el riesgo de los alumnos a abandonar un curso.

Las predicciones efectuadas podrán ser contrastadas con los datos reales obtenidos al finalizar una etapa cualquiera y así podremos tener una idea acabada de la confiabilidad del sistema.

Si nos referimos a una de las plataformas más utilizadas (MOODLE), nos encontramos con que Moodle learning analytics nos permite tener notificaciones de alumnos en riesgo de no lograr las competencias previstas en un curso, no cumplir las condiciones de finalización del curso o no alcanzar la mínima calificación de aprobación del curso.

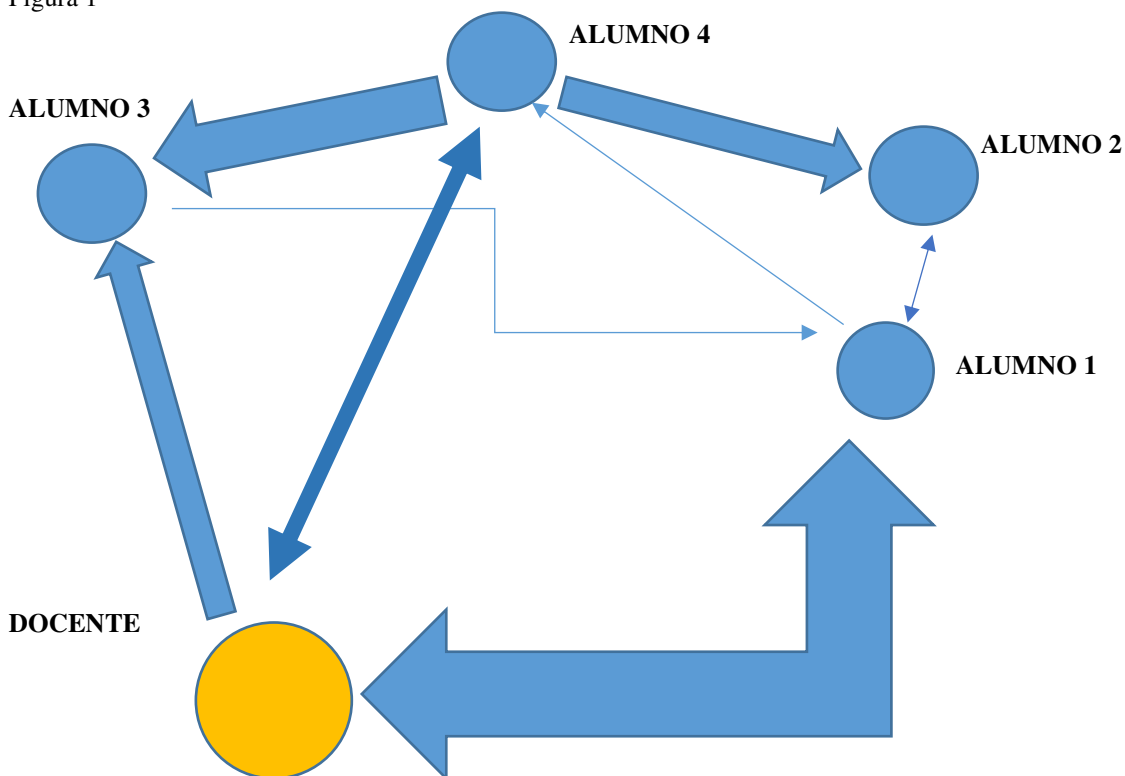
Y también permite a los administradores crear consultas personalizadas, gráficos de foros y distribución de grados, cuando se emplean calificaciones no numéricas y es necesario convertirlas.

Es muy interesante, por ejemplo en Moodle, el empleo de grafos interactivos para visualizar la actividad en el foro de los participantes en un curso.

Cada nodo representa un usuario y el tamaño del nodo está directamente relacionado con la cantidad de publicaciones de ese usuario. El grosor del nodo indica la cantidad de respuestas entre ambos y el sentido del arco, el usuario que está respondiendo en ese momento.

El empleo de distintos colores indica si el usuario es alumno o docente y al clicar sobre el nodo se visualiza información adicional. Fecha de la última actividad, cantidad de respuestas, etc.

Figura 1



Conclusiones

Como puede apreciarse, las plataformas educativas almacenan y generan gran cantidad de información que resulta de interés para el empleo de las analíticas académicas y del aprendizaje.

El avance del conocimiento en estas áreas hace que estemos en condiciones de mejorar las experiencias de e-learning y blended learning de los alumnos y de perfeccionar los recursos didácticos que empleamos.

Queda en la capacidad de los directivos y docentes el empleo eficaz y eficiente de esta información para beneficio de todos los implicados en el proceso, especialmente de los alumnos.

Y surge de esta presentación una recomendación a quienes se dedican a la formación de formadores. Además de desarrollar las competencias digitales (fundamental para los futuros docentes) deben asegurarse los conocimientos mínimos que les permitan:

- a) la interpretación adecuada de los resultados disponibles.
- b) la generación de las consultas necesarias para la evaluación de sus cursos y de los materiales entregados a los alumnos.

Todo ello redundará en la calidad del proceso y en la satisfacción del alumnado.

Referencias Bibliográficas

- Bartolomé, A. y Aiello, M. (2006). Nuevas tecnologías y necesidades formativas: Blended Learning y nuevos perfiles en comunicación audiovisual. *Telos: Cuadernos de comunicación, tecnología y sociedad*, ISSN 0213-084X, N°. 67, 2006, pp. 59-67.
- Berrocal de Luna, E., y Megías Ruiz, S. (octubre 29,2015). Indicadores de calidad para la evaluación de Plataformas Virtuales. 19 (2): 105-118. *TEXTOS. Revista Internacional de Aprendizaje y Cibersociedad*. Recuperado 20 de febrero de 2023.
<https://library.educause.edu/-/media/files/library/2005/12/ecm0508-pdf>
- Daniel, B.K. (2019), Big Data and data science: A critical review of issues for educational research. *Br J Educ Technol*, 50: 101-113. Recuperado 10 de enero de 2023 <https://doi.org/10.1111/bjet.12595>
- FERNÁNDEZ-PASCUAL, M.D.; FERRER-CASCALES, R.; REIG-FERRER, A. Entornos virtuales: predicción de la satisfacción en contexto universitario. *Píxel-Bit. Revista de Medios y Educación*. N. 43 (jul. 2013). ISSN 1133-8482, pp. 167-181.
- García Tinisaray, D.K. (2016). Construcción de un modelo para determinar el rendimiento académico de los estudiantes basado en learning analytics (análisis del aprendizaje), mediante el uso de técnicas multivariantes. (Tesis doctoral inédita). Universidad de Sevilla, Sevilla.
- Gašević, D., Dawson, S. & Siemens, G. Let's not forget: Learning analytics are about learning. *TECHTRENDS TECH TRENDS* 59, 64–71 (2015). Recuperado el 3 de enero de 2023 <https://doi.org/10.1007/s11528-014-0822-x>
- Goldstein, P.J., & Katz, R.N. (2005). Academic Analytics: The Uses of Management Information and Technology in Higher Education.
- Iten, L., Arnold, K., & Pistilli, M. (2008). Mining Real-Time Data to Improve Student Success in a Gateway Course. *Eleventh Annual TLT Conference*.
- Long, P.; Siemens, G. (2011): Penetrating de fog: Analytics in learning and education. *EDUCASE review*, vol.46 (5). Recuperado de:
<https://er.educause.edu/articles/2011/9/penetrating-the-fog-analytics-in-learning-and-education>
- Norris, D.M., & Lefrere, P. (2011). Transformation through Expeditionary Change Using Online Learning and Competence-Building Technologies. *Research in Learning Technology*, 19, 61-72.
- Pacual, M. P. (2003) *El Blended learning reduce el ahorro de la formación on-line pero gana en calidad*. Recuperado el 02 de marzo de 2023
<https://www.educaweb.com/esp/servicios/monografico/formacionvirtual/1181108-a.html>
- Elias, Tanya. (2011). *Learning Analytics: Definitions, Processes and Potential*. Recuperado de:
<https://landing.athabascau.ca/file/download/43713>
- Thomas, J.J; Cook, K.A., A visual analytics agenda, in *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 26, no. 1, pp. 10-13, Jan.-Feb. 2006, <https://ieeexplore.ieee.org/document/1573625>
- Walker, S. y Fraser, B. (2005). Development and Validation of an Instrument for Assessing Distance Education Learning Environments in Higher Education: The Distance Education Learning Environments Survey (DELES). *Learning Environments Research*. 8. 289-308. 10.1007/s10984-005-1568-3.
- Zapata-Ros, Miguel. (2013). Analítica de aprendizaje y personalización. Learning Analytics and Personalization. Campus Virtuales.

El rol de la indagación matemática enmarcada en el manejo de las tecnologías

Mg. Enrique Fabián VALIÑO

Instituto Superior del Profesorado

Dr. Joaquín V. GONZÁLEZ

fabian.valino@bue.edu.ar

Resumen

La teoría constructivista del aprendizaje sostiene que el aprendizaje no ocurre simplemente como resultado de la exposición a la información, sino que es un proceso activo en el que el conocimiento es construido a partir de las experiencias y las interacciones con el entorno. Los estudiantes son vistos como constructores activos de su propio conocimiento y el papel del educador es proporcionar oportunidades y recursos que les permitan construir su comprensión de manera efectiva. El aprendizaje se centra en la construcción de conocimientos por parte del estudiante, y los profesores actúan como facilitadores que brindan recursos y apoyo mientras el estudiante explora y construye su propio conocimiento. Se promueve un ambiente de aprendizaje colaborativo en el que los estudiantes trabajan juntos y comparten sus ideas y conocimientos. Uno de los recursos con los que cuenta el docente es la indagación, un proceso de búsqueda y recopilación de información con el fin de investigar un tema o problema en particular. Este proceso de indagación es un enfoque sistemático y riguroso que se utiliza en diversas áreas, incluyendo la ciencia, la investigación social y la investigación empresarial. Se aplica como ejemplo una indagación sobre los números irracionales enfocados desde la perspectiva de las cortaduras de Dedekind y posibles alternativas para su implementación en la escuela media.

Palabras clave: Indagación matemática. Enseñanza diferenciada. Creatividad. Currículum tridimensional. Metacognición.

La teoría constructivista del aprendizaje surgió en la década de 1970 y fue desarrollada por un grupo de psicólogos y filósofos, incluyendo a Jean Piaget, Lev Vygotsky, Ernst von Glasersfeld y Gerhard Feuerstein.

Estos pensadores argumentaron que el aprendizaje no es algo que ocurre simplemente como resultado de la exposición a la información, sino que es un proceso activo en el que el conocimiento es construido a partir de las experiencias y las interacciones con el entorno. Son muchas las variables que se combinan y que hacen que el aprendizaje y la enseñanza de la matemática derive en una problemática realmente compleja: la diversidad del alumnado en cuanto a aspiraciones y expectativas, las presiones económicas sobre toda la educación, las presiones que establecen los actores de conocimiento sobre qué matemáticas enseñar en las escuelas, las nuevas tecnologías que demandan cada vez más espacio para ser incorporadas, el desafío que supone para los docentes estas nuevas tecnologías que crecen a una velocidad vertiginosa, la necesidad de relacionar la educación con el nuevo contexto educativo global (Bishop,1998).

Los estudiantes son vistos como constructores activos de su propio conocimiento, y el papel del educador es proporcionar oportunidades y recursos que les permitan construir su comprensión de manera efectiva. Al decir del propio Vygotsky, "lo más importante que un individuo puede aprender no es lo que se le enseña, sino lo que aprende por su cuenta".

Por su parte, el aprendizaje se centra en la construcción de conocimientos por parte del estudiante. En lugar de enseñar al estudiante de manera pasiva, los profesores actúan como facilitadores que brindan recursos y apoyo mientras el estudiante explora y construye su propio conocimiento: el aprendizaje es un proceso activo y significativo, basado en experiencias previas. El profesorado desempeña un rol preponderante en este proceso, facilitando a los estudiantes a conectar los nuevos conceptos construidos con sus experiencias previas para así desarrollar su pensamiento crítico y creativo y por sobre todo una metacognición conceptual.

En el constructivismo, se promueve un ambiente de aprendizaje colaborativo en el que los estudiantes trabajan juntos y comparten sus ideas y conocimientos. Esto fomenta la interacción y el diálogo, y permite a los estudiantes aprender unos de otros y construir conocimientos en conjunto.

Uno de los recursos con los que cuenta el docente es la indagación: este proceso de indagación consiste en la búsqueda y recopilación de información con el fin de descubrir o investigar un tema o problema en particular. Varios autores trabajan con esta herramienta, entre ellos Meyer (2018), Hutchings (2007), Prince y Felder (2007), entre otros. Este proceso se divide en varios pasos, que incluyen:

1. Identificación del problema o tema a investigar: se trata de determinar de manera clara y precisa lo que se desea explorar. Este paso apunta esencialmente a afinar la búsqueda relevante para precisar la problemática.
2. Revisión de la literatura: se busca información relevante sobre el tema o problema en libros, revistas, artículos y otros medios. Aquí es donde entran en juego las tecnologías: Internet, bases de datos, ChatGPT, etc.
3. Formulación de hipótesis: se formulan hipótesis sobre el tema o problema, que se pondrán a prueba durante la exploración o investigación.
4. Diseño de la investigación: se planifica cómo se llevará a cabo la investigación, incluyendo la selección de la muestra y la recolección de datos.
5. Recolección de datos: se recopilan los datos necesarios para probar las hipótesis formuladas.
6. Análisis de datos: se analizan los datos recopilados para determinar si las hipótesis son ciertas o falsas.
7. Conclusión: se llega a una conclusión sobre el tema o problema investigado, basada en los resultados del análisis de datos.

Este proceso de indagación es un enfoque sistemático y riguroso que se utiliza en diversas áreas, incluyendo la ciencia, la investigación social y la investigación empresarial, entre otras. Son muchos los

autores que han empleado este método, especialmente en matemáticas, entre ellos citaremos como ejemplo a: Euclides, considerado uno de los padres de la geometría y es conocido por su obra "Los Elementos", que es un compendio de definiciones, axiomas y teoremas que han sido influyentes en la enseñanza de la geometría durante siglos. Newton, que es conocido por su teoría de la gravitación universal, su ley de acción y reacción, y sus cálculos sobre la óptica. También es considerado uno de los fundadores de la matemática analítica. Gauss es considerado uno de los matemáticos más importantes de todos los tiempos y es conocido por sus contribuciones a la teoría de números, la astronomía y la estadística. Turing, es conocido por su trabajo en teoría de la computación y por ser uno de los primeros en desarrollar la idea de una máquina de calcular universal, que es considerada una de las bases de la informática moderna, entre otros.

Uno de los desafíos que enfrentamos los docentes en la actualidad es la enseñanza diferenciada, esto es trabajar con cada alumno de acuerdo con sus propias capacidades. En la educación diferenciada, la indagación se puede usar para personalizar el aprendizaje de los estudiantes de acuerdo con sus intereses y necesidades individuales. Esto significa que los profesores pueden crear actividades y proyectos que permitan a los estudiantes investigar y explorar temas que les resulten especialmente interesantes o relevantes.

Al permitir que los estudiantes dirijan su propio aprendizaje a través de la indagación, se les brinda la oportunidad de desarrollar habilidades importantes, como la resolución de problemas, la colaboración y la comunicación. Además, al fomentar la curiosidad y la motivación, la indagación puede ayudar a los estudiantes a mantenerse más enfocados y comprometidos con su aprendizaje pasando así de un currículum bidimensional a uno superador tridimensional.

Un currículum bidimensional refiere a un enfoque en el que se prioriza la transmisión de conocimientos y habilidades específicas. En este tipo de currículo, los estudiantes aprenden a través de la enseñanza directa, la memorización y la práctica de habilidades específicas. La evaluación suele centrarse en la medición del conocimiento y la habilidad de los estudiantes en la mera aplicación a una serie acotada de actividades, trabajos prácticos, ejercitaciones, etc.

Para Lynn Erickson (2017), el currículo tridimensional se refiere a un enfoque de enseñanza que se centra en tres dimensiones interrelacionadas: conceptos, habilidades y contenido.

La dimensión de conceptos se refiere a las ideas fundamentales que los estudiantes necesitan comprender para comprender un tema o disciplina en particular. En la enseñanza de las matemáticas, esto podría incluir conceptos como los números, la geometría, las funciones, la estadística y la probabilidad, entre otros.

La dimensión de habilidades se refiere a las competencias prácticas que los estudiantes necesitan desarrollar para aplicar los conceptos y aplicarlas a situaciones más complejas. Estas habilidades pueden incluir la resolución de problemas, la modelización, la argumentación, el razonamiento y la comunicación matemática.

La dimensión de contenido se refiere a los detalles específicos de los conceptos y habilidades que se están enseñando. En la enseñanza de las matemáticas, esto podría incluir, por ejemplo, los algoritmos de suma, resta, multiplicación y división, la medición, la identificación de patrones, entre otros.

Esta manera de concebir el currículo "puede ayudar a los estudiantes a desarrollar una comprensión más profunda y significativa de las matemáticas. Al enseñar los conceptos de una manera más amplia y relacional, los estudiantes pueden ver las conexiones entre los diferentes conceptos y cómo se vinculan con el mundo que los rodea. Al mismo tiempo, el enfoque en el desarrollo de habilidades les permite aplicar los conceptos matemáticos de una manera más efectiva en situaciones planteadas. En general, el enfoque tridimensional puede ayudar a los estudiantes a desarrollar una comprensión más completa y significativa de las matemáticas (incluyendo su historia), lo que puede ayudarlos a tener éxito tanto en el análisis crítico como en la metacognición de aquello que "aprehende".

Las nuevas tecnologías se refieren a herramientas digitales y tecnológicas que están surgiendo y evolucionando a un ritmo rápido. Estas tecnologías incluyen dispositivos móviles, aplicaciones, software educativo, robots, inteligencia artificial, entre otros. Debemos distinguir entre "tecnología y tecnologías":

la primera resulta “cualquier cosa que ayude a una persona y amplíe sus capacidades. La tecnología se trata como un concepto que puede aplicarse a múltiples formas de ampliar las capacidades humanas con sistemas, soluciones y máquinas...La tecnología es un concepto que se aplica a casi todas las herramientas o máquinas que encontramos por primera vez, y somos muy conscientes de que una herramienta o máquina es “tecnología” cuando falla o desaparece.”¹. Sin embargo, esta tecnología puede variar entre *tecnologías múltiples* (varias tecnologías que se emplean en un contexto determinado, *nuevas tecnologías* (tecnología disponible pero nueva para una determinada institución) o *tecnologías emergentes* (aquellas tecnologías que aún están en desarrollo y cuyas repercusiones en la enseñanza y el aprendizaje aún no están bien establecidas).

En la enseñanza de las matemáticas, la tecnología pueden ser una herramienta valiosa para mejorar la comprensión de los estudiantes y para aumentar su motivación e interés en la materia, entre las que mencionaremos el **software educativo** (Matematik, etc), **las herramientas digitales** (GeoGebra, Desmos, Graph, mientras que las herramientas de colaboración en tiempo real como Google Docs y los foros de discusión en línea permiten a los estudiantes trabajar juntos y construir juntos su conocimiento); **la realidad virtual** (juegos de escape, etc.); **los juegos matemáticos** (ayudan a explorar y experimentar con conceptos en un ambiente seguro), etc. Además, la tecnología también puede proporcionar a los docentes una amplia gama de recursos para personalizar y adaptar el aprendizaje a las necesidades individuales de cada estudiante. Por ejemplo, los programas de aprendizaje adaptativo pueden identificar las fortalezas y debilidades de cada estudiante y proporcionar materiales de enseñanza y actividades individualizadas en consecuencia.

Las tecnologías digitales y tecnológicas ofrecen numerosas oportunidades para mejorar la indagación en matemáticas. Algunos ejemplos incluyen: el acceso a datos y herramientas (Gapminder), modelado y visualización (Applets, actividades preparadas en Desmos, Wolfram Alpha, etc.), la comunicación y colaboración que se deben evidenciar en la indagación, la retroalimentación y la autorregulación como parte del proceso.

La indagación matemática puede versar sobre cualquiera de los contenidos de la escuela media, pero es necesario elegir una temática que aporte distintas miradas que coadyuven a una instancia superadora (metacognición) del tema. Elegimos para esta ponencia los números irracionales y la pregunta ¿Cuál es el significado de referencia del número irracional en secundaria?

Autores como Reina, Wilhelmi y Lasa (2012), refieren que número irracional no puede ser, en secundaria, una mera formación propedéutica, que encontraría su pleno sentido solo años más tarde en la universidad, en particular en las facultades de ciencias. Este conjunto numérico requiere una construcción que trasciende el hecho de “para saber más”, “curiosidades matemáticas” o una información parcial tal como hallar las cifras decimales de $\sqrt{2}$. Por otra parte, la formalización de la propiedad de que $\sqrt{2}$ o $\sqrt{3}$ por el método del absurdo generalmente no es comprendida por el estudiante.

Pese a que la investigación en didáctica de la matemática sobre la enseñanza de los números irracionales es vastísima retomaremos las ideas de Zaskis y Sirotic (2004) observan una dualidad “transparencia-opacidad” en las representaciones de los alumnos de los números racionales e irracionales que dificulta su distinción, hecho potenciado por el uso de la calculadora. Asimismo, la ubicación de un número irracional en la recta real plantea a los estudiantes conflictos cognitivos en general difíciles de gestionar (Sirotic y Zaskis, 2007). Adoptaremos la noción de cortadura de Dedekind desde una concepción intuitiva para construir el número irracional.

Existen varios sitios de páginas en Internet que refieren a Fibonacci, la historia de la reproducción de conejos (que da lugar a la sucesión conocida) y hasta de la sucesión de los cocientes entre dos términos consecutivos $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ de esta sucesión.

Una de las herramientas con las que cuentan los alumnos es el ChatGPT el cual arroja la siguiente definición

¹ “Tecnología y tecnologías”. En internet: https://resources.ibo.org/ib/works/edu_11162-417664?lang=es&root=1.6.2.2.5. Disponible el 15 de febrero de 2023.

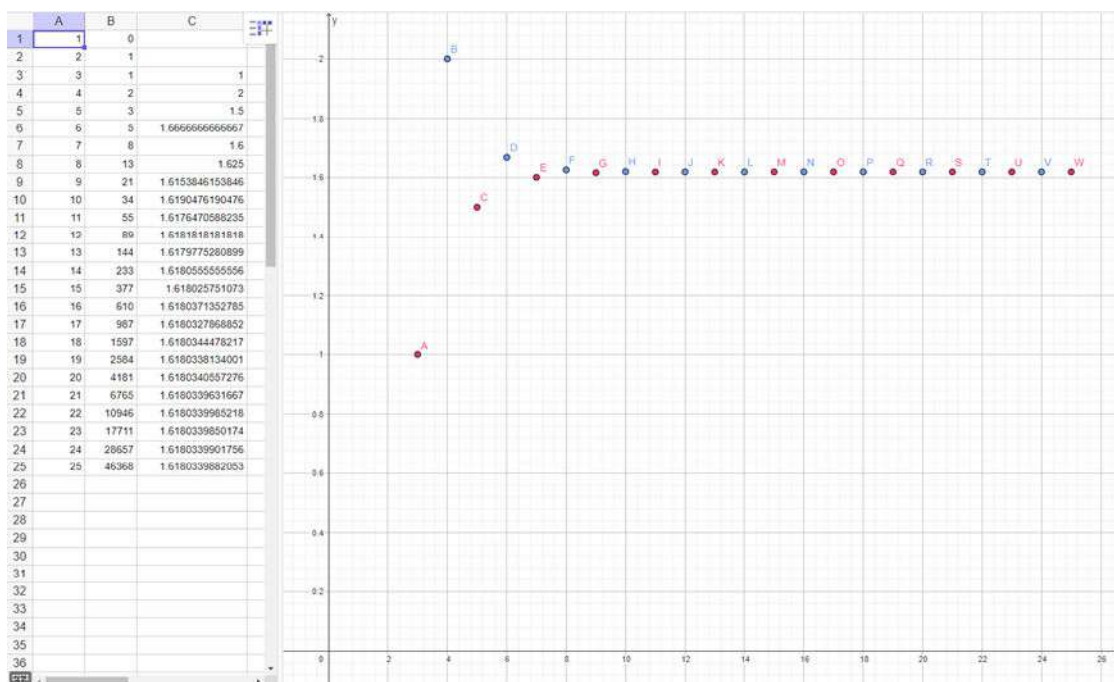


¿Cual es el cociente entre dos terminos consecutivos de la sucesión de Fibonacci?



El cociente entre dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci se acerca cada vez más a la razón de oro, que es un número irracional aproximadamente igual a 1.61803398875. En otras palabras, si dividimos un término de la sucesión de Fibonacci por el término que lo precede, el resultado se acerca cada vez más a la razón de oro a medida que avanzamos en la secuencia.

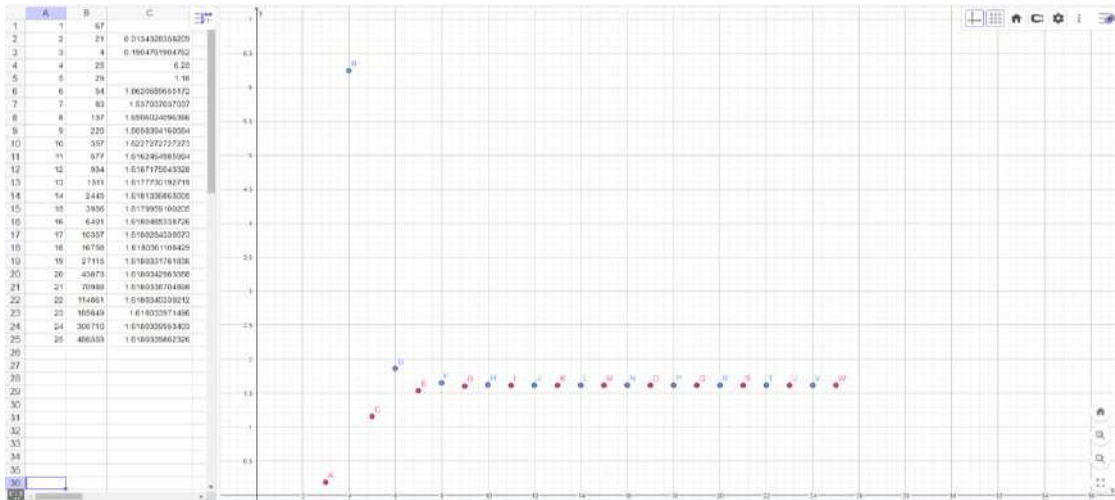
No queda claro, como el cociente de dos números enteros (definición de número racional), el resultado “se acerca cada vez más” al número de oro (que es claramente un número irracional). Para ello proponemos hacer notar las dos sucesiones (ascendente y descendente) que tienden al número de oro empleando aplicaciones al alcance de todos los alumnos como Excel, GeoGebra, Desmos, de utilización totalmente gratuitas.



En el gráfico podemos observar que los puntos A, C, E, etc. son términos de una sucesión creciente mientras que B, D, F, etc. son los términos de la sucesión decreciente, pero en ambas sucesiones la diferencia entre un término y el anterior se acerca a 0 a medida que la sucesión de los cocientes crece.

Como indagación de esta temática puede proponerse:

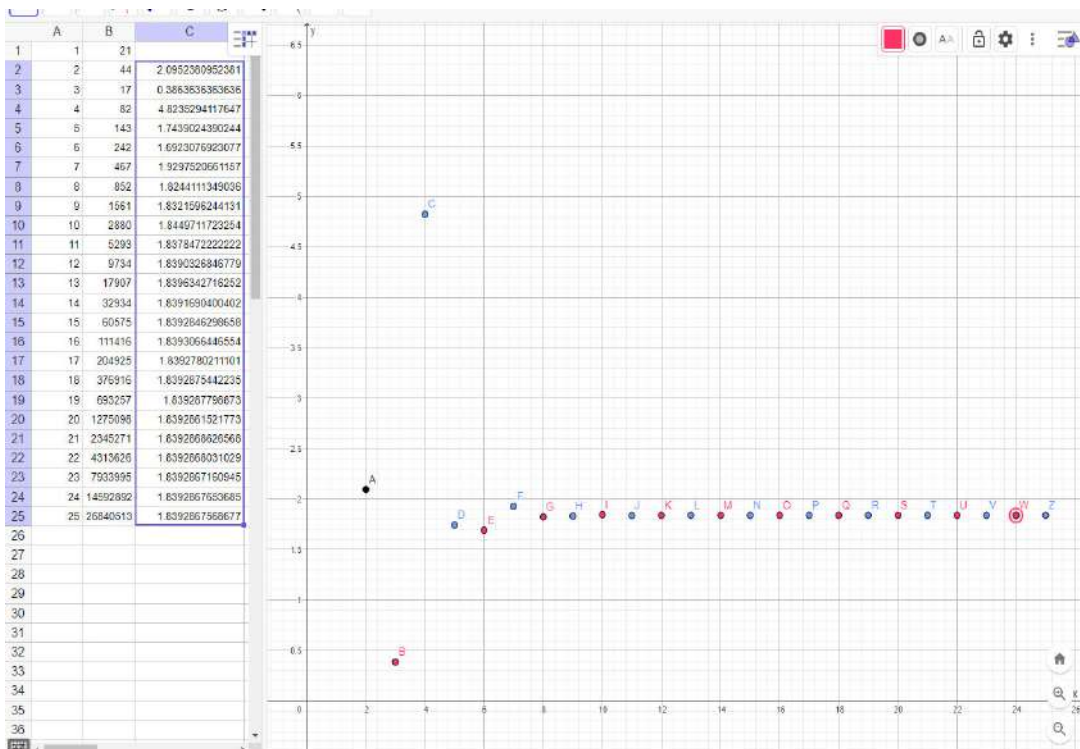
- ¿Sólo vale esta secuencia para los números comenzando con 0 y 1? ¿Qué ocurre si se comienza con dos números enteros arbitrarios? ¿Siguiendo siendo válida la relación entre dos términos consecutivos de la sucesión $(\frac{u_n}{u_{n-1}})$?
- Si se construyera una secuencia comenzando por 0, 1, 1, y el cuarto número fuera la suma de los tres primeros, el quinto número la suma del segundo, tercero y cuarto, y así sucesivamente... ¿Qué ocurriría con los cocientes de dos términos consecutivos $(\frac{u_n}{u_{n-1}})$ de esta secuencia?
- Si se construyera una secuencia comenzado por tres números enteros arbitrarios, ¿Qué ocurriría con los cocientes de dos términos consecutivos $(\frac{u_n}{u_{n-1}})$ de esta secuencia? ¿Es válida para tres números enteros iguales?



Sigue siendo válida la propiedad si los primeros números son enteros negativos.

d) Si se construyera una secuencia comenzando con 0, 1, 1, 2 y el quinto término de esta secuencia fuera la suma de los cuatro primeros términos de la misma, ¿A qué resultado llegarías con los cocientes de dos términos consecutivos ($\frac{u_n}{u_{n-1}}$) de esta secuencia?

e) Si se construyera una secuencia comenzando con cuatro números enteros arbitrarios y el quinto término de esta secuencia fuera la suma de los cuatro primeros términos de la misma, ¿A qué resultado llegarías con los cocientes de dos términos consecutivos ($\frac{u_n}{u_{n-1}}$) de esta secuencia?



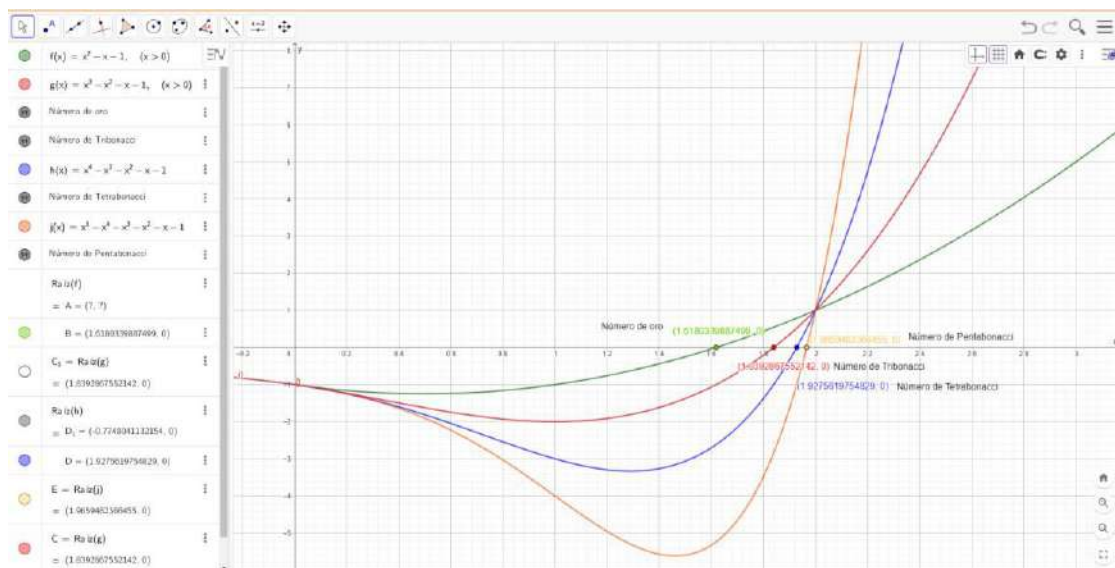
Nuevamente las dos sucesiones de aproximan a un número que justamente es un nuevo número irracional.

f) ¿Puede extrapolarse este comportamiento para cualquier secuencia arbitraria de k números donde el término $k+1$ es la suma de los k términos anteriores? ¿A qué resultado llegarías con los cocientes de dos términos consecutivos ($\frac{u_k}{u_{k-1}}$) de esta secuencia?

- g) ¿Siguen siendo válidas las afirmaciones anteriores para el producto entre los dos términos anteriores?
 ¿Cuáles serían en este caso las condiciones de posibilidad?

Muchas de las indagaciones anteriores pueden formularse a partir de la herramienta Excel o directamente el GeoGebra o Desmos y formalmente validadas tomando como punto de partida la obtención de φ y procediendo de manera análoga. Los estudiantes más aventajados podrán dar cuenta de estos resultados e incluso generalizar los polinomios que sucesivamente se obtienen. El número de oro y los demás números irracionales que se obtienen, son la raíz positiva de esos polinomios.

Otra práctica interesante resulta en nombrar a estos números irracionales con algún nombre y justificar desde el propio procedimiento que se logró para obtenerlo: así pueden surgir “números de Bibocacci”, “números de Tribonacci”, etc.



No tenemos que perder de vista la conclusión del proceso de indagación que debe cumplir ciertas condiciones para ser considerado válido el proceso: contar con una visión crítica que sea crucial, decisiva o sumamente perspicaz que desarrollará la indagación al considerar los resultados matemáticos y su efecto en la comprensión que el alumno tiene del tema. Entre las posibles formas de evidenciar que ha habido una reflexión crítica están: plantearse situaciones en las que no se cumplan las condiciones, discutir qué implicaciones tienen los resultados, discutir los puntos fuertes y débiles de cada enfoque, y considerar diferentes perspectivas.

Referencias Bibliográficas

Bachillerato Internacional. “El aprendizaje, la enseñanza y el liderazgo con tecnologías”. En Internet: <https://resources.ibo.org/data/learning-teaching-and-leading-with-technologies>. Disponible el 18 de febrero de 2023.

Bachillerato Internacional. “Los enfoques de la enseñanza y el aprendizaje en el Programa del Diploma”. En Internet: https://xmltwo.ibo.org/publications/DP/Group0/d_0_dpatl_gui_1502_1/static/dpatl/img/files/es/d_0_dpyy_y_gui_1412_1_s.pdf. Disponible el 18 de febrero de 2023.

Bishop, A. J. (1998). “Equilibrando las necesidades matemáticas de la educación general con las de la instrucción matemática de los especialistas”. SUMA, febrero, pp, 25-37.

Erickson, H. L., Lanning, A., French R. (2017). Concept-Based curriculum and Instruction for the thinking classroom (2nd. Edition). Thousand Oaks, CA: Corwin.

Reina, L.; Wilhelmi, M. R.; Lasa, A. Configuraciones epistémicas asociadas al número irracional. Sentidos y desafíos en Educación Secundaria Educación Matemática, vol. 24, núm. 3, diciembre, 2012, pp. 67-97 Grupo Santillana México Distrito Federal, México.

Sirotic N., Zaskis R. (2007). Irrational numbers on a number line –Where are they? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38(4), 477–488. [Disponible en: <http://www.peterliljedahl.com/wp-content/uploads/CS-Sirotic-IJMEST-2007.pdf>

Pandemia – Pos-pandemia – Emociones Reflexiones sobre la educación en la virtualidad

Julia L. FRYDMAN
julialeonor@live.com

Resumen

La irrupción abrupta del CoViD-19 generó la necesidad de tomar medidas extremas, el aislamiento y la imposibilidad de continuar con nuestras rutinas generó en todos nosotros diversos estados emocionales.

La educación también sufrió un cambio inesperado generando muchos interrogantes y desafíos que en la Pos-pandemia se está tratando de capitalizar con la finalidad de rediseñar la educación considerando que el aprendizaje y la emoción son inseparables.

Palabras Clave: Pandemia - Pos-pandemia – Emociones – Educación - Virtualidad.

Introducción

El objetivo de esta presentación es dar cuenta de las emociones que surgieron a partir del hecho altamente traumático que la humanidad sufrió con la pandemia de CoViD-19 y cómo afectó esta situación la salud mental de niños, niñas y adolescentes.

Las medidas preventivas para evitar el contagio como el aislamiento social y el cambio abrupto de las rutinas impactaron en nuestra salud mental, generando emociones como ansiedad, irritabilidad, miedo, enojo, falta de atención y concentración, trastornos del sueño y la alimentación, entre otros.

En relación a la educación, la pandemia tuvo un gran impacto en los procesos de enseñanza y aprendizaje obligando a los docentes a adaptarse a nuevos modelos educativos para garantizar la continuidad de las clases presenciales, a través de clases en línea y tecnologías digitales interactivas (herramientas didácticas y plataformas educativas interactivas que ya existían antes de la pandemia).

Algunas investigaciones sobre la educación en tiempos de pandemia dan cuenta de las diferentes miradas en docentes y estudiantes de distintos niveles de enseñanza.

Pandemia y Emociones

La pandemia de CoViD-19 nos ha impactado a todos y la percepción de esta situación nueva, abrupta y amenazante, afectó nuestro estado emocional.

Las manifestaciones emocionales que se observaron durante la pandemia fueron principalmente: ansiedad, miedo, irritabilidad, enojo, depresión, dificultades en la concentración y atención, trastornos del sueño y la alimentación.

La ansiedad es un mecanismo de defensa que utiliza el organismo para poner a la persona en estado de alerta y está relacionada a una preocupación excesiva acerca de algún hecho que ocurrirá en el futuro, generando incertidumbre y miedo de situaciones que uno siente que no puede controlar (miedo al contagio, a la propia muerte o de algún familiar).

Con el aislamiento se produjo una ruptura en nuestras rutinas causando una desorganización en nuestra estructura y un quiebre emocional al no poder tener contacto social (familia, amigos, compañeros). Esta situación generó también frustración por la sensación de pérdida de la libertad, enojo, aburrimiento y tristeza, alterando los patrones de la alimentación y el sueño.

¿Qué sucedió con las emociones en los niños y adolescentes?

Si bien el aislamiento fue un medio para evitar el contagio masivo y que colapsaran los sistemas de salud trajo también consecuencias psicosociales en los niños ya que se produjeron cambios de rutina y en actividades significativos para ellos.

Al no poder concurrir a la escuela o al jardín, la socialización y el contacto físico con otros niños quedó interrumpida generando en ellos malestar y enojo.

Cuando los niños no pueden identificar y expresar sus emociones se presentan cambios en el comportamiento, irritabilidad, déficit de atención, preocupación y miedo (a enfermar y a morir) y rituales de limpieza más obsesivos.

En los adolescentes se han observado principalmente tristeza y desesperanza ya, que, al estar en un momento evolutivo de mucho cambio y estrés dado por el proceso de consolidación de la identidad, son más vulnerables y presentan más síntomas de ansiedad y depresión que otros grupos.

El aislamiento prolongado no les permitió lograr una adecuada búsqueda de uno mismo en relación con otros ni generar la distancia necesaria de los padres, generando relaciones conflictivas en casa.

A los riesgos que se expusieron los niños, niñas y adolescentes durante la pandemia como el estrés y los problemas psicológicos, hay que tener en cuenta las prácticas parentales negligentes, el maltrato físico y emocional y el estrés de los padres y cuidadores.

¿Cómo influyen las emociones en el aprendizaje?

Rafael Bizquerra Alzina, presidente de la Red Internacional de Educación Emocional y Bienestar -Barcelona

(1) resalta la importancia de las emociones en el aprendizaje ya que la emoción y la cognición son inseparables porque las emociones influyen en la capacidad de razonamiento, la memoria, la toma de decisiones y la actitud para aprender, por eso las emociones forman parte del proceso de aprendizaje.

Según Bizquerra, aprendemos aquello que realmente queremos aprender y como todo no cabe en el cerebro, aquello que consideramos no importante, no nos interesa y lo olvidamos.

A partir de esta observación se llega a la siguiente conclusión: emoción y motivación son las dos caras de la misma moneda.

La motivación puede surgir del valor que uno le atribuye a aprender algo por el placer de aprender o por la utilidad que tiene para alcanzar otros objetivos.

Hay emociones que ayudan a aprender como la curiosidad y otras que limitan el aprendizaje como el miedo.

Los estados emocionales negativos que dificultan el aprendizaje son: miedo, ansiedad, tensión, enojo, culpa, aburrimiento, envidia y celos.

¿Cuántas de estas emociones negativas aparecieron y se instalaron por la pandemia?

En un trabajo de investigación en adolescentes sobre las emociones y escolarización, en tiempos de pandemia, que realizó la Dra. Kaplan, especialista en Educación (2), se obtuvieron las siguientes conclusiones:

-El 83% de los adolescentes se sintió mal o se adaptó a disgusto a la virtualidad.

-9 de cada 10 expresaron deseos de volver a la presencialidad.

-6 de cada 10 se sintieron solos.

-Entre el 40 y 50% tenían miedo al contagio y muerte de un familiar.

-El 60% sintió aburrimiento, 39% ansiedad y 31% falta de concentración.

-

En marzo del 2020 se inició una nueva etapa en la historia de la educación argentina. El cierre de los establecimientos educativos como medida preventiva contra el CoViD-19 condujo a la enseñanza presencial a migrar al espacio digital para garantizar la continuidad pedagógica.

Si bien antes de la pandemia ya existían herramientas y plataformas educativas interactivas, durante la pandemia y en función del confinamiento se aceleró la implementación del aprendizaje e interacción online.

Los docentes se vieron obligados a adaptar los proyectos pedagógicos a la modalidad virtual, períodos breves, videos, lecturas orientadas, consignas claras con el objetivo y la ilusión de que los estudiantes tengan una participación activa.

Unicef Argentina (3) realizó una investigación sobre el impacto de la pandemia en la educación de niños, niñas y adolescentes teniendo en cuenta especialmente la brecha digital, es decir, la desigualdad, uso o impacto de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) entre grupos sociales, obteniendo estos resultados:

-1 de cada 2 niños no cuenta con una computadora en su casa para fines educativos.

-Menos de la mitad de los hogares tienen buena conexión a Internet.

-3 de cada 10 niños no acceden a ningún tipo de conectividad domiciliaria.

-El 90% de los niños que acceden a educación privada cuentan con Internet desde la casa, los que acuden a escuelas públicas el 60%.

-1.5 millones de estudiantes de diferentes niveles educativos en el país se verían desvinculados de la educación por la pandemia.

Antes de la pandemia los estudiantes usaban las tecnologías como recreación y en momentos de ocio, pero con la pandemia lo digital se incorporó en el aula produciendo en los estudiantes desorientación ya que lo que antes era placentero ahora se transformó en otra cosa.

El Instituto Gino Germani de la Universidad de Buenos Aires, en abril 2020, realizó una encuesta y relevamiento en Ciudad de Buenos Aires y Gran Buenos Aires sobre el uso de tecnologías durante los tiempos de aislamiento social (4).

La encuesta destinó una sección a conocer los hábitos y vínculos con la información de los niños y adolescentes en tiempos de cuarentena y la observación de los padres de esa situación, obteniendo los siguientes resultados:

El 62% de los padres encuestados permitió que sus hijos utilizaran los dispositivos más tiempo de lo habitual (44% indica que la utilización es un poco mayor a lo habitual y el 18,5% mucho mayor)

El 37% de los padres no observó cambios siendo el uso de las pantallas igual que antes del aislamiento.
El 48% de los padres manifestó que sus hijos usan las pantallas (celular, tableta, computadora) más de 4 horas por día y que el 55% pasa más de 2 horas por día con la televisión.
Más allá de los contenidos más consumidos como Youtube, Tik Tok y Netflix es importante analizar el porqué del aumento en el tiempo de pantallas de casi un 500% durante la pandemia.
El uso excesivo de tiempo en pantallas puede causar problemas de atención y concentración, favorece el sedentarismo, produce alteraciones de la visión, afecta el ciclo del sueño y provoca falta de interacción familiar y social.
Todos los cambios que generó la pandemia, el exceso de estrés y ansiedad, la falta de actividades y rutinas produjo un desequilibrio emocional, por tal motivo las pantallas se transformaron en un refugio. No sólo que distraían la atención de toda la situación angustiante, sino que permitía estar en contacto con familia y amigos.
¿Qué ocurre con la imagen en las pantallas?
Los videos y juegos presentan 3 características fundamentales: la continuidad, el brillo y el movimiento. Estas características crean un carácter hipnótico, por eso uno queda capturado por la imagen impactando en la pasividad de poder pensar.
Lacan, psicoanalista francés (5) planteó el estadio del espejo que surge entre los 6 y 18 meses, etapa en la cual el niño puede por primera vez percibir su imagen corporal completa en el espejo.
Cuando un niño se reconoce por primera vez en el espejo se alegra, pues en lugar de ver partes de su cuerpo, observa la totalidad. El reconocimiento de la propia imagen especular sucede con la ayuda de otro (la función materna).
La imagen de la madre es organizadora y fundamental para que se constituya el yo del niño.
Desde el inicio del nacimiento la mirada de la función materna es la que proporciona calma, seguridad y afecto., por lo tanto, en momentos de dolor o angustia la contención y la mirada de la madre produce tranquilidad.
Con esta breve referencia en relación a la función de la imagen no sólo como formadora del yo sino como organizadora emocional nos permite entender por qué durante la pandemia se produjo un aumento significativo en el uso de las pantallas.

Universidad y Pandemia (6)

Con la pandemia se observaron 2 tendencias contradictorias: Un sector de los estudiantes perdió el trabajo que le permitía sostener los estudios o tenían menos tiempo para estudiar porque tenían que dedicarle más tiempo al trabajo.
Por otro lado, permitió que estudiantes pudieran avanzar en sus carreras ya que con la virtualidad acomodaron su tiempo fuera de los horarios de trabajo.
En el año 2021 se observó un aumento en la cantidad de matrículas en varias de las universidades.
El 99,5% de los docentes debió transformar el dictado de sus asignaturas a la modalidad virtual para poder continuar con las actividades académicas y el 87% pudo cumplir con los objetivos propuestos.
La brecha digital no impactó en forma crítica en el sistema universitario y dada la expansión que tuvo la virtualización en el sistema universitario en la última década, permitió que sea el nivel educativo que mejor sobrellevó la crisis por la pandemia.
La pandemia generó un desafío para los estudiantes de los primeros años de las carreras. La imposibilidad de tener contacto con profesores, compañeros y autoridades se agregó la dificultad de familiarizarse con las reglas y la dinámica de la universidad.
Chicos.net realizó un informe muy interesante sobre las clases virtuales y el aprendizaje en pandemia en donde se muestra claramente las diferentes miradas de estudiantes y docentes.
El 62% de los docentes y el 90% de los estudiantes creen que con las clases virtuales no se pudo alcanzar el mismo nivel de aprendizaje que antes de la pandemia.
En relación al tema del acceso y uso de las tecnologías en la comunidad educativa elaborado por Chicos.net LAB que es un observatorio de investigación que explora el vínculo de niños, niñas, adolescentes y jóvenes con la tecnología, se analizaron los testimonios de docentes de primaria y secundaria de escuelas estatales de sectores medios y sectores populares de todo el país.
Y se realizó encuestas a estudiantes entre 13 y 18 años de escuelas estatales y privadas.
Según los docentes después de casi dos años de clases virtuales, el acceso a la tecnología en las escuelas públicas sigue siendo limitado ya que el 40% de los docentes tienen computadoras disponibles en las escuelas, pero en general, con mala calidad y velocidad de Internet.
El 71% de los docentes coinciden que las clases virtuales no reemplazan la presencialidad mientras que entre los adolescentes es el 86%.

El 77% de los docentes y el 74% de los estudiantes coinciden que hay que recuperar la capacidad de concentración y las habilidades de aprendizaje que se perdieron en la pandemia (7).

Las claves para reconstruir mejor los sistemas educativos tras la pandemia

Reconectar con los estudiantes que salieron del sistema educativo, reinventar el aprendizaje, fomentar la transformación digital y garantizar entornos escolares seguros.

Los desafíos que dejó la pandemia en la educación plantean grandes retos para los docentes y padres.

Uno de los principales motivos son las diferentes oportunidades y recursos con los que cuentan los estudiantes además del acompañamiento que pudieron recibir por parte de sus padres y acompañantes. La brecha digital que permite asegurar que todos los estudiantes tengan acceso a las tecnologías digitales.

Los docentes deben prepararse en la utilización de sistemas de gestión del aprendizaje digital y la pedagogía del aprendizaje en línea.

Otro de los retos que la educación tiene que enfrentar esta relacionado a la salud mental de los estudiantes ya que no todos han atravesado la pandemia de la misma manera, por lo tanto, es muy importante para docentes y padres tenerlo en cuenta.

El último reto que enfrenta la educación es el desarrollo del estudiante, lejos de la escuela, el docente también tiene que entender que la relación del estudiante con sus pares también se cortó abruptamente, dañando las relaciones interpersonales.

Que los docentes puedan entender los desafíos que ha dejado la pandemia es prioritario para acompañar a los estudiantes en el proceso de retorno a la presencialidad (8).

Conclusión

Lo más evidente para todos con esta situación de pandemia es que el cambio es lo único permanente. La incertidumbre nos afectó emocionalmente y la pandemia nos enseñó que cuando parece que todo está controlado aparece una nueva situación que altera todo. Vivir el aquí y ahora permite manejarnos con lo que tenemos adelante, controlando mejor la ansiedad que genera la incertidumbre.

En relación a la educación, la pandemia nos mostró que los dispositivos y la conectividad no pueden separarse de la enseñanza y que la escuela tiene que rediseñarse.

Referencias Bibliográficas

(1) Educa Web.com Rafael Bisquerra Alzina

<https://www.educaweb.com/contenidos/educativos/tecnicas-estudio/como-influyen-emociones-aprendizaje/>

(2) Dra. Kaplan (2021). Emociones y escolarización en tiempos de pandemia.

[https://scholar.google.com.ar/scholar?q=Dra.+Kaplan++Emociones+y+escolarizaci%C3%B3n+en+tiempos+de+pandemia+\(2021\)&hl=es&as_sdt=0&as_vis=1&oi=scholar](https://scholar.google.com.ar/scholar?q=Dra.+Kaplan++Emociones+y+escolarizaci%C3%B3n+en+tiempos+de+pandemia+(2021)&hl=es&as_sdt=0&as_vis=1&oi=scholar)

(3) Unicef Argentina (2021). Encuesta Impacto de la pandemia en la educación de niños, niñas y adolescentes.

<https://www.unicef.org/argentina/media/11626/file/Impacto%20de%20la%20pandemia%20en%20la%20educaci%C3%B3n%20de%20ni%C3%B1as,%20ni%C3%B1os%20y%20adolescentes.pdf>

(4) Instituto Gino Germani (2020). Uso de tecnologías en tiempos de pandemia.

https://www.sap.org.ar/uploads/archivos/general/files_uso-pantallas-epoca-covid_1589324474.pdf

(5) Lacan, J. (1935). Estadio de espejo. El estadio del espejo como formador de la función del yo [je] tal como se nos revela en la experiencia psicoanalítica

https://arditiesp.files.wordpress.com/2012/10/lacan_estadio_del_espejo.pdf

(6) Ferrante, P.; Rosemberg, D. (2021). Informe sobre la universidad en pandemia. Revista Crisis.

<https://revistacrisis.com.ar/notas/informe-sobre-la-universidad-en-pandemia>

(7) Chicos.net (2021). Inclusión digital: <https://www.chicos.net/category/inclusion-digital/>

(8) Agendaeducativa.org Educación pos-pandemia, claves para reconstruir mejor (2022)
<https://agendaeducativa.org/educacion-pospandemia-claves-para-reconstruir-mejor/>

Modelización Matemática en el acceso a la universidad

Mabel RODRÍGUEZ

Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina

mrodri@campus.ungs.edu.ar

Resumen

En esta presentación describimos inicialmente la problemática del acceso a los estudios superiores y discutimos las argumentaciones que cargan la entera responsabilidad del abandono y fracaso a los estudiantes. En segunda instancia, apelamos a enfoques de Educación Matemática cuyos resultados de estudios, investigaciones y trabajos de campo de distinta naturaleza permiten considerar alternativas no remediales para las primeras materias de Matemática en la Universidad. En ellas, los estudiantes tienen un rol central, activo que los posiciona en el centro de la clase abordando actividades con sentido, vinculadas con las carreras y que promueven su autonomía. Enmarcados en la Modelización Matemática, ofrecemos un ejemplo que se trabaja en un Taller inicial de Matemática en la Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina. Con él pretendemos mostrar cómo una problemática que puede resolverse con cuestiones matemáticas avanzadas, también puede abordarse con álgebra básica.

Palabras Clave: Modelización Matemática – Resolución de Problemas – Acceso a la Universidad – Enseñanza de la Matemática Superior.

Introducción

El problema del acceso a la universidad, la deserción, retención y condiciones para una inserción adecuada son asuntos preocupantes que vienen siendo estudiados hace años, desde múltiples perspectivas y áreas disciplinares. Basta ver el trabajo de Gluz (2011) para comprender la complejidad y dimensionar las transformaciones globales que fueron dándose para que, hoy en día, tengamos en el inicio de los estudios universitarios un gran grupo de estudiantes muchos de los cuales sufrirá rezago, deserción y fracaso. Las dificultades académicas, son un factor prevalente pero que se combina con un conjunto de obstáculos concurrentes que empeoran la situación llevando, en múltiples ocasiones, al abandono (Amago, 2007). Estas dificultades se vinculan con el capital cultural al momento de ingresar a la formación superior, otro de los factores que han sido identificados como condicionantes. Sin embargo, ubicar el problema en el estudiante y dejar fuera las instituciones, los docentes y las propuestas de enseñanza, resulta una simplificación no adecuada. Cuando a una situación compleja, que excede largamente a la Argentina, sumamos que, según la carrera elegida, las primeras materias que los estudiantes enfrentan son de contenido matemático, el problema se agrava. Los estudiantes perciben imposibilidad de abordar los planteos recibidos de sus docentes, y estos depositan en ellos las causas del bajo rendimiento y mala formación.

Es usual encontrar propuestas de enseñanza de la Matemática de los primeros cursos de la Universidad que pretenden homogeneizar un punto de partida en los conocimientos de los estudiantes. Así, dedican horas de clase a recordar cómo se opera en distintos conjuntos numéricos, cómo se trabaja con expresiones algebraicas, cuáles son los casos de factorización, etc. Es decir, vuelven a presentar un conjunto de reglas que los estudiantes ya conocieron en el nivel medio, que los hechos muestran que no las recuerdan o que, si acaso sí lo hicieran, no reconocen cuál/es y cuándo la/s deben aplicar. Sin embargo, el docente queda con la convicción de que puede contar con tales conocimientos y que el punto de partida sobre el que *construir*, ahora es compartido. Cuando esto no ocurre, vuelven las explicaciones centradas en lo que los estudiantes no han realizado y las propuestas de solución son agregar más materias de Matemática para seguir *completando* los conocimientos faltantes. Esto adolece de problemas argumentativos, muestra un gran desconocimiento del campo de la Educación Matemática y sobre todo, no repara en las evidencias que el mismo docente está generando. Lo que propone, no funciona, y no lo advierte.

Por otra parte, el campo de la Educación Matemática trabaja sostenidamente para disponer de herramientas para abordar distinto tipo de situaciones, entre ellas las no favorables debido a distintas causas. Es posible encontrar aportes de naturaleza teórica, experimentales, metodológicos abordando diversidad de situaciones, contextos y realidades. De este modo entendemos que, el crucial momento del inicio de los estudios superiores puede asumirse poniendo en juego conocimientos de Educación Matemática que resulten pertinentes, y que brinden la posibilidad de analizar resultados de aprendizaje trascendiendo las explicaciones que simplifican la complejidad y que mayormente se expresan desde el sentido común.

En este trabajo esbozamos algunas ideas para en el inicio de los estudios superiores en Matemática que trascienden la pretensión de homogeneizar conocimientos. Contextualizamos y presentamos un ejemplo que se encuadra en una propuesta inicial de modelización matemática que aplicamos en el Taller Inicial Orientado en Ciencias Exactas (TIO-Exactas) en la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS).

Desarrollo

Sabido que no tiene sentido plantear un trabajo que unifique un punto de partida en conocimientos matemáticos en el inicio de los estudios superiores, apelamos a distintos resultados de investigaciones en Educación Matemática para abrir perspectivas y vislumbrar otras opciones.

Esto permite asumir esas materias iniciales como oportunidades para plantear un trabajo diferente que produzca relaciones valiosas con el conocimiento matemático. Es así que la perspectiva de la Resolución de Problemas, la Modelización Matemática o la Educación Matemática Crítica, entre otras, podrían resultar enfoques pertinentes que den posibilidades de inserción respetando puntos de partida y diversidad de saberes iniciales. Una descripción de los posicionamientos básicos de estas líneas puede verse, por ejemplo, en Pochulu y Rodríguez (2012) y Rodríguez et al. (2022).

Estos enfoques promueven una enseñanza de la matemática alrededor de la resolución de situaciones problemáticas genuinas, con sentido para los estudiantes y admiten distintas formas de abordaje. Se pone el foco en el trabajo matemático que estos despliegan durante todo el trabajo y no solo en el éxito de una respuesta correcta. Se promueve el intercambio entre pares, el trabajo colaborativo, la búsqueda de información y la comunicación como bases de una formación profesional que atiende a las diferencias, que promueve la autonomía y que brinda oportunidades para el desarrollo personal en un contexto social particular como el que configura cada aula, en la institución que la alberga.

Los contenidos matemáticos que se utilizan surgen como recursos para resolver las situaciones. Esto provoca, visto desde la enseñanza, que se *desordenen* respecto de las formulaciones tradicionales según las cuales las unidades se abordan en un cierto orden.

Ejemplificamos, en el siguiente apartado una propuesta de trabajo para el TIO-Exactas que requiere de un trabajo de modelización matemática. Antes de ello, mencionamos algunos autores como referencia para la perspectiva de la modelización matemática, como campo de investigación en Educación Matemática y como enfoque para la enseñanza. Pueden verse, por ejemplo: Blomhøj (2004), Blum (2002), Niss (2010), Pochulu (2018), Villa-Ochoa et al. (2022, en Rodríguez et al. 2022) y Villarreal et al. (2010).

A partir de allí, decidimos considerar la modelización matemática para la enseñanza de la matemática como un proceso en el que los estudiantes transitan distintas etapas. Entre ellas reconocer y observar un fenómeno de interés que involucra alguna problemática a resolver, búsqueda de información, selección y control de variables, la formulación de hipótesis y de un modelo cuyo propósito es describir cuantitativamente el fenómeno, su uso para responder la problemática y la validación en términos de factibilidad de la respuesta dada.

Un ejemplo

El TIO-Exactas es un taller inicial con 48 horas de duración, 8 de las cuales se gestiona a distancia, a través de un aula virtual con una propuesta íntegramente asincrónica. Cursan el TIO-Exactas estudiantes que inician distintas carreras en la UNGS: ingenierías, economías, profesorado, etc. y esta diversidad confluye en cada uno de los cursos. Es una materia que consideramos masiva, con cientos de estudiantes y un equipo docente amplio que trabaja bajo una coordinación centralizada. El TIO-Exactas propone promover el desarrollo de habilidades matemáticas (interpretación de bibliografía matemática, el uso de lenguaje matemático y acceso y uso de recursos tecnológicos para aprender matemática) y hábitos de estudio (toma de apuntes y la preparación de exámenes). Esto se lleva a cabo con contenidos de álgebra básica (ecuaciones, expresiones algebraicas e inecuaciones sencillas). En todo momento se promueve el uso de recursos tecnológicos (celular, internet, GeoGebra, Photomath, Excel, etc.) impulsando a los estudiantes a decidir cuándo les sería útil hacerlo, y eligiendo el que consideren más adecuado, según el caso.

La propuesta didáctica la diseña la coordinación y plantea un trabajo en bloques, cada uno de los cuales tiene dos partes. La primera de ellas plantea una situación problemática a ser abordada por los estudiantes. Las situaciones han sido diseñadas de modo de acercar distintas temáticas de las carreras que cursan los estudiantes. Esa situación es abordada en grupos, en el aula, con libre acceso a materiales, internet, uso de recursos tecnológicos, etc. La segunda parte del bloque plantea cuestionamientos sobre lo matemático surgido en la resolución de la situación. Ofrece espacios de reflexión sobre el valor de los conocimientos, del trabajo colectivo, de la autonomía, del acceso a los recursos, etc. Todas cuestiones que potencian y dan herramientas para el estudio en la universidad y para una adecuada inserción en los requerimientos de la educación superior.

La consigna se inspira en una propuesta de Álvarez et al. (2021) que hemos adaptado para abordarla con conocimientos básicos del nivel medio.

La consigna, en su formulación más abierta, puede plantearse del siguiente modo:

Decidir si es posible instalar un portón levadizo no desbordante en un garaje que tiene 10 metros de largo y 2,5 metros de alto, siempre y cuando sea factible que entren dos autos, uno detrás del otro. Explicar

El fenómeno de interés es, aquí, el uso del portón no desbordante y la problemática a resolver es decidir si ese tipo de portón puede colocarse en un garaje de ciertas dimensiones. La búsqueda de información en internet será clave para conocer cómo funcionan esos portones. Tendrán que decidir de qué largo y alto son los autos y la separación entre ellos (selección y control de variables). Con esto hecho, el planteo inicial puede redefinirse como lo expresa la Figura 1.

Consigna

Se quiere instalar un portón levadizo no desbordante en un garaje que tiene 10 metros de largo, y 2,5 metros de alto, siempre y cuando sea factible que entren dos autos. Los autos miden 4,4 metros de largo y 1,5 metros de alto. La separación desde la pared hasta el primer auto que entra se estima en 0,40 metros, lo mismo que entre ambos autos. Decidir si esto es factible. Explicar.



Figura 1

En el artículo de Álvarez et al. (2021) se muestra un estudio matemático que involucra geometría, cálculo diferencial, topología y optimización. Aquí, en el TIO-Exactas, contando con elementos de álgebra básica, podrán explorar la situación y reconocer que tendrán que establecer el espacio que tendría que quedar entre el portón y el último auto que se entra al garaje (Figura 2).

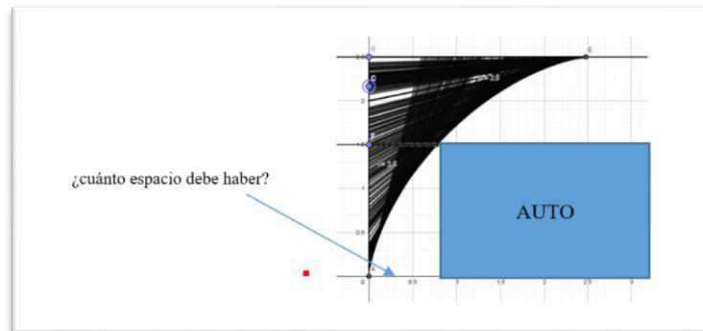


Figura 2

Los estudiantes tendrían que darse cuenta qué datos necesitarían para poder calcular esa medida. Sería deseable que advirtan que si tuvieran una fórmula o ecuación que represente la curva que describe el portón, podrían encontrar la medida buscada. Podrían proponer una circunferencia de centro en (2,5;0) y radio 2,5, que no lo es (Figura 3), aunque podría utilizarse admitiendo un error. GeoGebra permite trazar una circunferencia por 3 puntos y proporciona la ecuación de otra circunferencia que parece aproximarse más. Los estudiantes no saben si es una circunferencia la curva, o no, pero esto no es lo relevante en esta actividad.

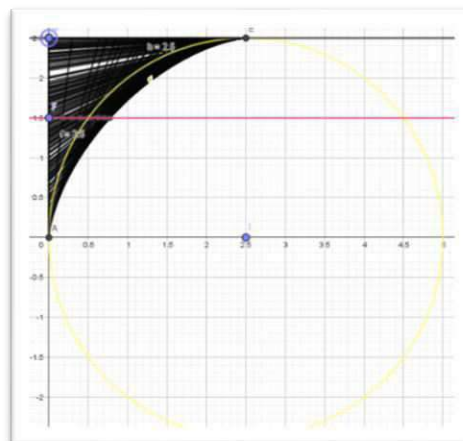


Figura 3

GGB muestra esta ecuación: $(x - 3,36)^2 + (y + 0,84)^2 = 12,01$. A partir de allí, queda plantear $y = 1,5$ y despejar x . Estas cuentas dan $x = 0,806$ y $x = 5,914$ (se descarta) por lo que se requiere un poco más de 80 cm libres. Resta ver si los 10 metros de garaje permiten esta situación y resulta que no, que no sería posible. De este modo, los estudiantes pueden describir cuantitativamente el fenómeno, usar el modelo para responder la problemática y analizar la validación en términos de factibilidad de la respuesta dada.

A modo de cierre

Sin pretender exclusividad en términos de líneas de Educación Matemática, la modelización matemática permite diseñar cursos y planificar clases de Matemática para el inicio de los estudios superiores en las que los estudiantes se enfrentan a un tipo de trabajo valioso, no rutinario, que prioriza el sentido por sobre la mecanización y promueve su autonomía. El uso de recursos tecnológicos, la búsqueda de información, la duda, el error, pasan a ser parte natural de aprender matemática. Decidir a qué apelar, hacerlo, descartar y volver a intentar, es lo esperable en este tipo de clases. No saber cómo encarar una situación deja de ser mal visto y castigado por el docente. El estudiante no queda paralizado, por el contrario, asume el trabajo, e intenta soslayar los obstáculos, actitud que lo fortalece para su inserción en la universidad. El rol docente, por su parte, es de naturaleza diferente al del modelo tradicional de enseñanza. Las tendencias en educación y aprendizaje de la Matemática corren al docente del lugar central de poseedor y transmisor del saber, al de un facilitador que propone espacios para el aprendizaje, a la vez que promueve la integración de conocimientos.

Referencias Bibliográficas

- Gluz, N. (Ed.) (2011). *Admisión a la universidad y selectividad social. Cuando la democratización es más que un problema de "ingresos"*. Ediciones UNGS. <https://ediciones.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2020/08/9789876300988-completo.pdf>
- Amago, L. (2007). *Desgranamiento en el primer año de la universidad. Cohorte 2005. Informe de resultados*. Los Polvorines: Universidad Nacional de General Sarmiento.
- Álvarez, M., Buffo, F., & Carrizo, G. (2021). Descripción matemática del recorrido de un portón levadizo no desbordante. *Revista de Educación Matemática*, 36(3), 39 – 52. <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/36056/36193>
- Blomhøj, M. (2004). Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica. Traducción autorizada por el autor del artículo: BLOMHØJ, M. (2004) Mathematical modelling - A theory for practice. En Clarke, B., Clarke, D. Emanuelsson, G., Johnansson, B., Lambdin, D., Lester, F. Walby, A. & Walby, K. (Eds.) *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*. National Center for Mathematics Education. Suecia, p. 145-159. Traducción: María Mina. Disponible en <https://www.famaf.unc.edu.ar/~revm/Volumen23/digital23-2/Modelizacion1.pdf>
- Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education – Discussion Document. *Educational Studies in Mathematics*, 51(1/2), 149-171. <https://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm025i1.pdf>.
- Niss, M. (2010). Modeling a Crucial Aspect of Students' Mathematical Modeling. In: Lesh R., Galbraith P., Haines C., Hurford A. (eds) *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies*. Springer.
- Pochulu, M. (Comp.). (2018). *La Modelización Matemática: Marco de referencia y aplicaciones*. Villa María, Argentina: GIDED - UNVM. Disponible en <http://gided.unvm.edu.ar/index.php/book/la-modelizacion-en-matematica-marco-de-referencia-y-aplicaciones/>
- Pochulu, M. y Rodríguez, M. (comp.) (2012). *Educación matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Vol. 1. UNGS-EDUVIM. <https://ediciones.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2022/08/9789876301169-completo.pdf>
- Rodríguez, M., Pochulu, M., & Espinoza, F. (comp.) (2022). *Educación matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Volumen II. UNGS. https://ediciones.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2022/08/9789876306133_completo1.pdf
- Rodríguez, M., Pochulu, M. y Espinoza, F. (comp.) (2022). *Educación matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Vol. 2. UNGS-EDUVIM. https://ediciones.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2022/08/9789876306133_completo1.pdf
- Villarreal, M., Esteley, C. & Mina, M. (2010). Modeling empowered by information and communication technologies. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 42, n. 3-4, 405-419. https://www.researchgate.net/profile/Cristina-Esteley/publication/225321238_Modeling_empowered_by_information_and_communication_technologies/links/572376be08ae586b21d887c2/Modeling-empowered-by-information-and-communication-technologies.pdf

**Competencias digitales y modelación matemática
en la formación de profesores**

Marcel David POCHULU

**Universidad Nacional de Villa María y Universidad Tecnológica Nacional-FRVM,
Argentina**

mpochulu@unvm.edu.ar

Resumen

Presentamos y reflexionamos sobre algunos resultados de investigaciones centrados en el desarrollo de competencias digitales y la modelización en la formación de profesores de Matemática. En particular, cuestionamos el modo de formar profesores de cara a los enfoques que se piden para la formación de profesionales de otras disciplinas y el desarrollo de competencias digitales específicas. Los puntos de partida que esbozamos podrían servir para pensar en un enfoque diferente en la formación de profesores, donde se trabajen problemas reales del campo profesional en el que se inserta la Matemática, donde la modelación cobra importancia y, al mismo tiempo, se incorporen de manera significativa las TIC. Para ello, es necesario que iniciemos un proceso de cuestionamiento sobre el saber matemático y el saber matemático escolar, que se sintetiza al preguntarnos, ¿por qué debería enseñar este contenido?, ¿existen otras maneras de enseñarlo en este contexto y para esta carrera en particular? ¿qué problemas son más apropiados? ¿qué criterios deberíamos seguir para la incorporación de las TIC en las actividades de modelización? y evitar la reproducción de modelos que seguramente estuvieron presentes en nuestra formación previa.

Palabras clave: Modelación matemática; Formación de Profesores; Enseñanza de la Matemática; Interdisciplinariedad.

La reina se va y deja su lugar a una de sus hijas-princesas que deberán luchar por el trono. Cuando vemos un enjambre volando o posado en alguna parte, se trata de una migración de abejas junto a su reina, que se han marchado a fundar una nueva colmena.

Consideremos el último párrafo de esta explicación: ***Cuando vemos un enjambre volando o posado en alguna parte, se trata de una migración de abejas junto a su reina, que se han marchado a fundar una nueva colmena.*** El problema surge precisamente aquí: ¿Cuál es la dinámica poblacional de este nuevo enjambre que se forma con la antigua reina? Esto es, ¿cuántos individuos logrará tener la colmena a medida que transcurren los días? ¿qué cantidad máxima es esperable?

En síntesis, hay que buscar un modelo matemático que permita describir la dinámica poblacional de estas abejas que se marchan con una reina antigua que fue desplazada por una nueva. Lo que verdaderamente importa en esta actividad son los procesos matemáticos que se llevan a cabo y las argumentaciones que se realicen para sostener los mismos. “*La respuesta correcta*” o “*el modelo adecuado*” no es lo relevante para esta actividad, sino el camino transitado, los procesos que se activan y cómo se logra pasar de casos particulares a uno general. Recordemos que cuando enseñamos, casualmente nos interesa que los alumnos puedan darse cuenta, a través de ejemplos particulares al principio, cuál es la expresión general que está de fondo.

La modelación matemática en la formación de profesores

Partimos de la premisa de que muchos de los problemas actuales requieren ser abordados en una clase involucrando contenidos que suelen escapar a los que habitualmente trabajamos en la clase de Matemática (Pochulu, 2018, Rodríguez y Barreiro, 2018). Sabemos que estas situaciones ponen a los profesores en la posición incómoda e inusual de no saber contenidos de otras disciplinas, o incluso de la propia Matemática cuando se requiere que sea aplicada. Al mismo tiempo, hay que pensar que nos encontramos en una comunidad donde el profesor es un coordinador de los procesos de enseñanza y aprendizaje, y no quien tiene todas las respuestas. Asimismo, es necesario desterrar la idea de que el estudiante tiene que contar con todos los conocimientos matemáticos para abordar un problema, o que usará solamente métodos y algoritmos tradicionales enseñados en la escuela. Tampoco podemos ignorar la presencia de la tecnología que media la resolución de cualquier tipo de problema, y más aún, si pretendemos un enfoque unificado de la enseñanza de la Matemática.

No obstante, la interdisciplinariedad no debe visualizarse como el proceso de utilizar a una disciplina como herramienta de la otra. Si bien es cierto que la Matemática tiene el papel de herramienta en muchas otras ciencias para la resolución de problemas, no puede ser concebido este proceso como interdisciplinariedad. Chavarría e Hidalgo (2009) sostienen que ignorar o despreciar las interrelaciones entre las ciencias, incluida actualmente la tecnología, alimenta una polémica estéril que se transfiere de forma inevitable al ámbito escolar. A su vez, es necesario que el cuerpo de profesores sea reflexivo ante las necesidades que tienen las disciplinas y las herramientas que brinda la Matemática. Por ejemplo, si analizamos lo que acontece con problemas del mundo real pertenecientes a otras ciencias, advertimos que en general, parten de datos experimentales. Con ellos se buscan modelos matemáticos para describir las relaciones entre las variables y así poder pronosticar, predecir, estimar o anticipar comportamientos en el corto y mediano plazo. Eventualmente se presentan gráficas que muestran la relación entre las variables y en este caso, los nuevos recursos suelen ser un buen aliado. Estas temáticas, sin dudas, se encuentran insertas en la Matemática, pero ¿se abordan en una clase habitual dentro de una carrera no matemática o de formación general? ¿Qué está en el detrás de escena cuando diseñamos problemas para una clase?

Reflexionemos sobre lo que ocurre en una clase de Matemática de la actualidad. Imaginemos que nos situamos en un primer curso de Matemática donde se pretende considerar a las funciones como objeto matemático. Habitualmente el profesor suele partir de un modelo funcional previamente establecido y se preocupa por hacer y mostrar un análisis minucioso del comportamiento de la función, prescindiendo incluso de nuevas tecnologías (nuestro clásico análisis completo de una función). El estudio conlleva a determinar en forma algebraica, y con tediosos cálculos, máximos y mínimos locales, raíces, asíntotas, concavidad y convexidad de la curva, paridad, entre muchos otros objetos matemáticos. Posteriormente, procede a realizar un gráfico aproximado de la función y a mano alzada, con lápiz y papel. ¿Esto era lo que requería el campo profesional? Definitivamente no, pues no era la preocupación central de una disciplina no matemática hacer un gráfico de una función, la cual no se tiene en la mayoría de los casos o, si se tiene, se realiza fácilmente con un software. En consecuencia, existe un divorcio entre lo que requieren las diferentes ciencias y lo que está aportando actualmente la Matemática. Pero, ¿cómo iniciamos un diseño de un problema genuino para la clase de Matemática y en una carrera no matemática?

Es necesario pensar en un enfoque diferente donde se trabajen problemas reales del campo profesional en el que se inserta la Matemática, donde la modelización adquiere un rol protagónico. ¿Significa que no tenemos que pasar por la disciplina o debemos prescindir de contenidos centrales de la Matemática? No, pues podemos trabajar lo disciplinar desde la misma interdisciplinariedad, pero sí tenemos que revisar lo que estamos enseñando y la metodología empleada. Hace más de 30 años Santaló (1990) expresaba que teníamos que incorporar temas que se requieren desde las demás disciplinas, suprimiendo otros que quedaron obsoletos, pues de lo contrario, se lograría que los estudiantes se sientan poco atraído por las actividades del aula. Sin embargo, esto que planteaba Santaló sigue teniendo vigencia hoy en día y termina siendo una dificultad a sobrellevar en la formación matemática de muchas carreras universitarias no matemáticas.

Naturalmente que el foco de cada propuesta de enseñanza estará puesto en que los estudiantes aprendan algo matemático, pero los tiene que ayudar a tener pensamientos interdisciplinarios al resolver problemas complejos de la realidad. En consecuencia, cuando nos proponemos enseñar ciertos contenidos matemáticos, tendríamos que tener respuestas genuinas a los siguientes cuestionamientos:

¿Por qué son necesarios y se deben enseñar? ¿Qué tipo de problemas resuelven? ¿Con cuáles otros conceptos, operaciones, propiedades, definiciones, se lo asocian? ¿Qué tipo de argumentaciones se utilizan a propósito de los mismos? ¿Qué lenguaje representa y operativiza sus principales funciones y usos? ¿Qué contextos dejan al descubierto el o los significados que se pretenden generar? ¿Qué contextos ayudan a comprender diferencias y similitudes entre los objetos y otros vinculados a ellos? ¿Cuáles situaciones provocan cambios y evolución de significados de los objetos? ¿En qué contexto histórico y cultural aparecen los conocimientos matemáticos en cuestión? ¿Cómo contribuyen a la construcción y organización del saber matemático? (INFD, 2010, p. 122).

De alguna manera, responder estas preguntas nos ayudará a iniciar un proceso de cuestionamiento sobre el saber matemático y el saber matemático escolar, que se sintetiza al preguntarnos, ¿por qué debería enseñar este contenido?, ¿existen otras maneras de enseñarlo en este contexto y para esta carrera? y evitar que reproduzcamos modelos que seguramente estuvieron presentes en nuestra formación previa. La búsqueda de respuestas a estas preguntas nos llevará a descubrir vínculos que unen los fenómenos aparentemente inconexos entre distintas ciencias o disciplinas.

Pensamos que a través de la modelación se logran crear ambientes reales y actuales de estudio, con situaciones que pueden ser significativas para el alumno. Esto llevaría, si media un buen diseño, a que cada consigna de trabajo propuesta escape de los estándares que estamos acostumbrados para los problemas de Matemática, lo cual se materializa cuando no incluimos demasiados datos, ni los pasos a seguir o la manera en que debería hacerse la actividad. Entendemos que estas características hacen que una consigna se enmarque en lo que llamaríamos problemas no rutinarios, en tanto la información que se suministra o bien es insuficiente o hay datos que sobran, no existe un único camino para abordarlos, se ponen en juego distintas estrategias de resolución, pueden existir varias soluciones o bien no tener solución alguna. A su vez, deberían estar diseñados para conjeturar y plantear hipótesis en un ambiente donde los nuevos recursos o TIC tienen un rol protagónico y el estudiante es el que encara la resolución.

En cuanto a las TIC, las asumimos como un recurso más de la clase y no el foco de la actividad matemática. No se trata de destinar una clase entera para trabajar con comandos específicos de un software, sino más bien, integrar las TIC para permitir la creación de una nueva Matemática y el surgimiento de una nueva cultura de aprendizaje. Esto conduciría, además, a cambiar el modo de pensar y actuar en la gestión de la clase, y mucho más importante aún, a conseguir que los estudiantes hagan cosas nuevas en Matemática, logrando tener una educación diferente o mejor gracias a la tecnología.

Sabemos que una preocupación frecuente de los profesores es la “contextualización de la situación problema”, donde se introducen los principales tópicos no matemáticos que la enmarcan. Entendemos que un estudiante debería acceder a estos contenidos buscando información al respecto, lo que implica hacer una selección de las variables adecuadas, la relevancia de las mismas, la exactitud de los datos y la confiabilidad de las fuentes. Si todos los datos son suministrados con el problema, se coarta la formación de estudiantes con pensamiento crítico para la búsqueda de información. Tampoco es lógico pensar que el trabajo de búsqueda de información sea tarea exclusiva del alumno. Lograr que los estudiantes encuentren información adecuada en la maraña de la web no es un trabajo menor para los profesores, pues Internet no puede ser considerado solo como un sitio de consulta.

Teniendo el diseño de un buen problema para la clase de Matemática, sabemos que no es suficiente para que logre desafiar cognitivamente a los estudiantes. Es necesario que se modifique sustancialmente el rol del profesor en la gestión de la clase, lo cual tiene una alta complejidad para que se produzca el cambio, pues implica enseñar de una manera diferente a la que se fue formado. Particularmente, este modo de gestionar la clase tiene por propósito alentar los procesos de argumentación y que los estudiantes puedan conjeturar, demostrar y validar. A su vez, se busca que sea el estudiante quien llegue al conocimiento a través de sus propias conclusiones y no por medio de un conocimiento aprendido, buscando trascender las clases tradicionales de Matemática donde el protagonismo lo tiene el profesor a través de clases magistrales.

A modo de cierre

La interpretación implícita, y a veces no tanto, que han marcado los diferentes lineamientos curriculares de “enseñar a los alumnos a resolver problemas” y a “enseñar con TIC Matemática”, ha llevado a que los investigadores busquen proporcionar instrumentos a los profesores y estudiantes para que sean mejores en la resolución de los mismos. Así, han proliferado un sinnúmero de propuestas de estrategias para resolver problemas, lineamientos para procesos heurísticos, modelos de resolución, etc. y con una clara intención de trabajar con problemas que están más próximos a la vida cotidiana. Los acercamientos a contextos familiares para el estudiante y la aceptación de sus saberes como válidos en el ámbito escolar, han posibilitado, inclusive, que se encuentre otra “cultura del conocimiento” en la escuela.

De las investigaciones realizadas en torno a la resolución de problemas, podemos rescatar que la inclusión de enunciados con problemáticas cotidianas no garantiza la motivación de los alumnos por resolverlos. Sucede, además, que los problemas de la realidad son, muchas veces demasiado complejos para ser abordados como tales en la enseñanza, sumado a que están condicionados por lo ocasional, por lo cual no siempre resulta fácil para el docente lograr una coherencia en los conocimientos que intenta desarrollar. De todos modos, esto no invalida que planteen buenos problemas que se asemejen a los que aparecen en el mundo real, o los que emulen a lo que se les presenta a un matemático cuando está “haciendo Matemática”.

Sabemos que los problemas del mundo real no son precisamente ejercicios prefabricados con procedimientos y números de fácil resolución como nos acostumbró la escuela durante años. No obstante, los problemas que permiten a los estudiantes experimentar situaciones con números no tan amigos, donde a veces sobra o falta información, o que tienen múltiples soluciones, casualmente suelen ser los que mejor preparan para resolver problemas que probablemente lleguen a encontrarse en la vida diaria.

Si a estos problemas le añadimos la posibilidad de trabajarlos con las TIC, estaremos facilitando la creación de situaciones problemáticas reales y actualizadas, las cuales concretan la aplicación de la Matemática en sus diferentes esferas, contribuyendo al fortalecimiento de valores y el desarrollo multilateral del estudiante. La posibilidad de trasladar un conjunto de conocimientos – junto a otros nuevos que seguramente surgen en el camino – a una computadora, logra dar nueva forma a nuestras ideas debido a la capacidad de cálculo y las posibilidades de tratamiento de la información que tienen los nuevos recursos.

Sostenemos que la creación y búsqueda de problemas que valgan la pena explorar con TIC sigue siendo un reto para el docente. Una vez planteado el problema, se tienen que especificar métodos bien definidos y efectivos de formularlo de manera abierta. Por lo tanto, el reto para quien diseña un problema consiste en comunicarlo brindando la guía suficiente para que la tarea sea clara, sin suministrar tanta información como para que todo el trabajo converja en un sólo punto. También somos conscientes de que el uso de las TIC no proporcionará una solución a todos los problemas educativos que se nos presentan en las aulas. De hecho, en algunas ocasiones no existe garantía de que proporcione soluciones a algún problema en particular y, en otras, podrá generar más problemas aún. Mucho depende del profesor el éxito o fracaso de su uso. En otras palabras, sería ingenuo pensar que el uso de la informática y la tecnología en educación, por sí mismo, representa una mejora en el aprendizaje de la Matemática. Es el profesor, con su labor, quien tendrá la responsabilidad de plantear las actividades en función del curso que está impartiendo a fin de utilizar racionalmente esta herramienta, y este será el desafío que tendrás que afrontar cuando lleves las TIC al aula.

Referencias Bibliográficas

- Alsina, C. (2008). Geometría y realidad. *Sigma* 33, 165-179.
- Chavarría, J. e Hidalgo, R. (2009). La historia e interdisciplinariedad en la Educación Matemática: Una experiencia con profesores de secundaria. *Cuaderno de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 4(5), 139-154.
- INFD (2010). *Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario. Área: Matemática*. Buenos Aires: Ministerio de Educación, Instituto Nacional de Formación Docente y Secretaría de Políticas Universitarias.
- Niss, M. (2003). *Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: The Danish KOM Project*. Recuperado el 17 de febrero de 2012 de http://w3.msi.vxu.se/users/hso/aaa_niss.pdf
- Pochulu, M. (2018). *La modelización en Matemática : marco de referencia y aplicaciones*. Universidad Nacional de Villa María - GIDED.
- Rodríguez, M. y Barreiro, P. (2018). Modelización y resolución de problemas. En M. Pochulu (Coord.), *La Modelización Matemática: Marco de referencia y aplicaciones (pp. 17-26)*. Villa María, Argentina: GIDED - UNVM.
- Santaló, L. (1990). *Matemática para no matemáticos*. Conferencia inaugural del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Sevilla, España.

**Matemática para la toma de decisiones en contextos reales.
El caso del sistema de bombeo para una pobladora rural en la Patagonia Argentina**

Pablo CARRANZA
Universidad Nacional de Río Negro, Argentina
pcarranza@unrn.edu.ar

Resumen

En esta comunicación compartiremos una actividad donde nos interesamos a propuestas de enseñanza aprendizaje que buscan recuperar el sentido del aprendizaje en los estudiantes. Para ello, consideramos problemas de la vida real del contexto de los alumnos y desarrollamos posibles soluciones. Matemática y otras disciplinas aparecen como herramientas conceptuales para tomar decisiones racionales en el desarrollo de la solución. El caso aquí tratado es el del un soporte móvil para un panel solar realizado por alumnos de primer año de una escuela de la Patagonia Argentina.

Palabras clave: Modelación – GeoGebra - Toma de Decisiones - Contextos Reales.

Introducción

Nos interesamos aquí a la cuestión de proponer situaciones donde los aprendizajes tengan sentido para los estudiantes (Carranza, 2021; Rosa, Cordero, Orey, & Carranza, 2022). En ese caso se trata de alumnos de primer año de una escuela secundaria de una localidad pequeña en la Patagonia Argentina; con alumnos que, para el sistema escolar, estaban catalogados como “con serios problemas de aprendizaje”, lo que redundaba en altos índices de repitencia, e incluso de abandono. Ante ese cuadro, resultaba indispensable reflexionar a lo que consideramos una cuestión fundamental: cómo hacer para que los alumnos le encuentren sentido al aprendizaje?

Para ello, nos remitimos a un conjunto de hipótesis que denominamos dimensiones y que tienden a caracterizar situaciones que facilitan la apropiación de sentido al aprendizaje (Carranza, Cordero, Rosa, & Orey, 2022). Ello nos condujo a proponerles a los alumnos construir una solución a un problema real de su comunidad (Bednarz, 2018; Brown, 2019). En este caso se trata del acceso al agua, problema que tiene buena parte de los pobladores originarios de la zona (sus padres y abuelos): la extracción de agua de napas subterráneas para la bebida de animales y riego de plantas.

El proyecto propuesto

La solución propuesta al problema del acceso al agua consistió en el cálculo, construcción e instalación de un soporte móvil para un panel fotovoltaico destinado a proveer electricidad a una pequeña bomba de agua a colocar en un jagüel. El agua extraída serviría para bebida de la pequeña majada de ovejas y para riego de las plantas del puesto rural.

Detrás de la propuesta, se encontraba el objetivo didáctico de abordar conceptos disciplinares (matemática y otras disciplinas). Conceptos que aparecerían como herramientas racionales que permitirían construir argumentos para tomar decisiones racionalmente en el marco del proyecto.

La intención de dotar de movilidad al soporte del panel buscaba optimizar el aprovechamiento de la radiación solar disponible en la zona con la intención que el panel fotovoltaico permanezca relativamente perpendicular a los rayos del sol a lo largo del año. Esto resulta relevante pues en la latitud de la región en cuestión, la variación del ángulo de los rayos solares respecto del suelo es importante.

Del desarrollo de ese proyecto con los alumnos realizado durante el segundo semestre del año 2019, retendremos primeramente la dinámica del proyecto para luego resumir la modelación realizada donde se construyeron los argumentos para las principales acciones a realizar.

La Figura 1 representa la dinámica del proyecto, donde se observan dos direcciones de desarrollo: por un lado la dirección de la lógica del proyecto, por el otro lado, la de las disciplinas convocadas, en particular lo referido a los conceptos emergidos en las sucesivas etapas.

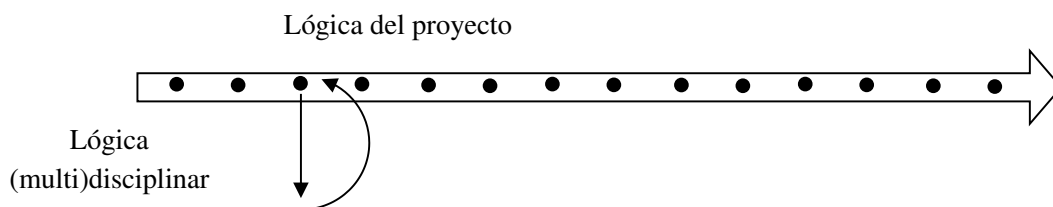


Figura 1. Lógica del proyecto y lógicas disciplinares

La flecha horizontal representa la dinámica del proyecto, donde cada círculo negro significa un problema o cuestión a resolver en el proyecto. Para abordar cada uno de esos problemas o cuestiones, se convocan conceptos disciplinares. Los conceptos disciplinares entonces, aparecen como herramientas racionales para la construcción de argumentos con su propia epistemología (Hacking, 2002).

La Figura 2 muestra el diseño del soporte desarrollado y dos de sus posibles posiciones (invierno y verano).

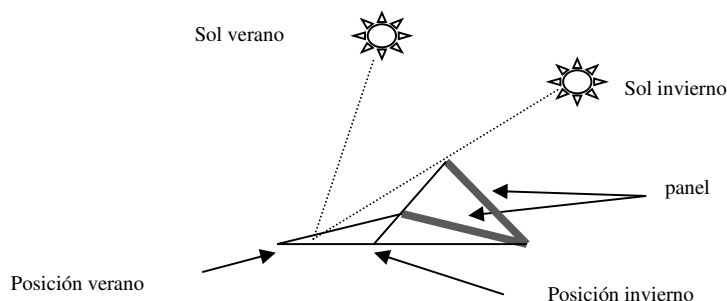


Figura 2. Esquema de posiciones de panel solar en función del ángulo de rayos solares.

Sintetizaremos ahora una de las últimas etapas del proyecto, la de determinación de las medidas del soporte y de las distancias a las que debían realizarse los orificios para cada posición del panel.

Medidas y distancias de soporte móvil

Objetivo: Especificar medidas, distancias de orificios y tipo de material a utilizar

Lugar: Patio de la escuela, biblioteca y sala de computación.

Material utilizado: Panel fotovoltaico, papel y lápiz, listones de madera, cinta métrica, escuadra y calculadora.

Actividades: Las actividades se desarrollaron en dos principales momentos. El primero donde se intentó una representación del soporte a escala, el segundo donde se modeló dinámicamente en GeoGebra el soporte.

En esta etapa, los docentes aportamos información disponible en la web referida al ángulo de los rayos solares para la latitud de la localidad. Se retuvo la medida del ángulo de los rayos solares respecto del piso para las 14 hs (máxima radiación solar) para un día representativo de cada estación del año. Es decir, se consideraron cuatro valores posibles de ángulos, uno para el verano (21 de diciembre), uno para la primavera (21 de septiembre), otro para el otoño (21 de marzo) y uno último para el invierno (21 de Junio).

Primera etapa: Representación a escala tipo maqueta

Para precisar las medidas y la ubicación de los orificios que determinarían las diferentes posiciones del panel, los alumnos propusieron realizar maquetas a escala. De manera resumida diremos que la estrategia no permitió llegar a precisar medidas y distancias a escala. Con las herramientas a disposición en el taller, los alumnos (ni los docentes tampoco) no lograron controlar con precisión todas las articulaciones de la maqueta.

Segunda etapa: Representación en GeoGebra

Si bien la estrategia de la maqueta no permitió llegar a determinar medidas, ella contribuyó a que los alumnos se representaran las partes del soporte y los respectivos movimientos. La manipulación de ese material concreto, aunque imprecisa y desordenada facilitó entonces la representación mental de partes y de articulaciones.

Apoyándose en las representaciones mentales y las maquetas desarmadas, los docentes fuimos guiando la modelación en GeoGebra, para establecer relaciones entre los elementos de la maqueta, sus movimientos y la representación en GeoGebra. Cabe acotar que los alumnos desconocían el software y que incluso fue necesario instalarlos en los ordenadores de la escuela. El aprendizaje entonces incluía también la interface GeoGebra.

La modelación se construyó de tal manera que se producía una suerte de analogía entre la maqueta y la representación en GeoGebra. En otras palabras, las partes del soporte, sus articulaciones y proporciones estuvieron representados en GeoGebra de la misma manera que lo estarían luego en el soporte a construir. La Figura 3 muestra la Vista Gráfica en GeoGebra de la modelación realizada para las posiciones de verano e invierno.

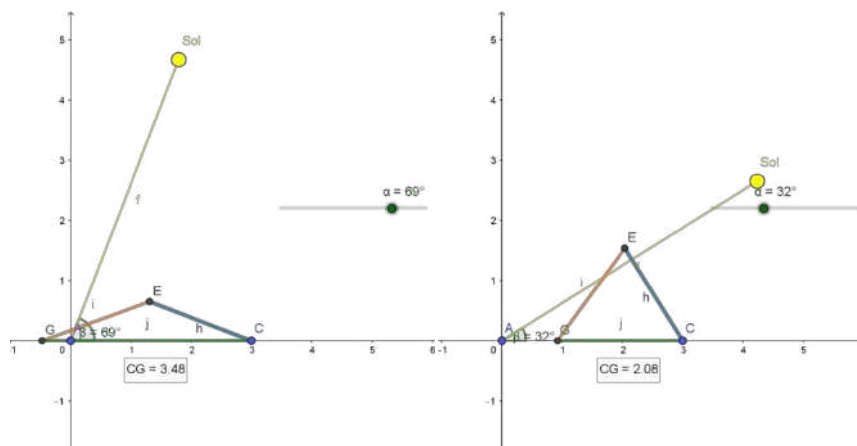


Figura 3. Modelo realizado en GeoGebra y dos posibles posiciones para el panel solar

La imagen de abajo retrata el momento del montaje del soporte móvil del panel solar



Imagen 1. Alumnos construyendo el soporte móvil para el panel solar

Resultados

Este proyecto fue llevado a cabo con alumnos catalogados como “con significativas dificultades en matemática” de una escuela de la Patagonia Argentina. En lo que respecta a la modelación realizada en GeoGebra, resultó interesante constatar su potencialidad didáctica para construir los razonamientos y determinar las acciones a emprender. Destacamos entonces esa función que nos resulta fundamental: la modelación es un espacio de abstracción que, auxiliándose del andamiaje conceptual de matemática (y de

otras disciplinas), permitió comprender el sistema y elaborar conclusiones que resultarían muy difíciles de lograr por observación directa de la realidad.

La modelación entonces presenta importantes potencialidades para construir argumentos racionales que dan fundamentos a las acciones que demanda el proyecto. De alguna manera, las modelaciones devienen espacios de construcción de racionalidad al grupo de docentes y alumnos permitiendo avanzar en el proyecto sobre piso firme, el de la racionalidad.

En este sentido se han observado interesantes fenómenos en relación al contrato didáctico (Brousseau, 1988): la construcción argumentativa que se logra mediante las modelaciones permite al docente desplazarse del lugar de detentación del saber, ocupándolo ahora una racionalidad elaborada en la modelación donde los actores participan y la validez de los resultados está dada por el peso de los argumentos construidos y no por el estatus del docente que los declara.

La modelación realizada en GeoGebra ha permitido constatar interesantes fenómenos ya relevados en la literatura: Una modelación es vehículo de aprendizaje de conceptos disciplinares al mismo tiempo que se constituye también en objeto de aprendizaje (Blomhøj, 2019; Blum & Borromeo Ferri, 2009; Boaler, 2001; Brown & Ikeda, 2019; Spandaw, 2009).

Por último, entendemos que las propuestas basadas en contextos reales tienen un fuerte potencial para el aprendizaje de conceptos disciplinares. La puerta de entrada de estos últimos parece ser la posibilidad que estos brindan para la construcción de argumentos racionales.

Entendemos también que esta dinámica escapa a las singularidades de una región o país, cada comunidad tiene espacios de mejora donde los alumnos y estudiantes pueden intervenir y así sentirse ciudadanos activos en su comunidad.

Referencias Bibliográficas

- Blomhøj, M. (2019). Towards Integration of Modelling in Secondary Mathematics Teaching. In G. A. Stillman & J. P. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education*. ICME-13 Monographs: Springer.
- Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1).
- Boaler, J. (2001). Mathematical Modelling and New Theories of Learning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 20(3), 7.
- Brousseau, G. (1988). Le Contrat Didactique *Recherche en didactiques des mathématiques*, 9(3), 309-336.
- Brown, J., & Ikeda, T. (2019). Conclusions and Future Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education. In G. Stillman & J. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education* (pp. 233-253): Springer.
- Carranza, P. (2021). El abordaje de conceptos de matemática en proyectos interdisciplinarios. El caso de modelizaciones de vectores para comprender y actuar. In R. R. d. U. d. A. M. R. D. COLOMBIA (Ed.), *Educación para el desarrollo sostenible. Aportes desde la investigación educativa* (Vol. 6): Universidad Católica del Espinal/FUNDES.
- Carranza, P., Cordero, F., Rosa, M., & Orey, D. (2022). *La Modelación En La Vida De La Gente*: Gerisa.
- Hacking, I. (2002). *L'émergence de la probabilité*. Paris: Seuil.
- Rosa, M., Cordero, F., Orey, D., & Carranza, P. (2022). *Mathematical Modelling Programs in Latin America*: Springer.
- Spandaw, J. (2009). *Modelling mathematics' teachers' professional development*. Paper presented at the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Lyon, France.

“Del cielo a la tierra”: Uso de elementos de las Matemáticas en Ingeniería y su vinculación con el sistema escolar

Cesar RETAMAL BRAVO

Facultad de Ingeniería, Universidad de Talca, Chile
ceretamal@utalca.cl

Resumen

En niveles de educación superior, la comunicación entre pares favorece el intercambio de conocimientos y el desarrollo de nuevos proyectos e ideas. Sin embargo, si ese mismo nivel de comunicación y formalismo es empleado para trasladar esos conocimientos a un público no experto, no es fácil captar la curiosidad y el interés por la Matemáticas, la ciencia en general, y la ingeniería en particular.

Captar el interés de personas que se encuentran fuera del ámbito de la investigación y universitario, acercar la Matemáticas y la ciencia a los más jóvenes y conseguir así un verdadero impacto en la sociedad es un gran desafío. En este sentido, la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Talca han puesto en marcha distintos proyectos que tratan de acercar la Matemáticas y ciencia a aquellos sectores más desfavorecidos. Así, "TruckLab: Ciencia y Tecnología sobre Ruedas" busca mejorar el aprendizaje STEM en los territorios más apartados de la región del Maule, mediante un laboratorio móvil montado en un camión. Por su parte, el programa "DTC: desarrollando talentos científicos" trata de acercar la ciencia de manera lúdica y experimental a los alumnos de enseñanza media, mediante una serie de retos y competiciones entre los colegios de la región.

Palabras Clave: STEM – Ingeniería - Ciencia Lúdica - Talentos Científicos.

Introducción

La ciencia y la tecnología han jugado un papel fundamental en el mundo de la educación durante generaciones, afectando al desarrollo y a la vida de las personas. Este continuo desarrollo ha incentivado en nuestros alumnos la capacidad de generar alternativas y de proponer nuevas soluciones a los problemas que nos enfrentamos diariamente. Además de esto, es deseable que el individuo desarrolle capacidades para manejar un lenguaje abstracto, realizar representaciones conceptuales, formular preguntas, plantear nuevos problemas, y aplicar nuevos conocimientos (Augusto, 2005).

Estudios internacionales han demostrado que los países que alcanzan un mayor desarrollo, son aquellos que cuentan con una mayor proporción de profesionales en el área de la ingeniería (K. M. Murphy, Shleifer, & Vishny, 1991). Sin embargo, en países como Chile, la cantidad de estudiantes que ingresan a estudiar carreras de ciencias básicas y/o tecnología es aún muy baja (32%), sobre todo en el caso de las mujeres, que no alcanzan el 14%, según estadísticas del Ministerio de Educación en 2016.

La Facultad de Ingeniería de la Universidad de Talca no es una excepción a esta realidad del país. Como académicos de dicha institución se detectó que aunque la comunicación entre pares a nivel local, nacional e Internacional en temas asociados a ciencia y tecnología es fluida y enriquecedora, esta situación no se replica cuando se trata de transmitir los conocimientos a una población menos experta. Estas dificultades se incrementan cuando se observa el rechazo generalizado de algunos estudiantes frente a estas áreas, debido a su propia falta de conocimientos. En este contexto nace la necesidad de generar estrategias que tiendan a acercar la ciencia y la tecnología a la comunidad escolar y a la sociedad en general, de una manera lúdica y entretenida, sin perder la formalidad de lo que implica difundir estos temas de gran relevancia en la sociedad. Por otra parte, factores como la ubicación geográfica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Talca, que el Maule es una de las regiones con mayor índice de ruralidad del país y que muchos de nuestros estudiantes de ingeniería provienen de estas zonas, hacen que el fenómeno de migración de zonas agrícolas disminuya considerablemente el capital humano, obligando a pequeños y medianos agricultores a innovar para poder mantenerse en el mercado.

Unidos por esta preocupación, un grupo de académicos de esta comenza a desarrollar programas que tienen como finalidad vincularse de una forma más estable y concreta con su entorno más cercano. El objetivo común de estos académicos es el desarrollo de la región y conseguir la motivación de los más jóvenes en el aprendizaje de la ciencia y la tecnología, acercándolos en lo posible a la vida real. Para esto, es necesario contribuir al desarrollo de habilidades de investigación científica, presentando de forma práctica y lúdica tanto a profesores de ciencia y tecnología como a estudiantes, temas asociados a estas áreas del conocimiento, ya que numerosos trabajos de investigación demuestran que lo aprendido de forma lúdica a edades tempranas persiste con el paso del tiempo (Fernández-Oliveras, Molina Correa, & Oliveras, 2015; Palacios-Rojas, 2005). En base a lo anterior, durante los últimos años la Facultad de Ingeniería se ha destacado por el desarrollo de programas que traten de paliar estas carencias y debilidades observadas a nivel país. Por tanto, el objetivo de este trabajo es presentar la motivación, metodología y resultados obtenidos bajo dos proyectos de transferencia tecnológica financiados con fondos públicos: “Desarrollando Talentos Científicos (DTC)” y “Trucklab Ciencia y Tecnología sobre Ruedas”. Así, en el desarrollo de los proyectos expuestos en este trabajo resulta fundamental plantear enfoques que faciliten la enseñanza y aprendizaje de las ciencias, y que además sean “globalizadores”, de modo que puedan atender la gran heterogeneidad del alumnado. En este sentido, metodologías como el aprendizaje por indagación (Marzo Mas & Monferrer Pons, 2015), que favorecen tanto el trabajo autónomo como el cooperativo, y que integran referencias a la vida cotidiana y a los intereses y motivaciones del alumnado resultan vitales en la consecución de los objetivos.

Desarrollo

En Chile, hasta la fecha el único método para transmitir conocimientos a los jóvenes en temas de ciencia y tecnología era el basado en un aprendizaje teórico de memorización de conceptos abstractos e incuestionables, donde el aprendizaje práctico se realizaba mediante ejercicios con lápiz y papel (Augusto, 2005). Está demostrado que este tipo de aprendizaje no tiene un elevado impacto en los individuos debido principalmente a dos factores:

El primero está relacionado con la creciente falta de interés que presentan los estudiantes a medida que avanza su desarrollo biológico (cambios hormonales propios de la adolescencia). En este sentido, estudios realizados a nivel internacional dan cuenta de los cambios en las metas de los estudiantes a lo largo de su escolaridad. Así, a medida que pasan los años los estudiantes muestran mayor interés en metas de desempeño dirigidas a la obtención de beneficios como una calificación aprobatoria y una menor preocupación por las metas dirigidas al aprendizaje (Anderman & Maehr, 1994; Anderman & Midgley, 1997; Roeser & Eccles, 1998).

El segundo factor se relaciona con las estrategias metodológicas que han sido utilizadas para fomentar el interés del estudiante (Fensham, 2004; C. Murphy & Beggs, 2003). En este sentido, la literatura sugiere alternativas que fomenten la curiosidad de los estudiantes, como por ejemplo relacionar los contenidos teóricos con acciones cotidianas, independientemente de la tarea social que desarrollen en el futuro, en otras palabras, hay que educar a partir de la experiencia (Vázquez & Manassero, 2008).

Por otro lado, el Ministerio de Educación de Chile ha marcado líneas-base a seguir en el área de ciencias tecnológicas, a través de planes y programas estratégicos, entrega de insumos y recursos para la implementación de laboratorios en centros educacionales. Sin embargo, falta el desafío y la motivación a los estudiantes para que quieran involucrarse en el proceso de adquirir competencias en estas áreas. En base a este desafío nació el proyecto “Descubriendo Talentos Científicos (DTC)”, con la idea de incentivar la práctica de la ciencia, acercándola a la vida de los estudiantes de educación media, fortaleciendo sus conocimientos, facilitando el aprendizaje de nuevos conceptos y desarrollando habilidades complementarias a la vida académica, intentando motivar la vocación científica de los mismos.

Para desarrollar esta idea en cada disciplina es necesario que los estudiantes aprendan de manera autónoma. Una de las estrategias utilizadas para incentivar este aprendizaje autónomo es el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), donde se busca incentivar el desarrollo integral del estudiante. El ABP trata, por un lado, de generar el interés por el aprendizaje, adquiriendo y generando una autonomía del conocimiento (Barrows, 1986), y por otro lado, trata de estimular las relaciones interpersonales y la conciencia ciudadana.

Dentro de las distintas formas de implementar una metodología ABP, la más popular tiene tres etapas: 1) Diseño de los problemas de aprendizaje, las reglas y los tiempos de trabajo por parte del docente; 2) Presentación del problema y orientación de los objetivos de aprendizaje mientras los estudiantes se familiarizan con él, buscando información y 3) Obtención de la información y los resultados, presentándolos y retroalimentándolos. Las variantes conocidas dentro de esta metodología tienen relación con el grado de estructuración del problema y el grado de dirección del profesor. Así, (Barrows, 1986) considera que hay dos variables principales dentro del desarrollo de la estrategia de aprendizaje: el grado de estructuración del problema y el grado de dirección del docente.

En este contexto, el trabajo del docente es facilitar el aprendizaje mediante la creación de problemáticas significativas y relevantes para el contexto en el que está inserto, dirigiendo la discusión resultante y apoyando la exploración y el monitoreo del desarrollo del aprendizaje, en resumen, se le enseña a pensar. Mientras tanto, el rol del estudiante es ser un participante activo dentro de su proceso de aprendizaje, generar nuevos conocimientos en base a una búsqueda autónoma y entrenar sus debilidades mediante el trabajo con pares en la búsqueda de la resolución de las problemáticas planteadas. En cuanto a la evaluación del ABP, esta se realiza durante todo el proceso que dura la resolución del problema, mediante exámenes escritos y prácticos, mapas conceptuales, presentaciones orales evaluadas por pares y docentes, etc.; obteniendo una imagen general del aprendizaje y desarrollando habilidades transversales.

Tomando como base lo anterior, el proyecto “DTC Desarrollando Talentos Científicos” es uno de los primeros programas nacidos en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Talca en 2009, cuya finalidad es acercar la ciencia y la tecnología a los estudiantes del sistema escolar, a través de competencias y desarrollo de desafíos científico-tecnológicos. En el proyecto DTC, el ABP se aplica desarrollando un proyecto de cierta envergadura por parte de los estudiantes, donde buscan soluciones a problemas reales a través del planteamiento de nuevas preguntas, debatiendo ideas, recolectando y analizando datos, reflexionando sobre su proceso de aprendizaje, trazando conclusiones, comunicando sus ideas, creando productos y compartiendo sus aprendizajes con una audiencia real (Larmer & Mergendoller, 2010).

En la primera versión de este concurso, participaron 205 estudiantes de educación media de la ciudad de Curicó, provenientes de 22 establecimientos (municipales, subvencionados y particulares). A todos estos centros se les especificó que el propósito del proyecto era incentivar el conocimiento y la práctica de la ciencia, afrontando y resolviendo desafíos mediante las habilidades científicas que estaban adquiriendo en su establecimiento. Cabe destacar que el concurso siempre se planteó de modo grupal, de modo que se propiciara el aprendizaje del trabajo en equipo. Debido al éxito alcanzado estos años, la iniciativa se ha realizado anualmente desde entonces, incrementando año tras año la participación. Así, durante 2014, en su sexta

versión, se superaron por primera vez los 500 estudiantes (514), provenientes de 60 establecimientos educacionales situados en 19 comunas distintas de la Región del Maule. Durante el pasado 2017, la cifra ya superó los 1000 estudiantes.

En cuanto a las entidades ejecutoras, en la primera versión del año 2009 fue la propia Universidad de Talca, a través de su Facultad de Ingeniería, la que financió este programa. Posteriormente, en 2013, con la intervención del programa Explora de la Comisión Nacional de Ciencia y Tecnología de Chile (CoNyciT), la convocatoria fue ampliada a otros colegios de Talca y otras comunas de la Región del Maule. Debido al éxito obtenido por la iniciativa y el crecimiento experimentado desde su puesta en marcha, el programa se adjudicó un Fondo Institucional Regional (FIC) en 2014, que permitió la expansión del proyecto a nivel regional.

Durante las primeras ediciones del DTC se produjo un acercamiento entre universidad y establecimientos de educación media que permitió detectar distintas realidades y necesidades respecto a estudiantes, profesores y los propios establecimientos. Por ello, dadas las condiciones socioeconómicas de algunos colegios de enseñanza media situados en lugares con escasos recursos o en el medio rural, era una situación constatada la dificultad que tenían muchos alumnos en poder desarrollar sus capacidades de un modo competitivo con aquellos que tienen mayor disposición de recursos. Por ello, la Facultad de Ingeniería de la UTalca, en su afán por desarrollar a nivel regional el interés por el estudio en áreas afines a la ciencia y la tecnología siempre ha tenido como objetivo prioritario tratar de paliar en la medida de lo posible estas deficiencias y cumplir así con la función pública que se le supone. En algún momento se planteó la posibilidad de implementar laboratorios en algunos establecimientos de enseñanza media particularmente vulnerables, pero esto resultaba costoso y tampoco garantizaba un acceso generalizado.

Poco a poco, los académicos involucrados en el proyecto fueron desarrollando distintas ideas, planteándose siempre ayudar a los establecimientos educacionales aportando equipos, materiales e insumos. La idea inicial fue adquirir un furgón cargado con material del proyecto DTC o de la Universidad e ir recorriendo los liceos de la Región del Maule. Debido al trabajo tan tedioso que suponía esto cada vez que se quería visitar algún establecimiento se planteó la posibilidad de postular a los proyectos MECESUP del Ministerio de Educación, con la idea previa de adquirir un bus, que se habilitaría como un laboratorio móvil de ciencias, similar a los existentes en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Talca. Tras la maduración de la idea previa y la realización de distintos estudios, análisis de pros y contras, presupuesto requerido y por versatilidad en la solución de problemas, se llegó a la conclusión que era mejor la adquisición de un camión con remolque, donde se implementaría un laboratorio de ciencias y tecnología (biología, química, física, matemática y tecnología), que posteriormente se conocería como **“TruckLab, Ciencia y Tecnología sobre Ruedas”**.

Finalmente, el proyecto se postula en el año 2014 como un Plan de Mejoramiento de Programa (PM) para convenios de desempeño en el marco del Fondo de Desarrollo Institucional 2014, planteando como objetivo **“Desarrollar las habilidades científicas, valoración del entorno en ciencias y tecnología, por medio de didácticas especializadas en estudiantes de Establecimientos de Enseñanza media de la Región del Maule”**. Esta idea resultó ganadora para poder ser implementada durante los años 2015 y 2016.



Figura 1: Vista exterior e interior de Trucklab

Resultados

El proyecto DTC nació en 2009, y a lo largo de su breve historia, ha generado instancias de aprendizaje en estudiantes de educación media pertenecientes a la región del Maule, generando un alto impacto en la educación y en la sociedad en general. El impacto que genera en la comunidad educativa se demuestra con el

aumento de las inscripciones al concurso por parte de los colegios de la séptima región, y en el aumento de número de instituciones comunitarias (empresas) que se han hecho partícipes mediante su auspicio acompañando en cada una de las etapas del proyecto. Además, este evento ha provocado el interés de toda la sociedad en general, no solo educacional. DTC ha evolucionado a lo largo de los años en la cantidad de estudiantes involucrados, comunas y colegios participantes, comenzando con 200 estudiantes el año 2009 llegando a más de 500 estudiantes para el 2022.

Este proyecto ha generado un fuerte impacto en el conocimiento a nivel ambiental en los estudiantes, debido a que muchos de los desafíos planteados están relacionados con la vida cotidiana y tienen relación con la sustentabilidad y las energías renovables. Entre los logros alcanzados durante estos últimos seis años de proyecto destaca la creación de una forma interactiva e innovadora de enseñar ciencia en cerca del 90% de comunas de la Región del Maule, la generación de instancias de participación entre establecimientos públicos y privados de la región, la colaboración en proyectos educativos, la asesoría a establecimientos educacionales en la implementación de laboratorios de ciencia y la entrega de instancias de perfeccionamiento a profesores del área de las ciencias entre otras.

El alcance de todos estos hitos ha provocado que cerca del 80% de los estudiantes de los colegios participantes en el DTC entrara en la Universidad, hecho impensable para muchos de ellos hace tan solo unos años. De ellos, el 95% presenta una clara inclinación por la ciencia y la tecnología.

Por otra parte, según manifiestan los mismos profesores y/o directores, el nivel de satisfacción y aceptación de los docentes capacitados es alto, replicando y socializando la nueva metodología utilizada en sus clases con otros docentes de ciencia de sus mismos establecimientos.

La visualización del nivel de impacto se refleja en los estudiantes, que manifiestan una gran aceptación en la nueva forma de entender las ciencias, más concreta y asociada a la realidad. Esto se ve reflejado en los estudiantes en su manifiesto de querer volver a participar en el TruckLab.

Todos estos resultados pueden constatarse en las palabras de Don Rigoberto Espinoza, perteneciente al SEREMI de Educación que dijo; “Este proyecto es un aporte a la calidad de la educación, poniendo a disposición de los liceos un laboratorio de envergadura y calidad, al alero de una Universidad pública como la Universidad de Talca”. Por otra parte, otras autoridades manifiestan; “Este laboratorio móvil permitirá a nuestros profesores realizar actividades más didácticas y entretenidas, con elementos sencillos, lo que abre un mundo de posibilidades para nuestros estudiantes”.

Además, el impacto causado por este proyecto en la Región del Maule ha causado la difusión de noticias en numerosos medios de prensa, regionales y nacionales, recibiendo incluso la visita de Doña Michelle Bachelet, expresidenta de la República de Chile.

A nivel país, los estudiantes chilenos sufren de brechas que en ocasiones son insalvables entre aquellos que tienen mayores recursos y los que no los tienen. La Facultad de Ingeniería de la Universidad de Talca, como universidad pública tiene la obligación de potenciar su entorno regional con iniciativas que ayuden a disminuir estas brechas.

Por ello, este trabajo presenta la motivación, metodología y resultados obtenidos en dos proyectos de transferencia tecnológica desarrollados en los últimos años bajo financiación de instituciones públicas, en concreto “Descubriendo Talento Científico DTC” y “TruckLab”, donde algunos de los principales hitos alcanzados son los siguientes:

- └ Desde la puesta en marcha del programa DTC más de 4000 alumnos han participado en el mismo, alcanzando un 80% su ingreso en la universidad. Estas cifras superan en mucho el porcentaje de estudiantes que habitualmente ingresa en la universidad desde la enseñanza media

- └ Durante los menos de 2 años que está en marcha el camión TruckLab son más de 10000 los km recorridos y prácticamente el 76% de las comunas de la región visitadas. TruckLab ha conseguido acercar la ciencia y los laboratorios a colegios de escasos recursos que hasta hace no mucho no tenían la posibilidad de ofrecer esto a sus alumnos.

Ambas iniciativas han tenido reconocimiento y éxito no solo a nivel regional, si no también nacional, y son varias las regiones adyacentes que han solicitado iniciativas para replicar estos proyectos en sus regiones.

Referencias Bibliográficas

Anderman, E. M., & Maehr, M. L. (1994). Motivation and schooling in the middle grades. *Review of Educational Research*, 64(2), 287–309. 22nd International Congress on Project Management and Engineering Madrid, 11th – 13th July 2018 1782

Anderman, E. M., & Midgley, C. (1997). Changes in achievement goal orientations, perceived academic competence, and grades across the transition to middle-level schools. *Contemporary Educational Psychology*, 22(3), 269–298.

Augusto, C. (2005). Qué son las “competencias científicas”? Foro Educativo Nacional. Recuperado de [Http://www.Colombiaaprende.edu.Co/Html/Docentes/1596/Articles89416_archivo_5.Pdf](http://www.Colombiaaprende.edu.Co/Html/Docentes/1596/Articles89416_archivo_5.Pdf).

Barrows, H. S. (1986). A taxonomy of problem- based learning methods. *Medical Education*, 20(6), 481–486.

Fensham, P. J. (2004). Defining an identity: The evolution of science education as a field of research (Vol. 20). Springer Science & Business Media.

Fernández-Oliveras, A., Molina Correa, V., & Oliveras, M. L. (2015). Estudio de una propuesta lúdica para la educación científica y matemática globalizada en infantil. *Revista Eureka Sobre Enseñanza y Divulgación de Las Ciencias*, 13(2), 373–383.

Franco-Mariscal, A. J., Blanco-López, Á., & España-Ramos, E. (2017). Diseño de actividades para el desarrollo de competencias científicas. Utilización del marco de PISA en un contexto relacionado con la salud. *Revista Eureka Sobre Enseñanza y Divulgación de Las Ciencias*, 14(1).

Larmer, J., & Mergendoller, J. R. (7AD). Essentials for project-based learning. *Educational Leadership*, 68(1), 34–37.

Marzo Mas, A., & Monferrer Pons, L. (2015). Pregúntate, indaga ya la vez trabaja algunas competencias. *Revista Eureka Sobre Enseñanza y Divulgación de Las Ciencias*, 12(1).

Murphy, C., & Beggs, J. (2003). Children’s perceptions of school science. *School Science Review*, 84, 109–116.

Murphy, K. M., Shleifer, A., & Vishny, R. W. (1991). The allocation of talent: Implications for growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 106(2), 503–530.

Palacios-Rojas, N. (2005). La ciencia al alcance de todos: educación científica a través del juego y la diversión. *Revista Magisterio. Educación y Pedagogía*, 16, 74–77.

Panorama das perspectivas da modelagem matemática presentes na formação geral básica da última etapa da educação básica na Base Nacional Comum Curricular do Brasil e nos Núcleos de Aprendizagens Prioritários de Matemática da Argentina: proximidades e distanciamentos

Ricardo Angelo MONTEIRO CANALE

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil

ricardocanale@ime.usp.br

Resumo

Este texto tem como objetivo discutir as semelhanças e as diferenças das perspectivas da modelagem matemática na formação geral básica dos projetos curriculares nacionais de Brasil (representado pela Base Nacional Comum Curricular - BNCC) e Argentina (simbolizado pelos Núcleos de Aprendizagens Prioritário - NAP de Matemática) para a última etapa da educação básica (no Brasil, equivale ao Ensino Médio, enquanto na Argentina corresponde ao Ciclo Orientado da Educação Secundária). Para tanto, inicialmente é feito um panorama geral das distintas perspectivas, possibilidades e limites da modelagem matemática existentes na BNCC do Ensino Médio e nos NAP de Matemática do Ciclo Orientado, com apoio de referências teóricas da Educação Matemática. Em seguida, é construído um quadro síntese comparativo entre os dois documentos anteriormente mencionados, apresentando as proximidades e os distanciamentos que existem em relação a forma como a modelagem matemática é tratada, trazendo, também, alguns exemplos práticos de aplicação com base nas duas diretrizes. Conclui-se que a modelagem matemática é uma estratégia pedagógica importante para o desenvolvimento de habilidades e competências relacionadas à resolução de problemas reais, à construção do pensamento crítico e matemático, e é valorizada como abordagem de ensino na formação geral básica tanto na BNCC do Ensino Médio do Brasil quanto nos NAP de Matemática do Ciclo Orientado da Educação Secundária da Argentina, apesar dos pontos positivos e negativos que existem na maneira como essa metodologia de ensino é tratada nesses dois documentos.

Palavras-chave: Ensino e aprendizagem de matemática – modelagem matemática – BNCC do Ensino Médio do Brasil – NAP de Matemática do Ciclo Orientado da Educação Secundária da Argentina.

Introdução

A modelagem matemática é uma abordagem didático-pedagógica tem sido utilizada no ensino de matemática na última etapa da educação básica (no Brasil, corresponde ao Ensino Médio; na Argentina, Ciclo Orientado da Educação Secundária), pois permite aos estudantes conectar a matemática a partir de situações-problemas reais, tornando o aprendizado mais significativo (BASSANEZI, 2002; LESH & DOERR, 2003). Além disso, ela auxilia o desenvolvimento de habilidades importantes, como a resolução de problemas, identificação de padrões, pensamento crítico e comunicação matemática, contribuindo para a formação integral do aluno (BLUM & LEIß, 2007).

Para implementar a modelagem no ensino de matemática na Educação Secundária, os professores devem estar familiarizados com os princípios e estratégias dessa abordagem. Segundo Blum e Leiß (2007), a modelagem matemática envolve diversas etapas, incluindo a identificação do problema, avaliação do caso estudado, construção do problema e a interpretação dos resultados obtidos. Essa estratégia resolutiva se apoia na taxonomia de Bloom (revisada), que, conforme Almeida e Vertuan (2016), contribui para a potencialização das abstrações matemáticas e do aprendizado.

A modelagem matemática é uma metodologia de ensino que tem sido adotada em diversos países, incluindo Brasil e Argentina, que criam iniciativas para melhorar o ensino da matemática no ensino secundário. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio brasileira (BRASIL, 2018) e os Núcleos de Aprendizagem Prioritários (NAP) argentinos (ARGENTINA, 2018) têm como objetivo fornecer um ensino de matemática de qualidade que prepare o estudante para lidar com os desafios do mundo atual. Assim, é importante comparar as perspectivas da modelagem matemática nesses contextos.

Incursão às diferentes perspectivas da modelagem matemática na BNCC do Ensino Médio do Brasil: um breve panorama

A BNCC é um documento normativo que estabelece os conhecimentos, as habilidades e competências essenciais que os estudantes devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica.

Na BNCC do Ensino Médio é proposto a modelagem matemática como uma das estratégias de ensino para promover o letramento matemático. De acordo com Bassanezi (2015), a modelagem matemática consiste em conectar problemas de diversas áreas do conhecimento a questões matemáticas solucionáveis, com resultados interpretáveis na linguagem do problema original. Essa abordagem é considerada uma importante estratégia para impulsionar o ensino e a aprendizagem da matemática, conectando as vivências dos estudantes com sua compreensão de mundo. Na BNCC do Ensino Médio é destacada a importância de abordagens didático-pedagógicas que utilizem a modelagem matemática nas competências específicas para a Matemática da Educação Secundária. Em vista disso, é proposto no documento:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.

[...]

3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

[...]

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 523; *ibid.*, p. 527)

A BNCC do Ensino Médio para Matemática destaca a relevância de conectar conceitos matemáticos com conhecimentos prévios. Quando os estudantes são confrontados com situações-problema, é necessário que realizem aproximações para compreender a situação, habilidades que envolvem a interpretação de informações, a captura de significados e a organização de ideias. Essas habilidades são desenvolvidas durante a transição da situação-problema para a representação mental da situação e, posteriormente, para a materialização da sua solução, como sublinham Almeida e Vertuan (2016).

A modelagem matemática na BNCC do Ensino Médio pode ser vista de diversas perspectivas, incluindo a de tornar o ensino de matemática mais significativo e relevante para os estudantes. Biembengut e Hein (2010) afirmam que a modelagem matemática possibilita aos estudantes perceber a

utilidade e necessidade da Matemática em sua vida cotidiana, fato que pode aumentar a motivação e interesse dos estudantes pela disciplina.

Ainda em relação ao documento, a modelagem matemática também pode ser vista como uma perspectiva que incentiva a colaboração entre pares e respeito à diversidade, por meio da validação de conjecturas através de investigação e discussão de resultados, com riqueza de representações. A análise e discussão das soluções durante uma atividade que envolva modelagem matemática são importantes para desenvolver habilidades como o pensamento crítico e o pensamento matemático, e para promover habilidades socioemocionais, como a cooperação, a discussão em grupo e o trabalho em equipe. Quando os estudantes são incentivados a se interessar pelos fenômenos relacionados à Matemática, e não apenas ao que diz respeito à parte instrumental, a aprendizagem se torna mais significativa a eles (BURAK, 2010; ALMEIDA & VERTUAN, 2016).

O ensino baseado em modelagem matemática possui diferenças em relação ao tradicional, e pode se beneficiar da utilização de objetos educacionais digitais para o desenvolvimento das atividades. Na BNCC, é destacada a importância de se incorporar propostas que valorizem as práticas da cultura digital e utilizem tecnologias da informação e da comunicação para modelar e resolver problemas, tornando o ensino de matemática mais dinâmico e interativo (DA SILVA & PIRES, 2013; ALMEIDA & VERTUAN, 2016).

Embora a inclusão da modelagem matemática na BNCC do Ensino Médio traga benefícios potenciais, há desafios e críticas relacionados a essa competência. Uma crítica importante é a falta de abordagem interdisciplinar para o ensino de matemática, apesar de reconhecer a interdisciplinaridade como importante para o ensino-aprendizagem de matemática e a incorporação da modelagem matemática. A Matemática é tratada como um bloco de conhecimento isolado, sem objeto para desenvolver a interdisciplinaridade. Conforme Biembengut e Hein (2010), a interdisciplinaridade e a abordagem temática são fatores que podem auxiliar substancialmente os estudantes a compreender melhor a Matemática como uma área do conhecimento transversal e relevante para a solução de problemas do mundo real.

Essa falta de interdisciplinaridade na BNCC pode comprometer a formação dos estudantes, limitando sua compreensão sobre a complexidade do mundo contemporâneo. Segundo Capone (2021), a interdisciplinaridade pode contribuir para a construção de uma educação crítica e emancipatória, que promova a reflexão sobre as desigualdades sociais e a construção de uma sociedade mais justa e inclusiva.

Outra crítica está em apenas ser citado de forma breve a análise de erros para o desenvolvimento de sequências didáticas, sem apresentar uma discussão ou cuidado para desenvolvimento dessa abordagem. Conforme Ozores e Valério (2015), a análise de erros pode ser vista como uma oportunidade de aprendizagem da matemática, na medida em que permite aos estudantes compreenderem os limites e as potencialidades dos modelos matemáticos que construíram.

Ao contemplarmos esse amplo panorama acerca das perspectivas da modelagem da BNCC do Ensino Médio, surge em nossos pensamentos os seguintes questionamentos: seriam as perspectivas sobre a modelagem matemática nos NAP de Matemática do Ciclo Orientado da Educação Secundária da Argentina semelhantes? De que forma essa metodologia se manifesta em sua essência nessa diretriz? E quanto ao seu desenvolvimento, ela segue o mesmo caminho da BNCC do Ensino Médio do Brasil? É o que desvelaremos a seguir.

Desbravando as abordagens da modelagem matemática presentes nos NAP de Matemática do Ciclo Orientado da Educação Secundária da Argentina: uma breve visão geral

Os NAP são documentos oficiais que estabelecem as aprendizagens consideradas essenciais em cada área do conhecimento para cada nível educativo da educação básica da Argentina. Eles são uma referência nacional para sistemas educacionais, instituições de ensino e projetos curriculares em cada província e na Cidade Autônoma de Buenos Aires.

Os NAP de Matemática do Ciclo Orientado da Educação Secundária argentina apresentam sugestões metodológicas recursos didáticos para a implementação dos objetivos de aprendizagem. No documento é destacada a importância da contextualização de situações internas e externas à Matemática na aprendizagem da matemática, com o objetivo de orientar professores na seleção de estratégias e recursos didáticos para tornar a aprendizagem mais significativa e envolvente para os estudantes.

No que se refere às habilidades próprias da Matemática na formação geral básica do Ciclo, são enfatizadas metodologias de ensino que promovam a relação entre as experiências dos alunos e sua percepção de mundo, destacando-se a importância que se há em o estudante reconhecer que

[...] la modelización constituye un aspecto esencial de la práctica matemática, y que supone identificar las relaciones relevantes y las variables sobre las que se va a operar, las representaciones que se van a utilizar, las propiedades que permiten justificar los procedimientos puestos en juego, el análisis de la pertinencia del modelo y la reinterpretación de los resultados a la luz del problema planteado inicialmente” (ARGENTINA, 2018, p. 14)

Ou seja, nos NAP a modelagem matemática é considerada não apenas uma abordagem pedagógica, mas uma valiosa ferramenta para o desenvolvimento do pensamento matemático, aprofundamento da educação científica do aluno e uma compreensão mais ampla do mundo. Nota-se, assim, que nos NAP há o pressuposto de que o conhecimento matemático é um instrumento enfrentar situações do mundo real. De acordo com Borromeo Ferri (2007), a modelagem matemática também pode ser vista como uma forma de ensino mais significativa, permitindo que os estudantes construam seu próprio conhecimento e compreendam a Matemática de forma mais profunda, trabalhando com problemas contextualizados que os estudantes podem aplicar em suas vidas diárias.

Ainda em relação ao documento, é destacada a importância da modelagem matemática para os estudantes explorarem e experimentarem conexão entre conceitos matemáticos e o mundo real. Habilidades são apresentadas para orientar a condução de uma sequência investigativa de ensino em sala de aula, indicando a modelização de situações contextualizadas internas e externas à Matemática para o aprendizado de um determinado conteúdo. Um exemplo disso é a oitava habilidade do eixo de Funções e Álgebra para os primeiros anos dessa etapa de ensino, que versa sobre

La modelización de situaciones extramatemáticas e intramatemáticas mediante ecuaciones cuadráticas, lo que supone: - apelar a las propiedades de las operaciones de números reales (factor común, cuadrado de un binomio, diferencia de cuadrados) y a gráficos cartesianos realizados con recursos tecnológicos para su resolución, - interpretar las soluciones en el contexto de la situación (ARGENTINA, 2018, p. 16).

Segundo Bassanezi (2002), a modelagem matemática é uma abordagem mais eficiente do que métodos tradicionais para a resolução de problemas complexos, já que possibilita uma análise mais sistemática e organizada, utilizando técnicas e ferramentas matemáticas apropriadas para cada caso. E isso é contemplado nos NAP do Ciclo Orientado, quando se é proposta:

[...]
- La producción, reinversión e integración de nuevos conocimientos mediante la resolución de problemas y la reflexión sobre lo realizado, y el reconocimiento de que existen distintos caminos para resolver un problema, como así también que los problemas pueden tener solución única, más de una solución, aun infinitas, y que algunos problemas no tienen solución.

[...]
- La comprensión de que la mayoría de las nociones matemáticas pueden abordarse desde diferentes marcos (algebraico, geométrico, numérico, probabilístico), y de la potencia que ofrece cambiar de un marco a otro tanto en la resolución de un problema, como en el control de procedimientos y resultados (ARGENTINA, 2018, pp. 13-14).

Uma outra perspectiva sobre a modelagem matemática nos NAP de Matemática do Ciclo Orientado consiste na análise de erros para aprimorar o processo de aprendizagem dos alunos. Segundo Ozores e Valério (2015), a análise de erros consiste em identificar as causas dos erros cometidos pelos alunos durante a resolução de problemas matemáticos e propor novas estratégias de ensino para superar essas dificuldades. Além de corrigir os erros, essa abordagem contribui para o desenvolvimento cognitivo dos alunos e uma aprendizagem mais significativa, já que ao analisar seus próprios erros e refletir sobre as possíveis causas e soluções, os alunos desenvolvem uma postura crítica em relação ao próprio processo de aprendizagem.

Apesar dos benefícios potenciais da modelagem matemática nos NAP de Matemática do Ciclo Orientado, há desafios e críticas associados ao documento. Uma dessas críticas é a falta de consideração à interdisciplinaridade, tratando a Matemática como uma área do conhecimento isolada. A interdisciplinaridade é uma abordagem que visa a integração de diferentes áreas do conhecimento para oferecer uma compreensão mais ampla e significativa dos fenômenos estudados. Conectar a Matemática com outras disciplinas pode ajudar os alunos a desenvolver habilidades importantes, como o pensamento crítico, o pensamento matemático, a resolução de problemas e a criatividade, tornando o ensino de matemática mais acessível e inclusivo (Capone, 2021).

Outra observação é que nos NAP do Ciclo Orientado o uso de tecnologias da informação e da comunicação (TIC) para o ensino de matemática é apresentado de forma vaga, sendo necessário recorrer a

documentos complementares. Conforme Da Silva e Pires (2013) e Oliveira (2021), as TIC, se devidamente ajustado ao contexto apresentado e ao objetivo da aula, podem oferecer recursos para a aprendizagem de matemática em diferentes contextos, permitindo que os alunos aprendam de maneira mais autônoma e personalizada. Além disso, ainda com base nos autores, tem-se que as TIC também proporcionam novas formas de visualizar e interagir com conceitos matemáticos, favorecendo a compreensão e a aplicação desses conceitos pelos alunos.

A seguir, veremos um compilado sobre as diferenças e proximidades que existem em relação à modelagem matemática como abordagem de ensino nos NAP de Matemática do Ciclo Orientado da Educação Secundária da Argentina e a BNCC do Ensino Médio do Brasil.

Síntese das perspectivas da modelagem matemática como metodologia de ensino nos NAP de Matemática do Ciclo Orientado da Educação Secundária da Argentina e na BNCC do Ensino Médio do Brasil: proximidades e distanciamentos

Como visto, a modelagem matemática é uma metodologia importante no ensino de matemática, que permite aos estudantes aplicarem diferentes conceitos matemáticos em situações concretas e a desenvolverem habilidades importantes, como tomada de decisões, comunicação matemática, resolução de problemas e pensamento matemático.

Na BNCC do Ensino Médio do Brasil se destaca a importância da modelagem matemática como competência essencial para desenvolver habilidades e competências para a vida em sociedade. Além disso, enfatiza-se a importância de se utilizar TIC no processo de modelagem matemática. Por outro lado, nos NAP de Matemática para o Ciclo Orientado da Educação Secundária da Argentina se é destacada a modelagem matemática como uma metodologia que permite a aplicação de conceitos matemáticos em contextos diversos, internos ou externos à Matemática, visando a formação do pensamento crítico e do pensamento matemático.

Uma atividade de modelagem matemática que pode ser desenvolvida com base nos documentos apresentados é calcular a quantidade de água necessária para encher uma piscina de forma irregular em um parque aquático. Os estudantes teriam que realizar medições, aproximações, estimativas, calcular o volume e estabelecer a relação entre a quantidade de água e o tempo necessário para encher a piscina, levando em consideração o formato da piscina, consumo de água por pessoa, custo do tratamento da água e outros fatores. Essa atividade pode ser adaptada em forma de sequência de ensino investigativo tanto para o Ensino Médio brasileiro, seguindo a BNCC, quanto para a etapa do Ciclo Orientado da Educação Secundária da Argentina, seguindo os NAP de Matemática.

Outro exemplo está em considerar um problema que envolve a construção de uma casa. Os estudantes poderiam utilizar conceitos matemáticos, como simetria, perímetro, área e volume, para projetar a casa e criar um modelo matemático que permita otimizar o uso dos materiais, maximizar a região de construção e minimizar os custos de construção.

Embora na BNCC do Ensino Médio do Brasil e nos NAP de Matemática do Ciclo Orientado da Educação Secundária da Argentina são apresentadas perspectivas diferentes para a modelagem matemática, em ambos são reconhecidas sua importância para o desenvolvimento de habilidades e competências para a vida em sociedade. Enquanto na BNCC do Ensino Médio se é destacada a importância de objetos educacionais digitais e troca de ideias em uma sequência de ensino investigativo baseada em modelagem matemática para o ensino-aprendizagem de matemática, nos NAP de Matemática do Ciclo Orientado se é enfatizada a análise de erros, a construção de uma argumentação matemática consistente e a reflexão crítica sobre a resposta de um problema. No entanto, na BNCC do Ensino Médio há uma limitação quanto ao desenvolvimento da análise de erros e avaliação reflexiva e crítica da solução encontrada para um problema, enquanto nos NAP de Matemática do Ciclo Orientado é mencionada apenas a importância do uso de TIC, sem muito desenvolvimento. Além disso, a quase ausência de interdisciplinaridade em ambos os documentos pode comprometer a formação integral dos estudantes, limitando sua compreensão sobre a complexidade do mundo contemporâneo (Capone, 2021).

Considerações finais

O uso da modelagem matemática como metodologia de ensino ajuda os estudantes a desenvolver habilidades importantes, como resolução de problemas, pensamento matemático, comunicação matemática e trabalho em equipe. A importância da modelagem matemática para o ensino de matemática é reconhecida tanto na BNCC do Ensino Médio do Brasil quanto nos NAP de Matemática para o Ciclo Orientado da Educação Secundária da Argentina, com diretrizes e orientações para sua implementação. Exemplos práticos, como os apresentados, podem auxiliar os professores a desenvolver atividades de modelagem matemática,

aplicando os conceitos matemáticos em situações reais, auxiliando os estudantes a mobilizar diferentes saberes e beneficiando a formação integral dos sujeitos.

Ambos os documentos possuem pontos positivos e negativos na utilização da modelagem matemática no ensino, o que requer que professores e gestores educacionais avaliem a melhor forma de implementá-las. Um ponto crítico é falta da interdisciplinaridade, que pode ser superada com a promoção de projetos integrados e com o compromisso de professores e gestores educacionais em promover tais projetos. A BNCC e os NAP podem ser utilizados como ponto de partida para a construção de uma proposta curricular mais integrada, todavia, é preciso que haja uma reflexão crítica sobre a modelagem matemática, suas limitações e uma maior integração com outras áreas do conhecimento.

Referências Bibliográficas

- Argentina. Ministerio de Educación. (2018). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios: Campo de formación general – Ciclo Orientado – Matemática*. Consultado em: 26 fev. 2023 Disponível em: <https://www.educ.ar/recursos/fullscreen/show/22425>.
- Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto.
- _____. (2015). *Modelagem matemática: teoria e prática*. (1ª ed.). São Paulo: Contexto.
- Biembengut, M. S.; & Hein, N. (2010). *Modelagem matemática no ensino no ensino*. (5ª ed.) São Paulo: Contexto.
- Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA12): Education, engineering and economics* (pp. 222-231). Chichester: Horwood.
- Brasil. Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio*. Consultado em: 23 fev. 2023. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/abril-2018-pdf/85121-bncc-ensino-medi/file>.
- Borromeo Ferri, R. (2007). Modelling problems from a cognitive perspective. In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA12): Education, engineering and economics* (pp. 260–270). Chichester: Horwood.
- Burak, D. (2010). Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. *Modelagem na Educação Matemática*, 1(1), 10-27. Consultado em: 23 fev. 2023. Disponível em: <https://bu.furb.br/ojs/index.php/modelagem/articledownload/2012/1360>.
- Capone, R. (2022). Interdisciplinarity in Mathematics Education: From Semiotic to Educational Processes. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(2). Consultado em: 26 fev. 2023. Disponível em: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1334533.pdf>.
- da Silva, M. A., & Pires, C. M. C. (2013). A riqueza nos currículos de Matemática do Ensino Médio: em busca de critérios para seleção e organização de conteúdos. *Zetetiké*, 21(1), 19-52. Consultado em: 01 mar. 2023. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646597/13499>.
- Lesh, R. A., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Nova York: Routledge.
- Oliveira, E. R. D. (2021). *O uso da tecnologia no ensino da matemática: contribuições do software GeoGebra no ensino da função do 1º grau* (Trabalho de Conclusão de Curso, Curso de Especialização em Ensino de Ciências e Matemática na modalidade de Educação a Distância). Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, campus Patos, Patos, Paraíba, Brasil. Consulta em: 23 fev. 2023. Disponível em: <https://repositorio.ifpb.edu.br/handle/177683/1316>.
- Ozores, A., & Valério, B. A análise de erros como estratégia de ensino. Consultado em: 26 fev. 2023. Disponível em: https://www.ime.usp.br/caem/anais_mostra_2015/arquivos_auxiliares/posteres_mpm/Poster_MPM_Ana_Luiza_Ozores.pdf.
- Vertuan, R. E., & Almeida, L. M. W. D. (2016). Práticas de monitoramento cognitivo em atividades de modelagem Matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30, 1070-1091. Consultado em: 26 fev. 2023. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/FchCbsSq9rJrf8bHJMKJqdt/?format=html&lang=pt>.

**Pensamiento Metaheurístico, una posible consecuencia
del Pensamiento Estadístico y del Pensamiento Probabilístico**

Jorge E. SAGULA

**División Matemática y División Estadística
Departamento Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Luján, Argentina
jsagula@mail.unlu.edu.ar**

Resumen

Por qué es importante estudiar tanto el Pensamiento Estadístico como el Pensamiento Probabilístico, con su adicional especificidad en el Pensamiento Bayesiano, tan simplemente, porque reflejan la necesidad del cerebro que también se nomina con tales nombres, Cerebro Estadístico, Cerebro Probabilístico, Cerebro Bayesiano, y estos conceptos se han desarrollado particularmente a niveles superiores desde los estudios biológicos, luego generadores en forma transdisciplinar, de las Neurociencias, y a partir de la Inteligencia Artificial desde mediados del siglo XX, pues ambas grandes disciplinas se necesitan y potencian en la construcción de los procesos de aprendizaje y en sus mejoras, los consecuentes procesos de meta-aprendizaje; por esta cuestión, revisten un alto nivel de importancia tanto la Heurística, como su evolución, la Metaheurística, en aras de resolver situaciones de incertidumbre en sistemas complejos.

Hoy por hoy, la Inteligencia Artificial, está mostrándose al mundo desde distintos campos de aplicación, sin embargo, todos estos desarrollos se deben al avance como consecuencia de estudiar con mayor profundidad al cerebro humano, reflejado en los grandes proyectos de Europa y Estados Unidos.

Por esto, la transdisciplinariedad posibilita el crecimiento de las ciencias, no sólo en sí mismas, sino permitiendo el traspaso de las propias disciplinas en procura de estar siempre más cerca de las buenas soluciones, y de mejores soluciones.

Palabras Clave: Pensamiento Heurístico – Pensamiento Metaheurístico – Pensamiento Probabilístico – Cerebro Estadístico – Cerebro Probabilístico.

Pensamiento Heurístico y Metaheurístico

El término heurística se puede definir como “un proceso cognitivo que se utiliza para reducir la complejidad de un problema durante su proceso de resolución”. Las investigaciones de los psicólogos (**Kahneman, Slovic, Tversky; 1982**) indican que los sujetos emplean un número limitado de heurísticas para efectuar inferencias inductivas, por tanto, se produce una modificación en la forma de concebir el razonamiento no determinístico; ellos mismos, definen tres tipos de heurísticas en función del proceso cognitivo empleado:

-Heurística de Representatividad: consiste en calcular la probabilidad de un suceso en base a la representatividad del mismo en cuanto a la población de proveniencia; esta heurística aparece asociada a la creencia de que una muestra debería reflejar la distribución de la población de la cual se obtiene, pero, no considera el tamaño muestral al momento de realizar las inferencias inductivas.

-Heurística de Disponibilidad: utilizada al juzgar la frecuencia de una muestra.

-Heurística de Ajuste y Anclaje: las heurísticas estadísticas se consideran reglas generales, intuitivas, y procesos inferenciales.

La Heurística, que engloba las técnicas que permiten incrementar la eficiencia de un proceso de búsqueda, y su evolución, la Metaheurística, que corresponde a “un proceso iterativo que conduce una heurística subordinada, combinando diferentes conceptos para explorar y explotar las características que pueda exhibir el espacio de búsqueda” (*Osman & Laporte, 1996*) son naturalmente pilares insustituibles aportantes de metodologías, métodos y/o técnicas para el análisis y procesamiento de *Big Data*, específicamente mediante: Redes Neuronales, Algoritmos Genéticos, Swarm Intelligence (Colonias de Hormigas, Enjambre de Partículas), y otros tantos modelos de búsqueda y aprendizaje en el contexto de la Inteligencia Artificial (**Sagula, Jorge; 2020**).

Metaheurística, significa “Más allá de la heurística” o “Refinamiento de heurística”. El término surge en Operation Research impulsado por Fred Glover al introducir el Método Búsqueda Tabú (1988, 1997); así, Osman & Laporte (1996) definen *Metaheurística* como “un proceso iterativo que conduce una heurística subordinada, combinando diferentes conceptos para explorar y explotar las características que pueda exhibir el espacio de búsqueda”. Esto permite expresar que, en el transcurso de un proceso creativo en la resolución de problemas, resulta conveniente comenzar el protocolo a partir de pensamiento divergente en aras de generar tantas ideas y/o soluciones como resulte posible, y desde ese momento, migrar produciendo cambios hacia una forma de pensamiento convergente, de modo de poder seleccionar, las ideas o condiciones, más prometedoras, situación que ocurre al desarrollar un algoritmo metaheurístico.

Así, puede afirmarse que la *Metaheurística* surge, por caso, de la observación metódica en las ciencias del comportamiento, resultando Modelos Metaheurísticos tales como: Redes Neuronales, Algoritmos Genéticos, Programación Evolutiva (todos ellos Bio-Inspirados), Swarm Intelligence (Colonias de Hormigas, Colonias de Abejas), en este último caso siendo consecuencia de la *Etología*, entre otros.

Ciertamente, rápidamente se puede inferir que “la percepción” une a las tres temáticas (Etnomatemática, Heurística y Metaheurística) a través de la Interdisciplinariedad, pero “una mejor percepción”, permite incrementar el conocimiento y consecuentemente mejorar los modelos que, desde el simbolismo matemático, en su más amplia expresión, posibilitan la construcción de meta-modelos aptos en la resolución de problemas generales y complejos, y, extrapolables en la medida que se conozcan los contextos de aplicación (**Sagula, Jorge; 2020**).

Pensamiento Probabilístico

El Pensamiento Probabilístico, esencialmente, consiste en tratar de estimar, mediante algunas herramientas lógicas y matemáticas, la probabilidad que suceda algún resultado específico. En este contexto, el

Pensamiento Probabilístico posibilita identificar los resultados más probables; en tal instancia, las decisiones se consideran más precisas y efectivas.

El Pensamiento Probabilístico está fuertemente afectado por el mecanismo de construcción de Modelos Mentales, que constituyen representaciones psicológicas de situaciones reales, imaginarias o hipotéticas, desde las cuales se construyen escenarios en base a marcos referenciales, y que permiten, mediante posteriores mecanismos cognitivos, el planteo y la resolución de problemas, y el proceso de toma de decisiones. Las teorías de representación de la mente permiten que las representaciones de constructos mentales y el uso de las mismas en los procesos de decisión sean posibles, existiendo sustento en la cognición, generando acciones. Se puede postular que “una representación mental es un isomorfismo entre procesos que ocurren en el cerebro y el comportamiento de ciertos aspectos del mundo”. Esta definición de una Teoría de la Representación, permite vincular el concepto de Modelo Mental con la Heurística (del griego “heuriskien”, significa “buscar”); Heurística puede definirse como un conjunto de procedimientos simples, frecuentemente basados en el sentido común, que conforme se supone, permitirán obtener una buena solución a problemas con cierto grado de dificultad, en forma rápida y fácil (**Jorge E. Sagula, 2023**).

El Pensamiento Probabilístico suele ser empleado en forma intuitiva, en una acotación del Criterio de von Mises, esto es “no como el paso al límite para n tendiendo a infinito” (**Jorge E. Sagula, 2004**) sino como aproximación delimitando la tendencia, razón por la cual existe una componente de subjetividad, y la diferencia entre el valor experimental y el valor teórico no necesariamente resulta como debería ser; por supuesto, aquí hay un vínculo entre el modelo mental de quien resuelve y la transcripción o decodificación del mismo; esto evidencia la existencia de un nivel de incertidumbre más allá de la incertidumbre en sí misma, pudiendo concluir que la información es sesgada.

En el caso que la diferencia entre el valor experimental y el valor teórico fueron bastante aproximados, las percepciones subjetivas se transformarían en objetivas, y nuevamente la presencia de los modelos mentales toma un rol esencial; consecuentemente, es posible expresar que las representaciones mentales correspondientes a conjeturas e intuiciones deben ser lo suficientemente cercanas a la realidad; aquí, cabe recordar una frase de Descartes “No describimos el mundo que vemos, vemos el mundo que podemos describir”.

Definir una teoría de la representación como fue hecho precedentemente, permite vincular el concepto de Modelo Mental con la Heurística; consecuentemente, las metodologías de resolución se traducen en representaciones mentales (o bien, internas) que cada aprendiz construye en su proceso de razonamiento.

Es menester mencionar que “las representaciones se pueden considerar como poderosas herramientas para la construcción de la comprensión y consecuentemente, para comunicar la información y la comprensión misma” (**Greeno & Hall, 1997**).

Es necesario, que la enseñanza de la probabilidad en el sistema escolar, se oriente al desarrollo de Alfabetización Probabilística y Pensamiento Probabilístico, conforme lo expresan (**Vergara et al., 2020**) en su estudio sobre relaciones entre pensamientos proporcional y probabilístico en la toma de decisiones. En cuanto a la Alfabetización Probabilística, (**Gal, I., 2005**) y (**Sánchez, E., 2009**) la vinculan con el Conocimiento Probabilístico elemental de los ciudadanos en su desenvolvimiento cotidiano, refrendando el Pensamiento Estadístico del escritor H. G. Wells.

(**Gal, I., 2005**) propone un modelo, en el cual el componente cognitivo incluye los conceptos: (1) Ideas Centrales: variación, aleatoriedad, independencia, predictibilidad, incertidumbre; (2) Cálculo de probabilidades, estimando la probabilidad de ocurrencia de eventos; (3) Idioma: términos y métodos utilizados para comunicarse sobre el azar; (4) Contexto: comprender el papel y las implicaciones de los

problemas y mensajes probabilísticos en varios contextos y en el discurso público y personal; y (5) Preguntas críticas: cuestiones sobre las que reflexionar cuando se trata de probabilidades.

Estocástico es un concepto empleado por investigadores en la enseñanza de Estadística, Probabilidad y Combinatoria, refiriéndose a la interfaz entre los conceptos combinatorio, probabilístico y estadístico, los cuales posibilitan el desarrollo de formas particulares de pensamiento, involucrando fenómenos aleatorios, interpretación de muestras y elaboración de inferencias. Para que exista una significativa percepción de lo Estocástico, es necesario el desarrollo del Pensamiento Estadístico y Probabilístico, hecho que exige un trabajo orientado hacia las formas de razonamiento combinatorio, asociados al razonamiento probabilístico y estadístico. El Pensamiento Estocástico evoluciona continuamente por el desarrollo de la matemática y la física principalmente (**Sagula, Jorge E., 2022**).

Desde mediados del siglo XX, investigadores prominentes en psicología del desarrollo, educativa y cognitiva se han mostrado muy inquietos en cuanto al razonamiento estocástico (Piaget y Inhelder, 1951; Fischbein, 1975; Kahneman, Slovic, Tversky, 1982) posibilitando un importante pilar en la investigación en el área; pero, Lecoutre “muestra que las concepciones erróneas sobre la probabilidad, han inducido respuestas estereotípicas en las personas, reflejando más el conocimiento teórico de los sujetos sobre la probabilidad que sus opiniones o sus formas de razonar”. Esto lleva a pensar que como objetivo inicial de investigación en educación estadística es necesario dar una descripción analítica de los procesos cognitivos subyacentes en estas concepciones erróneas de modo de poder encontrar si existe alguna coherencia interna en los juicios y razonamientos espontáneos.

Es posible concluir que el Pensamiento Probabilístico puede verse como una línea de pensamiento de mayor complejidad, el Pensamiento Heurístico, no excluyente de tales procesos, pero que constituye una línea metodológica orientada a la Resolución de Problemas, y que precisamente, puede definirse mediante un conjunto de reglas metodológicas, sobre la base de la creatividad, el ingenio y la invención; consecuentemente, parte de la percepción contextual hacia la asimilación y la comprensión del conocimiento en pro de la capacidad en la resolución de problemas.

Cerebro Estadístico y Cerebro Probabilístico

La Teoría del Cerebro Estadístico deviene en que el cerebro superar a las máquinas, siempre en términos de incertidumbre y probabilidades, optimizando su capacidad de aprendizaje. Los algoritmos que sustentan a Machine Learning y Deep Learning, su evolución, aún están en forma de desplazamiento Bottom Up (sin capacidad de reflexión) respecto de la capacidad del cerebro. Es importante consignar que el cerebro puede reconocer un patrón, tanto en sonido como imagen, en una fracción de segundo, en tanto que una máquina requiere de un análisis de Big Data y miles, millones de datos. Los algoritmos implementados en redes neurales de aprendizaje llegan a un óptimo de cómputo, estabilizándose, marcando una tendencia en sus datos; en tanto que el cerebro humano logra un registro constante de la incertidumbre asociada a cada nodo de información y procede a actualizarla en cada momento de aprendizaje. El cerebro genera permanentemente modelos del contexto en el cual se mueve y, en función de la información que percibe a partir de los sensores humanos, efectúa predicciones sobre el futuro inmediato (en este primer nivel es lo que ocurre en todos los seres humanos, existe una capacidad esencial de supervivencia), y en algunas instancias, en mayores desarrollos, en el futuro mediato (**Jorge E. Sagula, 2022**).

(**Echeveste, Rodrigo et al. 2020**) sostienen que “los modelos computacionales basados en neuronas artificiales, surgiendo los modelos de redes neurales, temática que se comenzó a investigar en el siglo XX, en la década del '40; los investigadores sugieren que al tener que enfrentarse con situaciones de incertidumbre, el cerebro “funciona como una poderosa máquina probabilística””; para arribar a esa conclusión, los científicos realizaron el entrenamiento de neuronas artificiales con la particularidad de llegar a comportarse similarmente a las neuronas de la corteza visual (especializada en procesar lo que se ve y aportar sentido a tales visualizaciones), y a partir de la metodología en cuestión, procedieron a explorar tal región cerebral en situaciones de incertidumbre. Los resultados alcanzados apoyaron la teoría que postula que, en contextos inciertos, el cerebro es capaz de realizar complejos cálculos probabilísticos; este estudio fue realizado, como

no podía ser de otra forma por un equipo interdisciplinario en la Universidad de Cambridge (Inglaterra) a comienzos de esta década.

El cerebro humano, en esta instancia, responde al Modelo de Cerebro Probabilístico, pero también al Modelo de Cerebro Estadístico, y el cerebro conforme releva la información captada por los sentidos, que por naturaleza es restringida, parcial e incompleta, logra efectuar sus tareas, sus operaciones, eficazmente, en situaciones de incertidumbre, y es en estas condiciones que el cerebro, a través del uso de probabilidades, específicamente mediante el Teorema de Bayes, llega a conclusiones aceptables o admisibles, minimizando la probabilidad de errores; esto nos lleva a pensar que en un momento dado, existe un Modelo de Cerebro Bayesiano.

El Cerebro Bayesiano representa un Estadístico Neuronal, surgiendo como un Modelo entre el cerebro pensado como todo lo innato y todo lo adquirido, siendo superior a una máquina; actúa como un Estadístico permanentemente considerando incertidumbre y probabilidades en términos a optimizar su capacidad de aprendizaje

Conforme a la Teoría del Cerebro Bayesiano, se sostiene que el cerebro permite comprender cómo funciona el mundo, y esto involucra los diferentes escenarios de inmersión. Esta labor se desarrolla en la corteza orbitofrontal. Así, no se percibe el mundo tal como es realmente, sino como el cerebro supone que es; situación que es profundizada mediante los impulsos sensoriales que se reciben de acuerdo a las percepciones del mundo exterior.

La importancia de Thomas Bayes y la formulación de su Teoría del Cerebro Bayesiano reside en que “el cerebro se guía mediante la Teoría de la Probabilidad o Regla de Bayes” (Farias, I., 2021). Este pensamiento se refleja en las manifestaciones de científicos cognitivos que conjeturaron y lo siguen haciendo, enfáticamente, que el cerebro humano incorpora algoritmos probabilísticos, específicamente bayesianos en todo momento, tanto desde la percepción como en los procesos deliberativos y decisionales.

En aras de corroborar si el cerebro es capaz de realizar complejos cálculos probabilísticos, el equipo de investigación científica empleó las Redes Neuronales (o Redes Neuronales Artificiales), las cuales fueron entrenadas para evaluar las probabilidades. En su modelo, los científicos lograron identificar una forma de oscilaciones cerebrales (denominadas gamma), que se modifican similarmente a lo que ocurre con las neuronas cerebrales en función del cambio de lo percibido. (Echeveste, Rodrigo et al., 2020) expresaron que “hasta el momento no se había podido mostrar una conexión tan directa entre hacer inferencia probabilística (objetivo computacional del cerebro) y un gran número de resultados experimentales observados en la dinámica de la actividad neuronal”.

Desde el punto de vista computacional, y particularmente en la Inteligencia Artificial, y con mayor énfasis en la temática inherente a la gran disciplina de la Ingeniería de Conocimiento, con especificidad en su acápite de Representación del Conocimiento, en el caso de los Sistemas de Producción, la formalización del razonamiento humano, en general, obedece a un sistema basado en reglas, tales reglas responden a la lógica y el razonamiento, en el caso del conocimiento estrictamente determinístico, responde a Inferencia Inductiva e Inferencia Deductiva, sin embargo, cuando el conocimiento no es determinístico debido entre otras cuestiones a situaciones de incertidumbre, imprecisión, intuición, conjeturas y/o sentido común, enmarcadas en la heurística, el modelar se recurre a ponderaciones en el contexto de modelos propios o híbridos provenientes de la Probabilidad, la Estadística, la Plausibilidad, la Posibilidad, la Creencia, los Grados de Confianza, entre otros, razón por la cual ni la Inducción ni la Deducción tienen cabida, y es necesario introducir y considerar, la Abducción, por tanto, la representación de conocimiento es “aproximada”, dependiendo de la experticia de quien dispone del conocimiento sobre el dominio específico, esta realidad, es merced a la gran disciplina, la Ingeniería de Conocimiento, que lleva a plantear que la Heurística y su evolución, la Metaheurística, se sustentan en los modelos que intentan, de la mejor forma posible, resolver el indeterminismo, sujeto en cuestiones de carácter amplio, por eso aquí, tanto el Pensamiento Estadístico como el Pensamiento Probabilístico se ven reflejados.

Conclusiones

En este artículo, generador de la Conferencia “Pensamiento Metaheurístico, una posible consecuencia del Pensamiento Estadístico y del Pensamiento Probabilístico” aporta conceptos provenientes de las ciencias que responden a procesos de incertidumbre, y como se asocian al cerebro humano, por tanto, Pensamiento Probabilístico y Pensamiento Bayesiano, frecuentemente denotados como Pensamiento Estocástico, permiten consignar la terminología correspondiente a Cerebro Estadístico, Cerebro Probabilístico y específicamente Cerebro Bayesiano, en pos de dar nacimiento a conceptos tales como Heurística y su propia evolución, Metaheurística, siempre enfocados a la resolución de problemas, de naturaleza compleja, es por esto que estos enfoques permiten la mejora del aprendizaje en procura del meta-aprendizaje, con el propósito permanente de obtener la optimización de los procesos decisionales inteligentes.

Referencias Bibliográficas

- Kahneman, D., Slovic, D., & Tversky, A. (1982). *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge University Press.
- Sagula, Jorge E. (2020). *Visión de la Educación Matemática en Convergencia con la Inteligencia Artificial en Contextos Complejos (Tiempos de Pandemia) (desde Big Data a Machine Learning)*. En *Memorias del I SEM-V*. Universidad Nacional de Luján. Luján, Buenos Aires, Argentina; 13-14 agosto'2020. ISBN 978-987-3941-61-0, EDUNLu, 2021.
- Sagula, Jorge E. (2023). *Pensamiento estadístico y probabilístico, un puente entre neurociencias e inteligencia artificial*. *Revista e-CUCBA, México*; A aparecer.
- Sagula, Jorge E. (2004). *Fundamentos de Estadística y Probabilidad*, Universidad Americana, Pp. 76-77.
- Greeno, J. G. & Hall, R. P. (1997). *Practicing Representation: Learning with and about representational forms*. *Phi Delta Kappan*, 78 (5), 361-367.
- Vergara, A., Estrella, S., & Vidal-Szabó, P. (2020). *Relaciones entre pensamiento proporcional y pensamiento probabilístico en situaciones de toma de decisiones*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 23(1), 7-36.
- Gal, I. (2005). *Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas*. G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 39-63. NY: Springer.
- Sánchez, E. (2009). *La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México*. *Educación Matemática*, 21(2), 39-77.
- Sagula, Jorge E. (2022); *Pensamiento Estocástico, un puente entre Neurociencias e Inteligencia Artificial*. En *Memorias del III SEM-V, Tomo I*, ISBN 978-987-3941-86-3, EDUNLu, mayo'2022.
- Echeveste, R., Aitchison, L., Hennequin, G. *et al.* (2020). *Cortical-like dynamics in recurrent circuits optimized for sampling-based probabilistic inference*. *Nature Neuroscience* **23**, 1138–1149.
- Farías, Isbelia (2021). *Thomas Bayes y el Cerebro Bayesiano*. Psicoactiva.

Alfabetización Estadística en el ámbito educativo

Reinaldo SALAZAR ESPINOZA

Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Universidad de Playa Ancha, Chile

rsalazar@upla.cl

Resumen

A nivel internacional existen variadas propuestas sobre lo que se entiende por alfabetización estadística, en algunos casos se intenta dar una definición o simplemente la definen; desde mi particular perspectiva, la alfabetización estadística es importante en el sentido que permite la toma de decisiones, sustentadas por la habilidad de entender y comprender problemas con cierta presencia de incertidumbre, de esta manera, se realiza un pseudo algoritmo o protocolo, en primer lugar se procede a la obtención de datos o información, luego evaluar con pensamiento crítico los resultados, para posteriormente procesar la información e interpretar los resultados obtenidos.

En otras palabras, la Alfabetización Estadística está centrada en el “Desarrollo del Pensamiento Estadístico”.

Palabras clave: Alfabetización – Estadística - Terminología - Interpretación.

Introducción

La alfabetización se define como parte de prácticas sociales a través de las cuales los sujetos que se alfabetizan se convierten en miembros de determinadas comunidades de práctica (Lave y Wenger, 1998), donde los objetivos y valores tienen un peso importante en el proceso e impacto de la alfabetización.

¿Qué es alfabetización estadística?

De acuerdo con el planteamiento de Gal (2002), la alfabetización estadística se refiere a la capacidad para interpretar, evaluar críticamente y, cuando sea pertinente, expresar opiniones respecto a la información estadística, los argumentos relacionados con los datos o fenómenos estocásticos.

La alfabetización estadística se refiere a la capacidad de comprender y utilizar correctamente los conceptos estadísticos en el análisis y la interpretación de datos. Esto incluye la comprensión de los diferentes tipos de datos, las técnicas de recopilación de datos, la estadística descriptiva, la inferencia estadística y la toma de decisiones basadas en datos. La alfabetización estadística también implica saber cómo leer y entender los gráficos y tablas estadísticas, y cómo comunicar de manera clara y precisa los hallazgos estadísticos.

En resumen, la alfabetización estadística es importante para poder tomar decisiones informadas y para comprender la información presentada en los medios de comunicación y en la investigación científica.

Los principales objetivos sobre alfabetización en estadística, son:

1. Proporcionar a los estudiantes una comprensión sólida de los conceptos fundamentales de la estadística, como la recolección de datos, la estadística descriptiva y la inferencia estadística.
2. Enseñar a los estudiantes cómo aplicar estos conceptos a la toma de decisiones y la solución de problemas en diferentes ámbitos, como el negocio, la ciencia, la política y la vida cotidiana.
3. Desarrollar en los estudiantes habilidades para leer, interpretar y comunicar de manera clara y precisa los hallazgos estadísticos, incluyendo el uso de gráficos y tablas.

Autores o referentes teóricos de la alfabetización en estadística

Existen varios autores e investigadores que han contribuido al desarrollo de la teoría y la práctica de la alfabetización estadística. Algunos de los más destacados incluyen:

1. Andrew Gelman, profesor de estadísticas y ciencias políticas en la Universidad de Columbia. Es conocido por su trabajo en el campo de la inferencia bayesiana y por su enfoque en la comunicación efectiva de resultados estadísticos.
2. Deborah Nolan, profesora de estadística en la Universidad de California, Berkeley. Es conocida por su trabajo en la enseñanza de la estadística y por su enfoque en la inclusión y la diversidad en la educación estadística.
3. Frank Moore, profesor de estadísticas en la Universidad de California, Berkeley. Es conocido por su trabajo en la enseñanza de la estadística y por su enfoque en el aprendizaje activo y el desarrollo de habilidades estadísticas.
4. Alan Rossman, profesor de estadísticas en la Universidad de Illinois en Urbana-Champaign. Es conocido por su trabajo en la enseñanza de la estadística y por su enfoque en el uso de la tecnología en la educación estadística.
5. David Moore, profesor de estadística en la Universidad de Purdue. Es conocido por su trabajo en la enseñanza de la estadística y por su enfoque en el desarrollo de habilidades estadísticas a través de la resolución de problemas y la reflexión crítica.

Autor	Descripción	Tipo de teoría
Andrew Gelman	Profesor de estadística y ciencias políticas en la Universidad de Columbia, es conocido por su trabajo en el campo de la inferencia bayesiana y por su enfoque en la comunicación efectiva de resultados estadísticos.	Inferencia Bayesiana
Deborah Nolan	Profesora de estadística en la Universidad de California, Berkeley. Es conocida por su trabajo en la enseñanza de la estadística y por su enfoque en la inclusión y la diversidad en la educación estadística.	Educación Estadística y Diversidad
Frank Moore	Profesor de estadística en la Universidad de California, Berkeley. Es conocido por su trabajo en la enseñanza de la estadística y por su enfoque en el aprendizaje activo y el desarrollo de habilidades estadísticas.	Educación Estadística y Habilidades
Alan Rossman	Profesor de estadística en la Universidad de Illinois en Urbana-Champaign. Es conocido por su trabajo en la enseñanza de la estadística y por su enfoque en el uso de la tecnología en la educación estadística.	Educación Estadística y Tecnología
David Moore	Profesor de estadística en la Universidad de Purdue. Es conocido por su trabajo en la enseñanza de la estadística y por su enfoque en el desarrollo de habilidades estadísticas a través de la resolución de problemas y la reflexión crítica.	Educación Estadística y Habilidades

Es importante destacar que esta tabla es una aproximación generalizada de los autores y sus teorías, ya que cada uno de ellos ha desarrollado una gran cantidad de investigaciones y publicaciones en diferentes temas relacionados con la alfabetización estadística.

Terminología más usada en la enseñanza sobre la estadística

En la enseñanza de la estadística, se utilizan una variedad de términos y conceptos que es importante conocer y comprender. Algunos de los términos más comunes incluyen:

- Muestra: un subconjunto de datos seleccionado de una población para ser estudiado.
- Población: el conjunto completo de datos o individuos que se desea estudiar.
- Variable: una característica o medida que puede variar de un individuo a otro en una población o muestra.
- Estadística descriptiva: un conjunto de técnicas utilizadas para resumir y describir los datos.
- Estadística inferencial: un conjunto de técnicas utilizadas para inferir conclusiones sobre una población a partir de una muestra.
- Estadística paramétrica: un conjunto de técnicas estadísticas basadas en la suposición de una distribución conocida (como la normal) para los datos.

- Estadística no paramétrica: un conjunto de técnicas estadísticas que no requieren suposiciones sobre la distribución de los datos.
- Estadística Bayesiana: un enfoque estadístico en el que se utilizan la información previa y la probabilidad para tomar decisiones y hacer inferencias.
- Estadística psicométrica: un conjunto de técnicas estadísticas utilizadas para medir habilidades, conocimientos y atributos mentales.
- Estadística experimental: un conjunto de técnicas estadísticas utilizadas para diseñar y analizar experimentos.

Muestra

En estadística, una muestra es un subconjunto de individuos o elementos seleccionados de una población con el objetivo de obtener información sobre las características de la población completa. Es importante tener en cuenta que, debido a que generalmente es imposible medir o analizar a todos los individuos en una población, se utilizan muestras para obtener una idea de las características de la población completa.

Existen diferentes técnicas para seleccionar una muestra, como el muestreo aleatorio simple, el muestreo estratificado, el muestreo por conglomerados, etc. Es importante que la muestra seleccionada sea representativa de la población, es decir, que tenga las mismas características que la población completa en términos de edad, género, educación, etc.

En resumen, una muestra en estadística es un subconjunto de individuos o elementos seleccionados de una población con el objetivo de obtener información sobre las características de la población completa, se utilizan técnicas para seleccionar una muestra de forma representativa y se utiliza para obtener una idea de las características de la población completa.

Población

Una población es el conjunto completo de individuos o elementos sobre los cuales se desea obtener información. Puede ser finita o infinita y puede ser de cualquier tipo de objeto, desde personas a animales, plantas, cosas, eventos, etc. Es importante tener en cuenta que generalmente es imposible medir o analizar a todos los individuos en una población, por lo que se utilizan muestras para obtener una idea de las características de la población completa.

Además, en estadísticas se suele trabajar con dos tipos de poblaciones: la población finita y la población infinita. Una población finita es aquella en la que se conoce el número exacto de individuos, mientras que una población infinita es aquella en la que el número de individuos es desconocido o es tan grande que no se puede contar. Un ejemplo de población finita puede ser el número de personas que viven en una ciudad, mientras que un ejemplo de población infinita podría ser el número de personas que viven en el mundo.

En resumen, una población en estadísticas es el conjunto completo de individuos o elementos sobre los cuales se desea obtener información, puede ser finita o infinita y puede ser de cualquier tipo de objeto, desde personas a animales, plantas, cosas, eventos, etc.

Variable

En estadística, una variable es una característica o medida que se observa o se mide en un individuo o elemento de una población o muestra. Las variables pueden ser cualitativas o cuantitativas.

Variables cualitativas: son aquellas que describen cualidades o características, como el género, la religión, el color de ojos, etc.

Variables cuantitativas: son aquellas que se miden en términos numéricos, como la edad, el peso, la altura, el ingreso, etc.

Las variables pueden ser también discretas o continuas.

VARIABLES DISCRETAS: son aquellas que solo pueden tomar valores discretos o contables, como el número de hijos, el número de libros leídos en un año, etc.

VARIABLES CONTINUAS: son aquellas que pueden tomar cualquier valor dentro de un rango, como la edad, el peso, la altura, etc.

En resumen, una variable en estadística es una característica o medida que se observa o se mide en un individuo o elemento de una población o muestra, pueden ser cualitativas o cuantitativas, discretas o continuas.

Estadística Descriptiva

La estadística descriptiva es una rama de la estadística que se encarga de recopilar, organizar, analizar y presentar datos mediante resúmenes y representaciones gráficas. El objetivo de la estadística descriptiva es proporcionar una descripción general de los datos y su distribución, permitiendo a los usuarios comprender y describir patrones y tendencias en los datos.

La estadística descriptiva se utiliza para describir las características de una población o muestra mediante medidas de tendencia central y medidas de variabilidad. Las medidas de tendencia central incluyen la media, la mediana y la moda, mientras que las medidas de variabilidad incluyen la desviación estándar y la varianza.

Además de medidas estadísticas, la estadística descriptiva también utiliza gráficos y tablas para presentar los datos de forma visual. Los gráficos comúnmente utilizados incluyen histogramas, gráficos de barras, gráficos de líneas.

En resumen, la estadística descriptiva es una rama de la estadística que se encarga de recopilar, organizar, analizar y presentar datos mediante resúmenes y representaciones gráficas, su objetivo es describir las características de una población o muestra mediante medidas de tendencia central y medidas de variabilidad, utiliza gráficos y tablas para presentar los datos de forma visual.

Estadística Inferencial

La estadística inferencial es una rama de la estadística que se encarga de utilizar la información obtenida de una muestra para hacer inferencias o conclusiones acerca de una población. El objetivo de la estadística inferencial es permitir a los usuarios tomar decisiones basadas en la información disponible, en lugar de medir o analizar a todos los individuos en una población.

La estadística inferencial se basa en el concepto de la probabilidad y utiliza una variedad de técnicas, como el análisis de varianza, el análisis de regresión, el análisis de supervivencia, entre otros.

Una de las técnicas más comunes de la estadística inferencial es el muestreo estadístico, que se refiere a la selección de una muestra de individuos de una población con el objetivo de obtener información acerca de la población completa. La estadística inferencial también se utiliza para estimar parámetros poblacionales, como la media o la proporción, y para hacer pruebas de hipótesis para determinar si hay diferencias significativas entre las características de dos o más grupos.

Estadística Paramétrica

La estadística paramétrica es una rama de la estadística que se basa en la suposición de que los datos provienen de una población con una distribución conocida, como la distribución normal. En esta rama se utilizan parámetros para describir la población, como la media y la desviación estándar. El objetivo de la estadística paramétrica es estimar estos parámetros y hacer inferencias sobre la población a partir de la muestra.

Los métodos estadísticos utilizados en estadística paramétrica se basan en las propiedades de las distribuciones conocidas y suelen ser más precisos que los métodos no paramétricos cuando se cumplen las suposiciones subyacentes. Sin embargo, si las suposiciones no se cumplen, los resultados pueden ser engañosos. Por lo tanto, es importante verificar la adecuación de las distribuciones antes de utilizar métodos paramétricos.

En resumen, la estadística paramétrica es una rama de la estadística que se basa en la suposición de que los datos provienen de una población con una distribución conocida, se utilizan parámetros para describir la población, se basan en las propiedades de las distribuciones conocidas, son precisos cuando se cumplen las suposiciones subyacentes, pero pueden ser engañosos si las suposiciones no se cumplen.

Estadística Bayesiana

La estadística bayesiana es una rama de la estadística que se basa en el teorema de Bayes para calcular la probabilidad de un evento dado otra información. En lugar de tratar de estimar parámetros poblacionales a partir de una muestra, como en la estadística paramétrica tradicional, la estadística bayesiana utiliza una distribución de probabilidad previa, conocida como distribución a priori, y la actualiza utilizando la información de la muestra, conocida como distribución a posteriori.

En estadística bayesiana, se considera la probabilidad de un evento como una cantidad que cambia con la información adicional, en lugar de tratarla como una cantidad fija. Esto permite que las inferencias se basen tanto en los datos como en la información previa disponible, lo que a menudo se conoce como el "pensamiento bayesiano".

La estadística bayesiana es utilizada en una variedad de campos, como la estimación de parámetros, la inferencia de modelos y la toma de decisiones. Aunque ha sido objeto de debate en el pasado, ha ganado cada vez más aceptación en la comunidad estadística debido a su capacidad para manejar incertidumbre y su flexibilidad en la elección de distribuciones a priori.

En resumen, La estadística bayesiana es una rama de la estadística que se basa en el teorema de Bayes para calcular la probabilidad de un evento dado otra información, se utiliza una distribución de probabilidad previa, conocida como distribución a priori, y la actualiza utilizando la información de la muestra, conocida como distribución a posteriori. Se considera la probabilidad de un evento como una cantidad que cambia con la información adicional, es utilizada en una variedad de campos y ha ganado cada vez más aceptación en la comunidad estadística.

Estadística Psicométrica

La estadística psicométrica es una rama de la estadística que se utiliza en el campo de la psicología y la educación para medir y evaluar habilidades cognitivas, conocimientos y habilidades.

Los métodos estadísticos utilizados en estadística psicométrica incluyen la construcción de test y escalas de medición, la validación y la verificación de la fiabilidad y validez de los instrumentos de medición. La estadística psicométrica también se utiliza para analizar y evaluar la estructura subyacente de los datos, como la estructura factorial y la estructura de covarianza.

Los test psicológicos y las escalas de medición son los instrumentos más comunes utilizados en estadística psicométrica para medir habilidades cognitivas, conocimientos y habilidades. Los test psicológicos pueden medir habilidades cognitivas, como la inteligencia, la memoria y la atención, y habilidades socioemocionales, como la autoestima y la ansiedad. Las escalas de medición pueden medir actitudes, intereses y opiniones.

En resumen, La estadística psicométrica es una rama de la estadística que se utiliza en el campo de la psicología y la educación para medir y evaluar habilidades cognitivas, conocimientos y habilidades, los métodos estadísticos incluyen la construcción de test y escalas de medición, la validación y la verificación de la fiabilidad y validez de los instrumentos de medición, y se utiliza para analizar y evaluar la estructura subyacente de los datos.

Estadística Experimental

La estadística experimental es una rama de la estadística que se utiliza en investigación científica y en el diseño y análisis de experimentos. El objetivo de la estadística experimental es ayudar a los investigadores a entender

cómo los factores independientes afectan a las variables dependientes, y para ayudar a los investigadores a tomar decisiones sobre la validez de las hipótesis.

La estadística experimental se basa en el diseño de experimentos, que es un método sistemático para controlar y variar factores independientes y medir el efecto de estos factores en las variables dependientes. Los métodos estadísticos utilizados en estadística experimental incluyen el análisis de varianza (ANOVA), el contraste de medias y el análisis de regresión.

Los experimentos pueden ser de dos tipos: experimentos de campo y experimentos de laboratorio. Los experimentos de campo se llevan a cabo en entornos naturales, mientras que los experimentos de laboratorio se llevan a cabo en entornos controlados. En ambos casos, la estadística experimental se utiliza para diseñar y analizar los experimentos de manera rigurosa, para controlar las variables irrelevantes y para medir el efecto de las variables independientes en las variables dependientes.

Además, la estadística experimental se usa para evaluar la validez interna y externa de los resultados. La validez interna se refiere a la medida en que el experimento mide lo que pretende medir, mientras que la validez externa se refiere a la medida en que los resultados del experimento son aplicables a otras situaciones o poblaciones.

Las **pruebas no paramétricas** son aquellas que se encargan de analizar datos que no tienen una distribución particular y se basan una hipótesis, pero los datos no están organizados de forma normal. Aunque tienen algunas limitaciones, cuentan con resultados estadísticos ordenados que facilita su comprensión.

Las **pruebas paramétricas**, en cambio, se basan en las leyes de distribución normal para analizar los elementos de una muestra. Generalmente, solo se aplican a variables numéricas y para su análisis debe mantener una población grande, ya que permite que el cálculo sea más exacto.

Seguidamente, se presentan las diferencias entre Pruebas no Paramétricas y Pruebas Paramétricas, a saber:

Pruebas no Paramétricas	Pruebas Paramétricas
Mayor potencia estadística.	Menor potencia estadística.
Se aplican en variables categóricas.	Se aplican en variables normales o de intervalo.
Se utilizan para muestras pequeñas.	Se utilizan para muestras grandes.
No se conoce la forma de distribución de datos.	Su distribución de datos es normal.
No hacen muchas suposiciones.	Hacen muchas suposiciones.
Exigen una menor condición de validez.	Exigen mayor condición de validez.
Mayor probabilidad de errores.	Menor probabilidad de errores.
El cálculo es menos complicado de hacer.	El cálculo es complicado de hacer.

Las hipótesis se basan en rangos, mediana y frecuencia de datos.	Las hipótesis se basan en datos numéricos.
Los cálculos no son exactos.	Los cálculos son demasiado exactos.
Considera los valores perdidos para obtener información.	No toma en cuenta los valores perdidos para obtener información.

Observación

Antes de aplicar las pruebas no paramétricas o las pruebas paramétricas es importante conocer aspectos como el objetivo de la investigación, el tamaño de la población y la escala que se utilizará para medir los datos.

Conclusión

Finalmente, es importante mencionar que este trabajo, es solo un ejemplo de terminología usada en la enseñanza de la estadística, obviamente hay muchos conceptos y términos, que se usan dependiendo del nivel, ámbito y enfoque de la enseñanza. Es importante destacar que al término de un curso regular de estadística es imposible lograr una alfabetización total, dado la gran cantidad de conceptos usados en estadística. Por otro lado, por lo general un curso no basta para lograr la competencia de tener “Pensamiento y Razonamiento Estadístico”.

Referencias Bibliográficas

1. Aguilar E., Guillen H., Zamora J. Alfabetización, razonamiento y pensamiento estadísticos: competencias específicas que requieren promoverse en el aula.
2. Rodríguez L., Muñiz L., Aguilar, A. El Recuento y las Representaciones Manipulativas: Los primeros pasos de la Alfabetización Estadística.
3. Moore D. Estadística Básica Aplicada.
4. Ariza E., Rouquette J., Suárez A. Relevancia de la formación Estadística en la Universidad

**Pensamiento Estadístico:
¿qué aportan las Matrices de Koestler?**

Héctor HEVIA
Universidad Alberto HURTADO
hhevia@uahurtado.cl

Resumen

No habría objeción alguna en aceptar que cada procedimiento estadístico tendría un carácter inferencial, en el sentido que aplicado a una muestra aleatoria de la población de interés, permitiría obtener conclusiones acerca de esa población. El analista de datos establece tales conclusiones interpretando en contexto los resultados estadísticos que entrega el procedimiento en cuestión. Hay, por tanto, pensamiento estadístico el cual va seguido de una interpretación que, en general, se establece en lenguaje natural; pero, ¿cómo se accede a una interpretación en el contexto de la población de interés? En este punto, pareciera recomendable disponer de un marco de referencia que entregue claridad acerca de la forma en que se establece una interpretación. Interpretar puede entenderse en términos de las posibles interacciones entre dos o más universos de discurso y, desde este punto de vista, la recopilación de experiencias en interpretación podría aportar un marco de referencia preliminar. Arthur Koestler, en “The Act of Creation”, publicado por primera vez en 1964, describe aspectos fundamentales en el estudio de las interacciones entre dos o más universos de discurso en tres campos de la actividad intelectual: el humor, las ciencias y el arte. Joseph Tal (2001), en “Reading Between the Numbers”, sugiere utilizar las propuestas de Koestler con la finalidad de desarrollar un marco de referencia adecuado para la interpretación que tiene lugar en Estadística. En este trabajo, presentamos algunos avances en esa dirección.

Palabras clave: Ciencia de los datos, Pensamiento Estadístico – Koestler – Sentido – Significado – Interpretación.

Introducción a las matrices de pensamiento de Koestler

Al parecer, habría sido Joseph Tal quien indicó, por primera vez, la relevancia de las *matrices de pensamiento* de Koestler como marco conceptual para entender cómo se realiza la interpretación de los resultados obtenidos de un cierto procedimiento estadístico aplicado a los datos de interés.

La explicación estadística ocurre cuando, para usar las palabras de Koestler, “dos matrices diferentes” de fenómenos están conectadas. Es salir de un fenómeno particular para comprenderlo. ... Esta relación de diferentes contextos entre sí es la esencia de la estadística inferencial. (Joseph Tal, 2001; p. 124)

Revisemos, en primer lugar, estas “matrices” a las que alude Tal. Arthur Koestler (1964) estudia tres dominios de la creatividad: humor, ciencias y arte, buscando aspectos comunes al acto de creación que se desarrolla en cada uno de estos tres ámbitos. Consideraciones sobre el primer dominio, permiten al autor establecer que en una situación de humor se hace presente el choque de dos contextos cuyas lógicas o códigos de comportamiento son incompatibles. En estos casos, se percibe una situación o idea L en dos marcos de referencia, M_1 y M_2 , cada uno de estos marcos consistente en sí mismo, pero, incompatibles entre sí, los cuales son actualizados en la conciencia en forma simultánea “el evento L vibra en dos diferentes longitudes de onda, como tal” (Koestler, p. 35). La situación L , no está únicamente vinculada a cada contexto por separado, sino asociada a ellos de una manera singular, sinérgica, asociación que Koestler denomina una *bisociación* (Koestler, p. 35). El acto de creación, en este caso, la creación de una situación de humor, siempre opera en más de un marco de referencia. (En Koestler, p. 35, el autor introduce una representación tridimensional para ilustrar ese choque de marcos de referencia). Las rutinas de pensamiento en un mismo marco de referencia se mencionan como de *sentido único*; en cambio, las que resultan de la intersección de dos marcos de referencia incompatibles, se denominan de *sentido doble*. Según Koestler, estas últimas actividades mentales son estados transitorios de equilibrio inestable donde el balance de las emociones y pensamientos están perturbados y que podrían jugar un rol determinante en la creación, tanto en ciencias como en arte; sin duda, en el humor.

Los marcos de referencia también son denominados por Koestler como: contextos asociativos, tipos de lógica, códigos de comportamiento, universos de discurso. Más técnicamente, *matrices de pensamiento* (o *matrices de comportamiento*)¹. En cada una de estas matrices las habilidades en el desempeño están sometidas a un control dual:

- a) Código fijo de reglas (adquiridas o innatas)
- b) Estrategia flexible guiada por las condiciones del ambiente en que se desarrolla el pensamiento o el comportamiento.

Koestler señala, en la página 39, “... en las rutinas del pensamiento disciplinado, sólo una matriz está activa en un momento”. Las habilidades mentales que se desarrollan en estos universos de discurso tienden a ser, con la práctica, más o menos automatizadas, convirtiéndose en rutinas incorporadas que se gatillan por medio de señales codificadas a través del sistema nervioso. Las matrices de pensamiento varían en flexibilidad, desde reflejos y rutinas más o menos automatizadas que permiten la elección de algunas posibles estrategias hasta habilidades de una variedad casi ilimitada; pero, todo pensamiento o comportamiento coherente está sujeto a algún código de reglas posible de ser especificado y que es el responsable de su coherencia; aun cuando este código funcione parcialmente o enteramente en niveles inconscientes de la mente, como generalmente ocurre. Por otro lado, el pensamiento que permanece confinado en una sola matriz, tiene limitaciones obvias. Una manera de escapar de estas rutinas más o menos automatizadas de pensamiento y comportamiento, son las señalizadas por flashes espontáneos de visión (insights) que muestran una situación familiar o evento bajo una nueva luz, y que inspiran una nueva respuesta. El acto bisociativo conecta matrices de experiencia previamente no conectadas, permitiéndonos ver varios planos al mismo tiempo (Ver Koestler, pp. 39 a 45).

¹ También “grillas”. Ver Koestler, página 66.

Kostler señala, en página 45: “Cuando dos matrices independientes de percepción o razonamiento interactúan una con la otra, el resultado es una colisión que termina en una risa, o en su *fusión que es una nueva síntesis intelectual*, o en su confrontación en una experiencia estética.” Precisamente, en Matemática, la percepción instantánea de un objeto matemático representado en dos sistemas matemáticos diferentes, expande el concepto de ese objeto matemático; y como ha distinguido Duval, es evidencia de un apropiado conocimiento matemático acerca de ese objeto con respecto a aquel que considera un único sistema, ya que permite discernir invariantes. El objeto matemático comienza a perfilarse en esta nueva dimensión del pensamiento, que se ha sintetizado.

Sentido, significado y pensamiento

La percepción que se tiene de la coherencia de un universo de discurso cuando a este se integra un nuevo elemento, es una confirmación de su pertinencia. Si hay confirmación, hay *sentido* en la integración de este nuevo elemento; sin embargo, este sentido queda sujeto a permanentes revisiones y, como consecuencia de alguna de estas revisiones, podrían ocurrir ajustes, modificaciones y hasta un eventual rechazo. De manera que el sentido que algo tiene, alude a su razón de ser respecto a un cierto universo de discurso; es decir, a una cierta matriz de pensamiento.²

Por otro lado, desde la fenomenología, *significado* es exclusivamente contenido. Husserl afirma, que un objeto es para la conciencia, lo que son sus significados; los cuales dicen relación directa con los contenidos de nuestra experiencia con ese objeto. Ver, por ejemplo, Ricoeur (1996, p. 133).

El *pensamiento* es el agente que enlaza los objetos del discurso proporcionando racionalidad y coherencia en un sentido general; pero, a la vez, es peculiar y específico de cada universo de discurso. Por ejemplo, el pensamiento estadístico es propio de aquellos individuos que exhiben un grado de destreza en el análisis y estudio de los datos. El pensamiento matemático, está fuertemente centrado sobre los invariantes de los objetos matemáticos y sus propiedades. Se trata de dos tipos de pensamiento de naturalezas muy diferentes, como David S. Moore (1998) lo ha destacado en “¿Should Mathematician teach Statistics?”.

Raymond Duval ha señalado lo excepcional del pensamiento matemático en relación a los otros tipos de pensamiento; sin embargo, según Duval, Piaget no habría hecho distinción alguna entre los tipos de pensamiento: “Piaget ha elaborado un modelo de construcción intelectual que es el mismo, ¡cualquiera sea la naturaleza de los conceptos!” (Duval, 2001, p. 144). Sin duda, en Matemática, los objetos del discurso no son alcanzables directamente sino, por medio de representaciones semióticas; esto hace una dramática diferencia. Pero, acorde a Piaget, existe una regularidad esencial que presenta el razonamiento en las diversas ciencias, lo que nos permitiría concluir que las diferencias en cada uno de los tipos de pensamiento serían atribuibles exclusivamente a las diferentes naturalezas de los objetos que cada ciencia estudia.

Por tanto, pensando en forma muy simple, se podría aceptar que el desarrollo del pensamiento de cada ciencia se logra, en forma efectiva, a través de la práctica de esa ciencia. Más aun, la deconstrucción de un cierto pensamiento específico no tiene por qué conducir a identificar los elementos que producen su generación. Desde esta perspectiva, se ha propuesto que los elementos que *conducen* la formación del pensamiento específico que se estudia, denominados “*drivers*” en este trabajo, corresponden a aquellos elementos que son imprescindibles en la constitución del ámbito dentro del cual se desarrolla el tipo específico de pensamiento que se estudia. El desarrollo del pensamiento en torno a estos drivers, sería condición necesaria para la formación de ese pensamiento que se busca generar. En Hevia, 2022, p. 41; el autor aplica una metodología fenomenológica, para determinar los drivers que conducen al desarrollo tanto del pensamiento estadístico como del pensamiento probabilístico. Son tres los drivers que se descubren en ese trabajo: *experimento aleatorio*, *población de las observaciones de los resultados del experimento aleatorio* y *espacio muestral del experimento aleatorio*.

² Algunas de las acepciones de la RAE, para sentido, son: “Modo particular de enfocar, de entender o de juzgar algo”, “Razón de ser, finalidad o justificación de algo”.

La Estadística como universo de discurso y el concepto de población

El pensamiento estadístico es privativo de los estadísticos; el pensamiento matemático, es propio de los matemáticos. Frecuentemente, esta comprensión de los tipos de pensamiento ha llevado a establecer afirmaciones tales como “¿Qué es estadística? Estadística es lo que los estadísticos hacen” (Tal, 2001, p. 9).

En general, cada universo de discurso requiere de un adecuado acceso y este acceso exige, en Estadística, de una definición adecuada de la *población*, la que, siguiendo a Marradi (2011, pp. 67, 68, 69) está constituida por todas las unidades de análisis en un ámbito espacio-temporal definido. Bien sabemos que la definición de esta unidad de análisis requiere de una cuidadosa reflexión, pero, una vez lograda y después de proceder a la definición de las variables (que permiten clasificar o medir los aspectos de interés en tales unidades de análisis), podemos proceder a la generación de los datos a través del muestreo. De esta forma, se constituye lo que Marradi et al. (2011, p. 67) denominan “la matriz de datos” o “matriz casos por variables” y que “es la herramienta básica del enfoque que sigue siendo estándar en ciencias sociales” (Marradi et al., 2011, p 5).³

Observar que las unidades de análisis pertenecen a una matriz de pensamiento particular a la que se accede, desde la Estadística, exclusivamente a través de la matriz casos por variables y cuyos elementos están desprovistos de toda naturaleza, salvo la numérica o categórica (en este último caso, categorías diferenciadas pero carentes de significados). Esta matriz casos por variables se integra a la Ciencia de los datos o matriz de pensamiento de la Estadística para ser comprendida desde la perspectiva del pensamiento estadístico.

Los datos son la sustancia de la que se nutren los procedimientos estadísticos. La apropiada generación de los datos queda sujeta a consideraciones metodológicas y técnicas que forman parte de la teoría del muestreo. Pero, una vez que los datos han sido generados, podemos aplicar los procedimientos estadísticos adecuados que nos permitirán inferir propiedades respecto de la población. Citando a Moore (1988, p. 3), “La estadística deriva su importancia y razón de ser de sus raíces en los datos y en la inferencia científica”.

Significado estadístico e interpretación en contexto

El *significado estadístico* que se obtiene de la aplicación de un procedimiento estadístico, pertenece al universo de discurso de los estadísticos. Los paradigmas del pensamiento estadístico toman lugar en ese orden de cosas y se expresan en lenguaje especializado; en lenguaje de expertos. Un estadístico sabe cómo escudriñar los datos y proponer diferentes procedimientos que permitirán agregar nueva información que incrementará el conocimiento que se tiene de la población. Nuevos procedimientos estadísticos emergen de las diversas ciencias aplicadas en las que existen datos disponibles. Al respecto, hay una proliferación de ejemplos.

Muchas nuevas estadísticas incluso se inventan en estos departamentos (departamentos de economía, ingeniería, psicología y en escuelas de negocios y de medicina). Debemos el análisis factorial y el escalamiento multidimensional, por ejemplo, principalmente a los psicólogos que hacen estadística. (Moore, 1988, p. 5)

Por otro lado, la *interpretación* emerge cuando un resultado estadístico se expresa en contexto; cuando el significado estadístico adquiere sentido en esa matriz de pensamiento desde donde se eligen las unidades de análisis. Por tanto, en una interpretación lo apropiado es considerar como contexto el universo de discurso; es decir, la matriz de pensamiento y no meramente la población.

Veamos un ejemplo de interpretación, utilizando el promedio aritmético. Todos sabemos cómo se calcula el promedio aritmético, pero, sus interpretaciones parecieran escasas o poco utilizadas. Se puede interpretar el promedio de un cierto número n de cantidades de la misma naturaleza, como la cantidad que reparte el total (la suma de las cantidades) en n partes iguales. Este significado del promedio es válido en cualquier orden de cosas; en particular, tanto en matemáticas como en estadística. Vamos a un contexto específico. El Instituto

³ En este caso, el término “matriz” tiene el sentido matemático de arreglo rectangular de números; en Koestler el sentido de “matriz” es “molde”, “entidad principal generadora de otras”. Ver RAE.

Nacional de Estadísticas de Chile informó, el año 2022, que el ingreso laboral promedio durante el año 2021 fue de \$681.039.- neto mensual (“líquido”). El significado estadístico de este valor llevado a contexto para su interpretación, permite entrever que este valor promedio se eleva de los ingresos menores en forma importante gracias a la contribución que ejercen los ingresos mayores y que, puesto de esta forma, hace poco sentido a un sujeto ocupado (un trabajador); salvo como una medida global, la cual es definitivamente irrelevante para él. La información de la mediana, por otro lado, la cual fue de \$457.690.- se interpreta con crudeza: 50% de quienes trabajaban en el país ese año percibieron ingresos menores o iguales a ese monto. Inmediatamente, la interpretación dada hace sentido a un sujeto ocupado (un trabajador), dado que su ingreso laboral queda localizado, para bien o para mal, dentro del espectro de los ingresos de la población ocupada.⁴

Observe como la interpretación enlaza directamente dos matrices de pensamiento; una, la matriz de pensamiento de interés, que contiene a la población, y la otra, la Ciencia de los datos a través de una “fusión que es una síntesis intelectual” (Koestler, 1964, p. 45).

La diferenciación que establecemos entre significado estadístico, el cual es atributo exclusivo del pensamiento estadístico, y la interpretación la cual involucra un sentido de sensibilidad hacia la matriz de pensamiento desde donde se han definido las unidades de análisis permite clarificar ciertos resultados. Hernández y Hevia, basándose en evidencia, han establecido la siguiente hipótesis en relación a las más conocidas medidas de tendencia central: el promedio aritmético, la mediana y la moda. En la medida que el profesor de enseñanza básica ha asimilado el significado estadístico de una de estas medidas de tendencia central, el profesor también tiene la capacidad de proporcionar ejemplos de interpretación de este estadístico en diversos contextos, y viceversa. En la medida que el profesor de básica proporciona diversos ejemplos de interpretación de una de estas medidas de tendencia central, el profesor también exhibe una comprensión satisfactoria del significado estadístico de la correspondiente medida de tendencia central. Ver Hernández, 2021. Esto sugiere que el énfasis en la formación de profesores debería estar en la significación estadística que tienen los procedimientos de la Estadística; es decir, en la formación de pensamiento estadístico a través de la manipulación de datos extraídos de un cierto contexto para la toma de decisiones. Citando a Moore, “La enseñanza satisfactoria de la ciencia de los datos requiere de experiencia con los datos.” (1988, p. 4).

Consideraciones finales

El pensamiento estadístico se desenvuelve en su propia matriz de pensamiento, en un universo de discurso que también podría denominarse “La Ciencia de los datos”. En estos términos, volvamos a establecer lo que es conocido por todos: todo universo de discurso susceptible de ser ámbito de una población, puede ser estudiado, a través de una muestra, en interacción con la matriz de la Ciencia de los datos. Una vez extraídos los datos y aplicados los procedimientos estadísticos, el éxito se basa, en parte, en la capacidad del estadístico de interpretar en contexto los resultados estadísticos obtenidos. La interacción de dos matrices de pensamiento toma lugar: La Ciencia de los datos y la matriz de pensamiento en la cual se han identificado las unidades de análisis. La disposición mental de estas dos matrices de pensamiento favorece la producción de bisociaciones, las que se traducen en nuevas síntesis intelectuales; es decir, en las interpretaciones que permitirán avanzar en el conocimiento de la población de interés en su contexto con la finalidad de contribuir favorablemente a la toma de decisiones.

Referencias Bibliográficas

Duval, R. (2001). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, Vol. 9.1, 143–168.

Hernández, L. (2021). *Concepciones de un Grupo de Profesores de Enseñanza Media sobre las Medidas de Tendencia Central; una mirada desde el Pensamiento Estadístico*. Tesis para optar al grado de Magister en Didáctica de la Matemática, Universidad Alberto Hurtado.

⁴ <https://diariosach.cl/ine-confirma-que-sueldo-promedio-de-los-trabajadores-chilenos-llego-a>

Hevia, H. (2022). La Idea de Modelo de Probabilidad de una Población. Libro digital *Cutting-edge research in mathematics and its applications*. Atena Editora DOI: 10.22533/at.ed.575221502. ISBN: 978-65-5983-957-5 <https://doi.org/10.22533/at.ed.5752215025>

Koestler, A. (1964). *The Act of Creation*. Hutchinson & Co.

Marradi, A., Archenti, N., Piovani, J. I. (2011). *Metodología de las Ciencias Sociales*. Cengage Learning.

Moore, D. S. (1988). Should Mathematicians Teach Statistics? *College Mathematics Journal*, 19, 3-7.

Ricœur, P. (1996). *A key to Husserlian Ideas I*. Marquette University Press.

Tal, J. (2001). *Reading between the numbers. Statistical thinking in everyday life*. McGraw-Hill.

.
.
.
.

Transformaciones de los registros de representación semiótica de la función lineal: un estudio con estudiantes de tercer año de la escuela secundaria

Yesica GALANTE - Vilma COLOMBANO

UTN-FR General Pacheco – Universidad Nacional de General Sarmiento

yesigalante@gmail.com - vcolomba@campus.ungs.edu.ar

Resumen

El actual Diseño Curricular de tercer año de la Educación Secundaria, propone potenciar el uso de diferentes registros de representación en la enseñanza de la función lineal, incluyendo la transformación de un registro a otro. Desde la experiencia docente, advertimos que los alumnos presentan dificultades para coordinar las diferentes representaciones, aunque se tome como base la propuesta del diseño.

Considerando lo expuesto, presentamos en este artículo un estudio realizado con estudiantes de tercer año, sobre el uso que hacen de los registros de representación de la función lineal. Como instrumento de recolección de datos diseñamos un test con consignas que involucran actividades cognitivas de tratamiento y conversión entre distintos registros. Complementamos el mismo con entrevistas al docente y alumnos.

Los resultados muestran que los alumnos están en una etapa inicial de trabajo con los distintos registros. La enseñanza priorizó el uso de los registros verbal y tabular, motivo por el cual los alumnos no tuvieron grandes inconvenientes en la conversión entre los mencionados registros como partida y el registro algebraico como llegada. Las mayores dificultades se evidenciaron en la conversión del registro gráfico al algebraico, donde la idea de pendiente resultó ser un obstáculo, no así el de ordenada al origen. En cuanto al tratamiento en el registro algebraico, los alumnos resuelven de manera aritmética, sin necesidad de recurrir a la expresión algebraica.

Palabras clave: Registros de representación semiótica – Unidades significantes – Conversión – Tratamiento – Función lineal.

Marco Teórico

El Diseño Curricular para el tercer año de la Educación Secundaria, establece que ese año representa el final de un ciclo y el prólogo del período de la finalización de la escuela secundaria, por lo tanto, se espera que los alumnos afiancen los conocimientos matemáticos construidos en los dos primeros años para sentar las bases del ciclo final. Para funciones lineales, considera prioritario continuar trabajando con los diferentes registros, sin dudas, el uso de los diversos registros de representación semiótica en un mismo objeto matemático fortalece la capacidad cognitiva del estudiante (Colombano, Formica y Camós, 2012). El Diseño Curricular propone también, la transformación de un registro a otro, y destaca como importante observar y analizar los cambios que ocurren en el registro gráfico y algebraico. Duval (2006) menciona que la importancia de las representaciones radica en su posibilidad de transformación, gracias a la cual es factible sustituir los objetos matemáticos por diferentes representaciones.

Varias investigaciones abordan el estudio del proceso de aprendizaje de la noción de función desde la perspectiva de los registros semióticos, estableciendo, en general, que su comprensión está estrechamente vinculada a las actividades de coordinación entre registros. Soto, Herrera y Pereyra (2019), en su estudio sobre funciones lineales realizado con alumnos de tercer año de la escuela secundaria, evidencian dificultades en la conversión del registro gráfico al algebraico, y observan, que las actividades de coordinación entre diferentes representaciones, no se lleva a cabo de manera natural.

Duval (2016) considera que la actividad matemática consiste intrínsecamente en la transformación de representaciones, razón por la cual, se hacen necesarias dos tipos de transformaciones de representaciones semióticas muy diferentes entre sí, el tratamiento y la conversión. Al hablar de tratamiento, hace referencia a las transformaciones de representaciones semióticas que ocurren dentro de un mismo registro, por ejemplo, resolver una ecuación, mientras que define a la conversión como una transformación de una representación semiótica de un registro en otra representación de un registro distinto sin cambiar el objeto denotado, por ejemplo, pasar del enunciado de una relación en lenguaje natural a su notación usando el lenguaje algebraico. Esta transformación es más compleja, ya que se debe conocer el registro de partida y el de llegada, y puede ser o no congruente. Duval (1998) expresa que la conversión entre dos representaciones es congruente, si, al segmentar cada una de las representaciones semióticas en sus unidades significantes, se cumplen tres criterios: correspondencia semántica entre las unidades significantes propias de cada registro (se asocia cada unidad significativa del registro de partida con una del registro de llegada), univocidad semántica terminal (cada unidad significativa del registro de partida se la relaciona con una única unidad significativa del registro de llegada) y conservación del orden de organización de las unidades significantes en las representaciones semióticas (igual orden entre las unidades significantes en las dos representaciones de los dos registros). Cabe aclarar que la conversión puede ser congruente en un sentido, pero no en el otro.

Gutiérrez Otálora y Parada Landazábal (2007), establecen que las unidades significantes son los valores que pueden tomar las diferentes variables en un registro. Es decir, para realizar una conversión se deben seleccionar los elementos significativos de la representación fuente, que pueden ser símbolos, palabras, rasgos visuales, para relacionarlos con los elementos significativos de la representación de llegada.

Cabe mencionar que consideramos en nuestro estudio, los registros de representación más utilizados en la enseñanza de las funciones y, en particular, en la función lineal: tabular, algebraico, gráfico y verbal. A pesar de que todos sirven para representar el mismo objeto de estudio, cada uno de ellos pone en función diferentes procesos cognitivos (Font, 2001).

Azcárate Giménez y Deulofeu Piquet (1996), hacen una descripción de los mencionados registros:

Registro tabular: proporciona una visión cuantitativa de la función. A pesar de ser restringido, permite descubrir regularidades entre los valores de las variables independiente y dependiente, y es de fácil interpretación.

Registro verbal: utiliza el lenguaje común para dar una visión descriptiva y generalmente cualitativa de la relación funcional.

Registro gráfico: posibilita la representación en el plano de un conjunto de puntos que muestra la relación entre las variables. Si bien proporciona una visión general y completa de la función, es necesario tener en cuenta que sólo proporciona valores aproximados, y requiere de una buena lectura e interpretación.

Registro algebraico: permite determinar las mismas características globales que el registro gráfico, pero con mayor precisión.

Descripción del estudio

El estudio se llevó a cabo con alumnos de tercer año de una escuela secundaria ubicada en la ciudad de Chivilcoy, provincia de Buenos Aires. La institución pone énfasis en el trabajo colaborativo entre docentes,

esto hace que las diferentes divisiones de un mismo año compartan el proyecto áulico y materiales de trabajo en el aula, además de mantener una comunicación continua con el docente del año anterior y posterior. El curso seleccionado está formado por 34 alumnos cuyas edades oscilan entre los 14 y 15 años. La mayoría se muestran interesados en aprender matemática, son participativos, están atentos a las intervenciones del docente y realizan las actividades solicitadas.

Nos interesa indagar sobre las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de representaciones semióticas que realizan los estudiantes sobre el concepto función lineal, luego de la enseñanza del mismo. Para ello, realizamos una entrevista a la docente, quien nos facilitó los materiales de trabajo en el aula, y diseñamos un test con tres consignas para los alumnos. Luego de un minucioso análisis de las resoluciones presentadas por 26 alumnos, se decidió entrevistar a siete de ellos. La selección se realizó en función de la riqueza de las respuestas con el objeto de profundizarlas, sobre todo las que fueron erróneas o imprecisas.

Análisis de los distintos registros de representación usados

Para llevar a cabo el análisis del uso de los diferentes registros, construimos tablas de variables y unidades significantes para cada una de las consignas del test Gutiérrez Otálora y Parada Landazábal (2007). Presentamos a continuación las consignas y sus correspondientes tablas.

- 1) La siguiente tabla representa una función lineal. Escribe su fórmula (El dominio de $f(x)$ es el conjunto de números reales. En la tabla presentada sólo se tienen en cuenta algunos valores del dominio y sus correspondientes imágenes).

X	0	1	2	3	4
f(x)	3	5	7	9	11

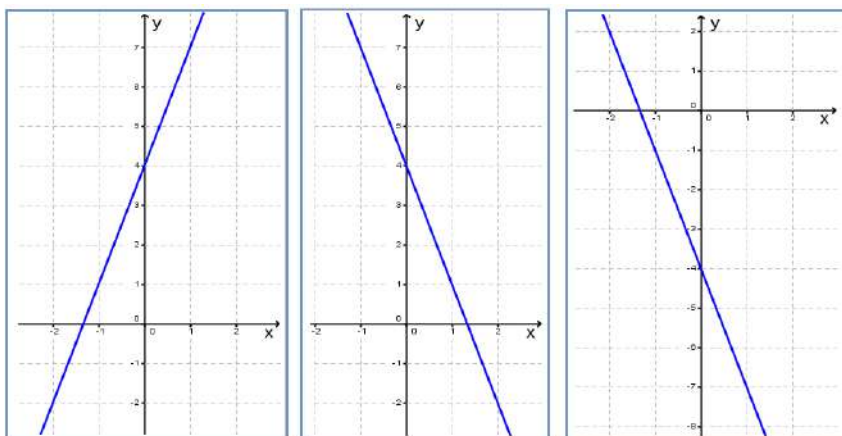
Según la teoría de Duval (2006), esta consigna pretende que el alumno realice la conversión entre el registro tabular y algebraico.

Variables del registro tabular	Unidades significantes del registro tabular	Variables del registro algebraico	Unidades significantes del registro algebraico
La relación que guardan los valores de la variable independiente.	La variación entre términos consecutivos es constante. En este caso es uno.	a	$a > 0$ En esta función $a = 2$
La relación que guardan los valores de las variables independiente y dependiente.	A medida que los valores de la variable independiente aumentan, los de la variable dependiente también. En este caso la variable dependiente aumenta dos unidades por cada unidad que aumenta la variable independiente.		
El valor que toma la variable independiente.	Cuando x es igual a cero, la variable dependiente es igual a tres.	b	$b > 0$ En esta función $b = 3$

Tabla 1. Variables y unidades significantes correspondiente la primera consigna del test.

- 2) Dadas las siguientes gráficas:
- Señala cuál de ellas corresponde a la fórmula dada. Justifica tu elección y explica las razones por las que descartas las demás.
 - Indica la fórmula correcta para las gráficas descartadas.

$$g(x) = -3x + 4$$



Esta consigna resulta más compleja, ya que consiste en dos actividades cognitivas de conversión entre registros, en el ítem a, de registro algebraico a gráfico y en el ítem b, de registro gráfico a algebraico.

VARIABLES del registro algebraico	UNIDADES significantes del registro algebraico	VARIABLES del registro gráfico	UNIDADES significantes del registro gráfico
a	$a < 0$ En este caso $a = -3$	Sentido de la inclinación de la recta.	La recta desciende de izquierda a derecha.
	$a < -1$ En este caso $a = -3$	Los ángulos de la recta con los ejes.	El ángulo formado con el eje horizontal es mayor que el formado con el eje vertical.
b	$b > 0$ En este caso $b = 4$	La posición de la recta respecto al origen del eje vertical.	La recta corta al eje y arriba del origen. En este caso corta en el punto (0;4)

Tabla 2. Variables y unidades significantes correspondientes al ítem a.

VARIABLES del registro algebraico	UNIDADES significantes del registro algebraico	VARIABLES del registro gráfico	UNIDADES significantes del registro gráfico
a	$a > 0$ En este caso $a = 3$	Sentido de la inclinación de la recta.	La recta sube de izquierda a derecha.
	$a > 1$ En este caso $a = 3$	Los ángulos de la recta con los ejes.	El ángulo formado con el eje horizontal es mayor que el formado con el eje vertical.
b	$b > 0$ En este caso $b = 4$	La posición de la recta respecto al origen del eje vertical.	La recta corta al eje y arriba del origen. En este caso corta en el punto (0;4)

Tabla 3. Variables y unidades significantes de la función lineal $g(x) = 3x + 4$ correspondiente al ítem b.

Variabes del registro algebraico	Unidades significantes del registro algebraico	Variabes del registro gráfico	Unidades significantes del registro gráfico
a	$a < 0$ En este caso $a = -3$	Sentido de la inclinación de la recta.	La recta desciende de izquierda a derecha.
	$a < -1$ En este caso $a = -3$	Los ángulos de la recta con los ejes.	El ángulo formado con el eje horizontal es mayor que el formado con el eje vertical.
b	$b < 0$ En este caso $b = -4$	La posición de la recta respecto al origen del eje vertical.	La recta corta al eje y abajo del origen. En este caso corta en el punto (0;-4)

Tabla 4. Variables y unidades significantes de la función lineal $g(x) = -3x - 4$, correspondiente al ítem b.

- 3) Diego trabaja como vendedor en una casa de electrodomésticos. Le pagan un monto fijo de \$32000 más una comisión de la quinta parte de las ventas que realiza en el mes. Responde:
- a) ¿Cuál de las fórmulas sirve para calcular el sueldo de Diego en función de la cantidad de ventas realizadas en un mes? Justifica tu elección y explica las razones por las que descartas las demás.
- $f(x) = \frac{1}{5}x - 32000$
 - $g(x) = \frac{1}{5}x + 32000$
 - $h(x) = \frac{1}{5} + 32000x$
- b) Para la expresión seleccionada en el ítem a, indica cuál es la pendiente y la ordenada al origen. ¿Qué representa ese valor para la situación planteada?
- c) ¿Cuál fue su salario del mes de mayo si el monto de sus ventas fue de \$115000? Escribe los cálculos realizados.
- d) En agosto cobró \$49500 de sueldo, ¿cuál fue el monto de las ventas realizadas? Escribe los cálculos realizados.

Esta consigna pretende la conversión del registro verbal al algebraico, y el tratamiento del registro algebraico en los ítems c y d, a partir de la ecuación seleccionada en el ítem a.

Variabes del registro verbal	Unidades significantes del registro verbal	Variabes del registro algebraico	Unidades significantes del registro algebraico
Variable independiente.	Cantidad de ventas que realiza en el mes.	Variable independiente.	X
Variable dependiente.	Sueldo de un mes.	Variable dependiente.	$g(x)$
Relación entre la variable independiente y dependiente.	Le pagan un monto fijo de \$32000 más una comisión de la quinta parte de las ventas que realiza en el mes.	$g(x) = \frac{1}{5}x + b$	$g(x) = \frac{1}{5}x + 32000$
Valor de la pendiente.	La quinta parte de las ventas que realiza en un mes.	A	$\frac{1}{5}$

Valor de la ordenada al origen.	Monto fijo de \$32000.	b	32000
---------------------------------	------------------------	-----	-------

Tabla 5. Variables y unidades significantes correspondientes a los ítems a y b.

Análisis de resultados

Para la primera consigna del test, el 65% de las respuestas fueron correctas. Sin embargo, la mayoría no explicó cómo lo hizo, debido a que no se pidió que justificaran la fórmula escrita. Esto fue considerado al momento de diseñar las entrevistas. Algunos estudiantes, colocaron los números 1 y 2 al final de las filas de la tabla (Figura 1), luego de la entrevista pudimos advertir que reconocieron la relación que guardan los valores de la variable independiente y dependiente, justificando que la variable dependiente aumenta dos unidades por cada unidad que aumenta la variable independiente, vinculando esto con la unidad significativa correspondiente en el registro algebraico.

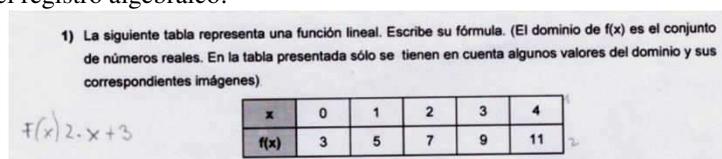


Figura 1

Todos los alumnos entrevistados, identificaron el primer valor de la tabla como el término independiente, y explicaron sin problemas que es el valor que toma la función cuando la variable independiente es cero. La consigna 2 persigue dos objetivos: reconocer el mismo objeto en registros distintos, y distinguir dos objetos en representaciones cuyos contenidos parecen semejantes porque corresponden al mismo registro. Ningún alumno recurrió al registro tabular, teniendo en cuenta puntos de la gráfica para verificar la ecuación de la recta. Para el ítem a) de un total de catorce alumnos que seleccionaron la gráfica correcta, seis no explicaron ni mostraron indicios de cómo lo hicieron. De los ocho restantes, seis dan indicios de interpretar la pendiente como variación de la variable dependiente por cada unidad de la variable independiente, mediante alguna explicación breve, o realizando marcas en el gráfico. Mostramos un caso que evidencia lo mencionado anteriormente.

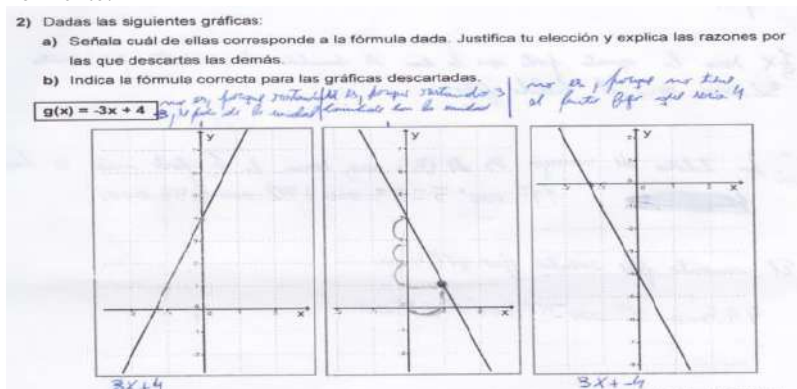


Figura 2

Cuatro de estos seis, asociaron el término independiente con la ordenada al origen. Otros dos estudiantes, advirtieron que la recta es decreciente interpretando el signo de la pendiente. En el ítem b, poco más de la mitad de los alumnos no lograron escribir al menos una fórmula que pueda ser considerada correcta. Cuatro de los que seleccionaron la gráfica correcta en el inciso anterior, escribieron bien las fórmulas de las demás funciones, que justificaron en la entrevista.

Para el caso de la consigna 3, nueve estudiantes seleccionaron la fórmula correcta y explicaron los motivos por los que descartaron las demás. Ocho de estos nueve, indicaron correctamente la pendiente y la ordenada al origen en el ítem b, contextualizándolas en la situación planteada. Advertimos que estos estudiantes relacionan las variables y unidades significantes del registro verbal con las del registro algebraico, por lo tanto, podemos concluir que realizan la conversión entre ellos.

En cuanto al tratamiento solicitado en el ítem c de la tercera consigna, de los 14 alumnos que calcularon el sueldo, solo dos reemplazaron el monto de las ventas en la fórmula seleccionada anteriormente y realizaron el cálculo para obtener el salario del mes de mayo. El resto, si bien no utilizó la expresión, dejó evidencia de relacionar la variable independiente con el monto de ventas, para obtener la comisión del mes, damos un ejemplo de ello.

c) ¿Cuál fue su salario del mes de mayo si el monto de sus ventas fue de \$115000? Escribe los cálculos realizados. $115.000 : 5 = 23000$ $23000 + 32000 = 55.000$

Figura 3

Sólo tres alumnos resolvieron correctamente el último ítem de la tercera consigna, pero ninguno utilizó la expresión para ello, la resolución fue de carácter aritmética.

Conclusiones

Si bien durante las clases trabajaron, en mayor o menor medida, todos los registros utilizados en este estudio, la consigna en la que observamos mayores inconvenientes es la segunda. Esta situación puede estar vinculada a las actividades presentadas en la clase, lo cual no les permite enfrentarse a tareas en las que tengan que comparar gráficos que pueden parecer visualmente semejantes, pero que sin embargo representan funciones diferentes. Si solicitábamos la construcción de la gráfica, tal vez, el éxito hubiese sido mayor ya que podrían haber recurrido al registro tabular y ubicar puntos en el plano. Según Duval (2016) esto conlleva a una comprensión local y no un proceso de interpretación global guiado por la comprensión de variables intervinientes. De todos modos, cuatro estudiantes lograron la conversión del registro algebraico al gráfico, descartando el tercer gráfico a partir de la ordenada al origen y, haciendo la elección correcta en vínculo con el decrecimiento de la recta (teniendo en cuenta el signo de la pendiente). Reconocieron y vincularon dos de las unidades significantes en ambos registros al relacionar el sentido de inclinación de la recta con la pendiente positiva/negativa y la posición de la recta respecto al origen del eje vertical con la ordenada al origen positiva/negativa, pero no analizaron los ángulos determinados por la recta y los ejes cartesianos (Tablas 2, 3 y 4). Observamos que la noción de pendiente generó mayores dificultades que la de ordenada al origen. Las justificaciones imprecisas dan cuenta de que la mayoría no comprendió dicho concepto y que pudieron escribir las fórmulas de los gráficos porque las rectas tienen la misma inclinación o son simétricas con respecto al eje de las ordenadas, lo que hace que las pendientes sean iguales u opuestas. Sólo un alumno realizó la conversión del registro gráfico al algebraico, reconociendo la pendiente como la variación que ocurre en la variable dependiente con respecto a una unidad de la variable independiente.

Para el caso de la consigna 3, podemos argumentar que el alto porcentaje en las respuestas correctas tiene que ver con la congruencia entre las representaciones proporcionadas. “Cuando existe una congruencia la conversión es trivial y podría ser considerada, intuitivamente, como una simple codificación” (Duval, 1998). En las otras dos consignas del test, la conversión es incongruente, por lo que no ocurre de manera espontánea. Esto se debe a que una de las unidades significantes implícitas, tanto en el registro gráfico como en el tabular, es la variación conjunta de las variables, lo que permite deducir la pendiente, mientras que en el registro algebraico es explícita. Por ello estas dos conversiones no cumplen con el tercer criterio de congruencia. En cuanto al tratamiento en el registro algebraico, ningún estudiante pudo encontrar la preimagen a partir de una ecuación, y sólo dos estudiantes reemplazaron la variable independiente para hallar un valor de la imagen. La mayoría de los que resolvieron correctamente los puntos c y d de la tercera consigna, lo hicieron de manera aritmética. Es posible que la enseñanza no se haya focalizado en el tratamiento algebraico.

La primera consigna tuvo el mayor porcentaje de respuestas correctas, distinguieron y relacionaron las unidades significantes propias de cada registro: la variación conjunta de las variables con el coeficiente a , y el valor de la función cuando la variable independiente es cero con el término independiente (Tabla 1), por lo cual consideramos que realizan la conversión entre el registro tabular y algebraico.

Estimamos que el hecho de estar en una etapa inicial en el estudio de funciones, hace que la enseñanza propicie el trabajo sobre algunos registros de representación en particular. Los estudiantes no presentaron mayores dificultades al momento de realizar conversiones donde los registros tabular y verbal son el de partida, y el registro algebraico es el de llegada, debido al trabajo en clase. Coincidimos con Peralta García (2003) al afirmar que la noción de pendiente es un obstáculo en la conversión donde el registro de partida es el gráfico y el de llegada es el algebraico. En este estudio, creemos que tuvieron menos inconvenientes al realizar la conversión porque no les hizo falta analizar la pendiente de las funciones. Sólo bastaba con relacionar el crecimiento o decrecimiento de la recta con el signo de la misma. Con respecto a los tratamientos, concordamos con Gutiérrez Otálora y Parada Landazábal (2007) en que la mayoría de los estudiantes evita realizar tratamientos algebraicos, procediendo de manera aritmética, además, notamos mayores inconvenientes para hallar un valor de una preimagen si se tiene como dato una imagen. Sostenemos que el hecho de que la situación se presente en registro verbal, beneficia a que los alumnos, conociendo las

unidades significantes, hallen los valores necesarios haciendo operaciones básicas. La transformación entre diferentes registros no es una tarea sencilla para los estudiantes, es necesario acompañar este proceso con una revisión de tareas que incluyan una variedad de registros de representación, apoyadas con la incorporación del uso de un software de geometría dinámica como GeoGebra.

Referencias Bibliográficas

- Azcarate Giménez, C. y Deulofeu Piquet, J. (1996). Funciones y gráficas. En *Matemáticas: Cultura y aprendizaje*. (Vol. 26). Síntesis.
- Colombano, V., Formica, A. y Camós, C. (2012). Enfoque cognitivista. En M. Pochulu y M. Rodríguez (comp.) *Educación matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. (pp. 115 – 152). Universidad Nacional de General Sarmiento; Universidad Nacional de Villa María.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En: F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*. (pp. 173 – 201). Grupo Editorial Iberoamérica.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143–168. <https://gaceta.rsmes.es/abrir.php?id=546>
- Duval, R. (2016). Un aprendizaje cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En R. Duval y A. Sáenz-Ludlow, *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. (pp. 61 – 94). Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Font, V. (2001). Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola. *Revista EMA*. 6(2), 180-200.
- Gutiérrez Otálora y Parada Landazábal. (2007). *Caracterización de tratamientos y conversiones: El caso de la función afín en el marco de las aplicaciones*. [Tesis de maestría]. Universidad Pedagógica Nacional. <https://www.monografias.com/trabajos-pdf4/caracterizacion-tratamientos-y-conversiones-caso-funcion-afin-marco-aplicaciones/caracterizacion-tratamientos-y-conversiones-caso-funcion-afin-marco-aplicaciones.pdf>
- Peralta García, J. (2003). *Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular y la exploración de algunas actividades didácticas diseñadas para superar estas dificultades: el caso de la función lineal*. [Tesis de Maestría]. Universidad de Sonora. <http://148.225.114.121/bitstream/unison/867/1/peraltagarciajulioxochiltn.pdf>
- Soto, M., Herrera, C. y Pereyra, N. (2019) Coordinación de Registros de Representación en el Aprendizaje de la Función Lineal. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. 15(55), 71-84. <http://funes.uniandes.edu.co/17215/1/Soto2019Coordinaci%C3%B3n.pdf>

Estudio de los errores en la resolución de inecuaciones en alumnos ingresantes al Profesorado de Matemática

Carina DUNA
Departamento de Ciencias Básicas
Universidad Nacional del Luján, Argentina
carinaduna@gmail.com

Resumen

El análisis de los errores y dificultades en el aprendizaje de la Matemática es un tema de interés desde hace mucho tiempo y en la actualidad ha cobrado especial relevancia para los investigadores en Educación Matemática. Es claro que los errores y dificultades generan preocupación en la mayoría de los docentes debido a que influyen en el aprendizaje de los diferentes contenidos.

A lo largo de este trabajo, se estudian y analizan los errores y dificultades en la resolución de inecuaciones que presentan los alumnos que ingresan al Profesorado de Educación Secundaria en Matemática del Instituto Superior de Formación Docente N° 23, Luján, Buenos Aires, tomando como herramienta teórica y metodológica la Teoría de Funciones Semióticas, la cual es utilizada por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática para el estudio de la construcción de significados de objetos matemáticos.

Para realizar dicho análisis, se diseñó una prueba diagnóstica cuyo objetivo es reconocer algunos de los conocimientos previos que ya han adquirido los estudiantes antes del inicio de los estudios de su carrera docente. Dicha evaluación consta de una serie de ejercicios de resolución de inecuaciones y desigualdades que los estudiantes debieron resolver, explicando y argumentando todas las decisiones tomadas a la hora de responder.

Posteriormente, se identifican los errores cometidos por los estudiantes para luego analizar, caracterizar y clasificarlos en función de la categorización propuesta por Radatz.

Una vez analizados los resultados de la evaluación diagnóstica, se ofrece un aporte didáctico que consiste en una serie de sugerencias metodológicas para el logro de una comprensión eficiente del objeto matemático en estudio, y que propone la implementación de tareas que impliquen el uso de diferentes sistemas de representación y permitan la articulación coherente entre ellas.

Palabras clave: Errores, Inecuaciones, Teoría de Funciones Semióticas.

1. Introducción

Aprender matemática no es tarea fácil y mucho menos lo es enseñarla. El alumno que ingresa a una carrera docente no sólo aprenderá contenidos nuevos, sino que también aprenderá a enseñarlos, y por eso es fundamental reflexionar sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En mi experiencia como docente de primer año del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática (PESM), he podido observar errores y dificultades en la resolución de problemas en general y de inecuaciones en particular. Ello ha motivado a estudiar, analizar y reflexionar sobre dichos errores con la finalidad de ofrecer una serie de sugerencias metodológicas que inviten a recapacitar sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje respecto de la resolución de inecuaciones, contribuyendo al desarrollo del pensamiento reflexivo, al acrecentamiento de la claridad conceptual y al aprendizaje significativo, teniendo en cuenta que dicho contenido es transversal prácticamente a toda la carrera.

2. Desarrollo

Al inicio de una carrera de nivel superior, como puede ser el PESH, muchos estudiantes encuentran grandes dificultades en el aprendizaje de la matemática, particularmente, en el aprendizaje de las inecuaciones. Por ello, resulta interesante para el profesor conocer y estudiar los errores básicos cometidos por los alumnos, dado que esta tarea provee de información sobre la forma en que los estudiantes aprenden.

Numerosas investigaciones han abordado el estudio de las dificultades y errores cometidos en la resolución de inecuaciones en los distintos niveles del sistema educativo. Entre ellas podemos mencionar a Heredia y Palacios (2014) quienes presentaron reflexiones, elementos conceptuales y metodológicos para posibles propuestas didácticas hacia maestros en formación y en ejercicio, en relación a la enseñanza y el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones lineales. Vargas (2013) estableció algunos de los errores más frecuentes que cometen los alumnos al resolver ejercicios sobre inecuaciones y a partir de la revisión de algunos documentos y bibliografía presentó algunas ideas para la implementación de una propuesta. Torres (2013) profundizó la relación entre el uso de los registros gráfico y algebraico y el éxito alcanzado al estudiar los temas de funciones e inecuaciones, analizando los conflictos semióticos que surgen al estudiarlos. Sánchez (2012) detalló la elaboración, aplicación y análisis de resultados de una secuencia didáctica orientada a superar las dificultades que tienen los estudiantes tanto en la comprensión de los procesos de resolución de inecuaciones cuadráticas como en la resolución de problemas que requieren el uso de este objeto matemático. Borello y Lezama (2009) realizaron un estudio acerca de las desigualdades a partir de las prácticas didácticas del profesor cuyo objetivo fue ofrecer herramientas metodológicas y didácticas que ayuden a los maestros en su quehacer cotidiano. Barbosa (2003) expuso un conjunto de construcciones mentales que pueden desarrollar los alumnos universitarios a fin de que entiendan el concepto de inecuaciones; Garrote et al (2004) llevaron a cabo una investigación con el objeto de describir y analizar algunos errores y dificultades de los alumnos del primer curso de bachillerato de las modalidades tecnológico y ciencias de la naturaleza y la salud en el aprendizaje de las inecuaciones.

Algunas de estas investigaciones coinciden en que la enseñanza de las inecuaciones se reduce a tareas mecánicas y no de apropiación del contenido semántico de inecuaciones, como también apuntan al establecimiento de relaciones entre los diferentes sistemas de representación semiótica de las desigualdades. Por ello, es importante abordar la enseñanza de las inecuaciones desde distintos sistemas de representación pues se considera que este hecho podría ayudar a reducir los errores cometidos en la resolución de inecuaciones promoviendo así un aprendizaje más reflexivo.

2.1. ¿Por qué estudiar los errores?

El análisis de los errores y dificultades en el aprendizaje de la Matemática es un tema de interés desde hace mucho tiempo y en la actualidad se ha vuelto un tema relevante para los investigadores en Educación Matemática. Es evidente que estos errores y dificultades generan preocupación en la mayoría de los docentes debido a que éstos influyen en el aprendizaje de los diferentes contenidos. Por ello, es necesario que se estudien y analicen los errores y dificultades que presentan los alumnos al ingresar, en este caso, al PESH, dado que este análisis servirá a los docentes para organizar estrategias que apunten a lograr un aprendizaje más significativo y reflexivo.

Algunos investigadores y docentes coinciden que, en general, lo que más preocupa es la persistencia y la masividad con la que se presentan los errores y es claro que esto influye en el aprendizaje de los diferentes contenidos. Por ende, resulta imprescindible que los estudiantes los reconozcan y asuman la necesidad de superarlos a fin de obtener logros de aprendizaje. Por tales razones, muchos investigadores en Educación Matemática sugieren que se diagnostiquen y se traten seriamente los errores. Tal es el caso de Pochulu (2009) quien sugiere que los errores se comenten con los alumnos, que se pueda discutir con ellos aquellas

concepciones erróneas para luego poder brindarles propuestas y situaciones que les permitan ajustar sus ideas. En esta misma línea, Engler et al. (2004) sostienen que:

El protagonismo que como docentes le damos al error y la forma en que trabajamos con él influyen en el aprendizaje y en el rendimiento académico de nuestros alumnos. Si pretendemos aprendizajes significativos es prioritario el conocimiento y el tratamiento del tema en conjunto, docentes y alumnos. (p. 23)

Por ello, se considera que el análisis de los errores no sólo sirve para mejorar el proceso de aprendizaje, sino que también ayuda al personal docente en la selección, creación y organización de estrategias orientadas al logro de una mejor educación. En este sentido, detectar las dificultades, los errores y accionar sobre ellos permite evaluar los contenidos para que cada alumno pueda identificar sus dificultades para luego intentar superarlas y así poder lograr nuevos aprendizajes y retroalimentar los conocimientos ya adquiridos.

Es así que analizar los errores que cometen los alumnos en el proceso de aprendizaje y, en el caso puntual de este trabajo, en la resolución de inecuaciones, brindará información valiosa acerca de cómo los alumnos, futuros docentes de matemática, construyen el conocimiento matemático. Además, permite constituir una herramienta para registrar el estado de conocimiento de los alumnos que ayudará a analizar el proceso de enseñanza y aprendizaje a fin de mejorar los resultados.

2.2. Clasificación de los errores

Existe una gran cantidad de motivos de la aparición y persistencia de los errores en el aprendizaje de las matemáticas. Es por eso que resulta necesario avanzar en el estudio del origen y causas posibles de los errores cometidos por los estudiantes a fin de tener una explicación general de cada error o de los errores cometidos por cada alumno de manera tal que se pueda actuar sobre ello. Aunque no se debe perder de vista que las dificultades se deben, entre otras cosas, a las distintas variables que interactúan en el proceso educativo.

En cuanto al origen de los errores, tanto Davis (1984) como Pozo y Gómez (2006) afirman que los errores no son producto del azar, sino que aparecen como consecuencia de conocimientos adquiridos previamente y es posible predecir ciertos patrones comunes de errores y dificultades que se presentan de forma similar en distintos estudiantes. Es claro que la aparición de estas dificultades emerge de un marco conceptual consistente, y todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores y dificultades debido a diversas causales, algunas de las cuales se presentan reiteradas veces y otras son inevitables. En esta misma línea, Socas (2007) sostiene que los errores no surgen de manera accidental, sino que los estudiantes recurren a experiencias anteriores en matemática y emplean estrategias y reglas personales en la resolución de problemas. Generalmente se acepta que muchos alumnos tienen una actuación aparentemente satisfactoria, pero es muy probable que oculten serios errores operacionales, estructurales y procesales de los objetos matemáticos que dificultan los aprendizajes subsiguientes. Pochulu (2009) afirma que las dificultades que pueden tener los alumnos al abordar los contenidos de Matemática que se presentan en el nivel medio no son triviales, y requieren de mucho tiempo para su apropiación y consolidación. También expresa que no se debe pasar por alto que las oportunidades que tienen los estudiantes de aprender matemática dependen mucho del entorno, del tipo de tareas, de la formación y experiencia previa, etc. De estas oportunidades y otros factores dependerá lo que aprenden y cómo se implican en las actividades matemáticas y las actitudes que tienen hacia esta ciencia.

En el ámbito educativo, cualquiera sea el nivel, los errores aparecen permanentemente en las producciones de los alumnos. Del Puerto et al. (2006) sostienen que las dificultades que se presentan son de distinta naturaleza, gestadas durante el proceso de aprendizaje, y se conectan en redes complejas que lo obstaculizan. Estos obstáculos suelen manifestarse en la práctica en forma de respuestas equivocadas. Los errores sistemáticos propician la creación de patrones de comportamiento equivocados en la ejecución de las tareas. Son patrones consistentes de errores. Algunos investigadores como Miranda (2007) y Del Puerto et al. (2006) los han diferenciado en dos niveles:

- Nivel individual: las personas muestran gran regularidad en su modo de resolver ejercicios y problemas similares.
- Nivel colectivo: distintas personas cometen errores semejantes en determinadas etapas de su aprendizaje.

Dadas estas regularidades con las que suelen presentarse los errores, es que varios autores han realizado clasificaciones de los mismos en el aprendizaje de la matemática, ya sea por su naturaleza, su posible origen o su forma de manifestarse; con el propósito de crear esquemas para la interpretación. Algunas de las clasificaciones más importantes fueron realizadas por Radatz (1979); Davis (1984); Movshovitz-Hadar et al.

(1987); Socas (1997), Astolfi (2004), entre otros. Para este trabajo, se ha utilizado la clasificación propuesta por Radatz (1979) que parte del procesamiento de la información y establece cinco categorías generales: *Errores debido a la dificultad del lenguaje; Errores debido a dificultades para obtener información espacial; Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos; Errores debido a la rigidez de pensamiento y Errores debido a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.*

3. Metodología

La investigación propuesta tiene un balance teórico y experimental, donde se complementan el estudio y análisis del estado del arte en cuanto al estudio de los errores en matemática y particularmente en la resolución de inecuaciones, con el diseño experimental de situaciones donde se busca indagar sobre la forma en que estudiantes que ingresan al Profesorado de Matemática son capaces de resolver distintos tipos de inecuaciones. Dicha indagación tiene por objeto identificar las dificultades que tienen los alumnos y analizar los errores que cometen en la resolución de inecuaciones para luego ofrecer una propuesta de enseñanza que intente remediar dichas dificultades y propender a un aprendizaje significativo.

Luego de analizar las investigaciones previas relacionadas con el análisis de las dificultades y errores cometidos por estudiantes de diferentes niveles educativos en el aprendizaje de la matemática, se procede a la elaboración de la prueba diagnóstica. Ésta tiene como objetivo reconocer algunos de los conocimientos previos y construcciones mentales que ya han adquirido los estudiantes antes del inicio de los estudios de su carrera docente. Las actividades propuestas en la evaluación diagnóstica involucran la puesta en juego de las capacidades vinculadas con la producción y la comunicación de la información dado que deben explicar y argumentar durante el proceso de resolución y es por ello que constituyen información relevante sobre los procesos de conceptualización de los alumnos. Los aspectos matemáticos fundamentales que se pretenden indagar con esta evaluación diagnóstica son los siguientes:

- La definición de desigualdad y su aplicación.
- Interpretación de desigualdades numéricas y su representación en la recta real.
- La traducción del lenguaje coloquial al lenguaje algebraico.
- La resolución algebraica de inecuaciones lineales con una sola incógnita mediante el uso de propiedades algebraicas y de orden de los números reales.
- Análisis de las soluciones de distintos tipos de inecuaciones lineales.
- Resolución de inecuaciones cuadráticas.
- Resolución de inecuaciones racionales vinculando la resolución de las inecuaciones con el estudio de las desigualdades a través del análisis gráfico de funciones.

Las consignas propuestas para dicha evaluación son las siguientes:

EJERCICIO 1: Sabiendo que k es un número real, escribir la siguiente afirmación mediante expresiones matemáticas:

- a) “ k es menor o igual que -1 y mayor que -3 ”
- b) Mencionar al menos 4 valores de k que hagan verdadera la expresión anterior.
- c) Representar gráficamente todos los posibles valores de k que cumplen con la condición anterior.

EJERCICIO 2: Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación: $2(x - 3) > 5x + 9$

EJERCICIO 3: Dada la siguiente inecuación: $4 - 2(3 - x) < 7 - 2(1 - x)$

- a) ¿Existe al menos un número real que la verifique?
- b) Hallar el conjunto de números reales que verifica la inecuación.

EJERCICIO 4: Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación: $x^2 - 5x > -6$ y verificar para algunos elementos del conjunto.

EJERCICIO 5: Sean las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = 1$

- a) Graficar ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos.
- b) ¿Para qué valores de x se tiene que $f(x) = g(x)$?
- c) Hallar analíticamente todos los valores de x para los cuáles $f(x) < g(x)$. Verificar gráficamente las soluciones halladas.

EJERCICIO 6: Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación: $\frac{x-2}{x+1} > 2$. Verificar para al menos 3 elementos del conjunto solución.

Esta evaluación diagnóstica proporcionará datos para diseñar una propuesta en función del punto de partida real del grupo con el que se va a trabajar y prever la realización de modificaciones en esa planificación con la intención de mejorar los aprendizajes.

Una vez realizada la actividad de diagnóstico se procede al análisis cualitativo de los resultados. Este análisis consiste en verificar el grado de conocimiento que los alumnos poseen sobre inecuaciones y, sobre todo, en identificar los errores y dificultades presentadas durante la resolución. La información obtenida será el punto de partida para la elaboración de las sugerencias didácticas.

4. Resultados obtenidos

Una vez implementada la evaluación diagnóstica, se procedió al análisis de los resultados y se llevó a cabo la corrección de los seis ejercicios propuestos. Esta primera corrección arrojó resultados que fueron agrupados en cuatro categorías referidas a la correcta o no resolución de los mismos. De dicho análisis, se obtuvieron los siguientes resultados principales:

- Respecto del Ejercicio 1, que esencialmente consistía en escribir una expresión utilizando simbología matemática, se observó que la mayoría de los estudiantes resolvió bien esta actividad y el 25% procedió mal. Sin embargo, todos pudieron trabajarla en alguna escala, es decir, no se observaron casos en los que el ejercicio planteado no se haya resuelto.
- En cuanto al Ejercicio 2 que consistía en resolver una inecuación lineal, más de la mitad de los estudiantes resolvieron mal la inecuación mientras que casi el 30% de los casos procedieron bien, pero respondieron mal. Tan sólo un alumno resolvió correctamente este ejercicio y se observaron dos casos en los que la actividad no fue resuelta.
- Respecto del Ejercicio 3 que proponía resolver una inecuación lineal cuya solución era el conjunto de los números reales, el 40% aproximadamente resolvió mal la inecuación mientras que el 32% resolvió relativamente bien el ejercicio, pero respondiendo mal o bien, omitiendo la respuesta. Sólo dos casos resolvieron bien la inecuación y el número de casos en los que el ejercicio no fue resuelto aumentó notoriamente respecto de los anteriores.
- Para el Ejercicio 4, en el que debían resolver una inecuación cuadrática, el porcentaje de estudiantes que dejó el problema sin resolver fue de casi el 50%. Respecto al otro 50%, si bien intentaron resolverlo, dejaron el ejercicio inconcluso o lo resolvieron mal.
- Tanto el Ejercicio 5 como el Ejercicio 6 consistían en resolver una inecuación racional y representar gráficamente las funciones que formaban parte de la inecuación. En ambos casos, el número de estudiantes que dejó el ejercicio sin resolver superó el 50%. Los pocos alumnos que intentaron abordar estos ejercicios cometieron errores no sólo en la representación gráfica sino también al momento de resolver la inecuación racional, pues al despejar la variable omitieron estudiar el signo de una expresión algebraica por la cual multiplicaron ambos miembros de una desigualdad.

Se observó que a partir del Ejercicio 4 el número de alumnos que no respondió a las consignas aumentó notoriamente con respecto a los primeros tres ejercicios, aunque no se presentaron casos de producciones con los seis ejercicios totalmente sin respuesta.

Ya con esta información, se continuó con un análisis más detallado de los errores, es decir, se buscó detectar qué tipo de errores fueron los cometidos en cada uno de los ejercicios propuestos, para luego agruparlos en distintas categorías. Para este trabajo se utilizó la clasificación de errores propuesta por Radatz (1979). La elección de esta clasificación se basó en el hecho de que se considera una de las categorizaciones más relevantes y es una de las que mejor se ajusta a este trabajo dado que puede llevarse a cabo sobre los resultados obtenidos de la implementación de una prueba diagnóstica.

Del análisis detallado de los errores cometidos por los estudiantes en la resolución de los ejercicios propuestos en la actividad de diagnóstico, surgieron quince tipos de errores que posteriormente se agruparon en las categorías propuestas por Radatz (1979). Los errores más relevantes, agrupados ya en categorías, fueron los siguientes:

- Respecto de la primera categoría de errores definida como “*Errores debido a la dificultad del lenguaje*”, los tipos de error encontrados fueron: mal uso de las expresiones matemáticas, error en la lectura de símbolos, error en la escritura del conjunto solución y mala interpretación de los resultados. Para este caso, el mayor número de casos observados fue respecto a la mala escritura del conjunto solución seguido de una mala interpretación de los resultados.
- Los tipos de errores ubicados en la categoría “*Errores debido a dificultades para obtener información espacial*”, fueron: error al ubicar los resultados en la recta numérica, graficar mal las funciones y no graficar las funciones. Se observó que la mayor cantidad de errores se encontró en la ubicación de los resultados en la recta numérica seguido de errores relacionados con la gráfica de funciones.

- En la categoría “*Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos*”, se encontraron los siguientes tipos de error: no invertir el sentido de la desigualdad cuando multiplican o dividen por un número negativo, errores en el despeje y/o en las operaciones, dividir por cero al despejar la variable y multiplicar ambos miembros por la expresión algebraica que figura en el denominador, pero sin tener en cuenta el signo. Para este caso, fue notoria la cantidad de casos observados en cuanto a errores de operatoria y/o despeje.
- Para la categoría “*Errores debido a la rigidez de pensamiento*”, se encontraron dos tipos de errores: intentar resolver el problema como si se tratase de una ecuación y encontrar soluciones de la ecuación cuadrática con la fórmula resolvente, pero sin decir cuál es el conjunto solución. Aquí se observó que la mayor cantidad de casos estuvo relacionada con las soluciones de una ecuación cuadrática. Los estudiantes no supieron cómo vincular los resultados obtenidos con la respuesta que debían dar en el Ejercicio 4.
- Por último, para la categoría “*Errores debido a la aplicación de estrategias irrelevantes*”, los tipos de error hallados fueron: a partir de un caso particular generalizar las soluciones y estudiar la desigualdad por casos de manera incorrecta. En esta categoría observaron dos casos para el primer tipo de error y tan sólo uno para el segundo.

Al finalizar este estudio, se observaron dos cuestiones relevantes. La primera de ellas es que todos los abordajes realizados por los estudiantes fueron meramente algebraicos, dado que no hubo casos donde el alumno se apoyase en un gráfico para resolver alguno de los ejercicios. La segunda cuestión fue que todos los ejercicios en los que se pedía la representación gráfica han sido mal resueltos o estaban incompletos, ya sea porque la mayoría de los estudiantes manifestaron no saber graficar o porque quienes sí graficaron, lo hicieron de manera errónea.

5. Sugerencias Metodológicas

En función de los errores detectados y analizados en la evaluación diagnóstica, se propone una secuencia de actividades cuya finalidad es la de abordar cada actividad integrando los enfoques algebraico y gráfico para así lograr mejorar la comprensión del objeto matemático en estudio. Con dicha propuesta se espera que el alumno sea capaz de:

- abordar la resolución de inecuaciones relacionando los conceptos teóricos estudiados previamente;
- dadas dos funciones, plantear una desigualdad entre ellas y resolver la inecuación transformándola en otras equivalentes utilizando las propiedades algebraicas y de orden estudiadas con anterioridad;
- interpretar una inecuación planteada como una comparación entre funciones;
- utilizar el marco funcional para poder visualizar las situaciones planteadas;
- utilizar el análisis de las funciones estudiadas como herramienta para la resolución de una inecuación;
- vincular el conjunto de positividad o negatividad de una función con la resolución de la inecuación;
- hallar e implementar estrategias de resolución de inecuaciones cuadráticas;
- hallar estrategias de resolución de inecuaciones racionales;
- implementar mecanismos de verificación, asignando a la variable diversos valores que hagan que las desigualdades resulten verdaderas o bien falsas;
- integrar todo el trabajo realizado para construir el conjunto solución. Reflexionar sobre lo trabajado.

Se sugiere el abordaje del concepto de inecuación desde dos perspectivas que provienen de diferentes construcciones mentales. La primera consiste en la inecuación vista como un objeto matemático manipulable en el que deben emplearse determinadas propiedades del conjunto de los números reales, como ser, operar, analizar equivalencias, verificar elementos de un conjunto o subconjuntos que satisfacen o no la inecuación, es decir, se debe analizar qué tipos de transformaciones son permitidas, qué alteraciones sufrió el conjunto solución después de ellas, cuál es el mejor método para resolver una inecuación dada y cómo minimizar los cálculos. La segunda, en la que la inecuación es analizada desde el punto de vista gráfico tratando de entender qué funciones pueden ser utilizadas para que el esbozo gráfico represente la inecuación que se quiere resolver, cuándo se deben comparar dos gráficos dados analizando los signos de las imágenes, o bien estudiar alguna característica de otra función que resulte de una inecuación equivalente a las anteriores. La finalidad de la propuesta es la de lograr que el estudiante explore los registros algebraico y gráfico, para que pueda comprender e interpretar el problema con dos posibles miradas diferentes y así entienda bajo qué condiciones puede transformar una inecuación, las razones por las cuales tales transformaciones son convenientes y por qué funcionan. Es decir, que se apunta a que los alumnos tomen conciencia de la legitimidad de las transformaciones empleadas para obtener inecuaciones equivalentes más simples y puedan

establecer relaciones entre ellas. Además, el enfoque gráfico ayuda a que los estudiantes puedan contar con otro soporte que les permita afirmar o refutar lo que han construido algebraicamente, debido a que la visualización es una herramienta potente para lograr dicho fin.

6. Conclusiones

Analizados ya los resultados y teniendo mayor claridad acerca de cuáles fueron las dificultades que presentaron los estudiantes, se ofreció una serie de actividades con sugerencias metodológicas que invitan a replantear la manera de enseñar y de aprender estos temas, sobre todo porque estos estudiantes serán profesores de matemática que también deberán enseñar inecuaciones en la escuela secundaria. El objetivo entonces es lograr disminuir los posibles errores que los alumnos cometen en relación a este objeto matemático. Por ello, se diseñó una serie de actividades que integran muchos de los contenidos trabajados en el espacio curricular donde se llevó a cabo esta experiencia, haciendo hincapié en las ventajas que ofrece el enfoque gráfico a la hora de resolver inecuaciones.

El trabajo realizado develó la necesidad de ofrecer a los estudiantes, en este caso que ingresan a una carrera docente, herramientas que le permitan llevar a cabo un proceso de resolución de inecuaciones de una manera más simple, integral y fluida con el objetivo de garantizar un aprendizaje efectivo, con clara aprehensión de conceptos y minimización de errores. Considero que es importante que se estimule la reflexión en cuanto a los errores cometidos, como así también a contrastar distintas maneras de resolución, elegir estrategias y poder visualizar las distintas situaciones planteadas, pensar en problemas equivalentes a los dados, etc. A su vez, esto ofrece un abanico de posibilidades en torno a la resolución que apunta a minimizar los errores y permite a los estudiantes adquirir herramientas de argumentación y validación de los resultados cuya finalidad es mejorar la comprensión del estudio de, en este caso, las inecuaciones.

El propósito de este trabajo no sólo fue estudiar y analizar los errores cometidos por los estudiantes en torno a la resolución de inecuaciones, sino también ayudar a que el docente reflexione junto a sus alumnos sobre los errores cometidos en relación a la resolución de inecuaciones y también a los diferentes objetos matemáticos que estarán presente a lo largo de toda su estadía en el profesorado y en su futura vida profesional.

Referencias Bibliográficas

- Barbosa, K. (2003). *La enseñanza de inecuaciones desde el punto de vista de la teoría APOE*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6 (3), 199- 219.
- Borello, M., y Lezama, J. (2009). *Hacia una resignificación de las desigualdades e inecuaciones a partir de las prácticas del profesor*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, (24), 921–929. Descargado de <https://www.clame.org.mx/documentos/alme24.pdf>
- Davis, R. (1984). *Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education*. Greenwood Publishing Group.
- Del Puerto, S., Minnaard, C. L., y Seminara, S. (2006). *Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas*. Revista Iberoamericana de educación, 38 (4), 1-13. doi: 10.35362/rie3842646
- Engler, A., Gregorini, M. I., Müller, D., Vrancken, S., & Hecklein, M. (2004). *Los errores en el aprendizaje de matemática*. Premisa, 23, 23-32.
- Garrote, M., Hidalgo, J., y Blanco, L. (2004). *Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones*. Suma, 46, 37-44.
- Heredia, M., y Palacios, M. A. (2014). *Las inecuaciones lineales en la escuela: algunas reflexiones sobre la enseñanza a partir de la identificación de dificultades y errores en su aprendizaje* (Tesis de Licenciatura, Universidad del Valle). Descargado de <https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/7743>
- Miranda, V. C. (2007). *Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 3 (11), 19-57.
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., y Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for research in mathematics Education*, 18 (1), 3-14. doi: 10.2307/749532
- Pochulu, M. (2009). *Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad*. Colección Digital Eudoxus, (8).
- Pozo, J., y Gómez, M. (2006). *Aprender y enseñar ciencia*. Ediciones Morata.
- Radatz, H. (1979). *Error analysis in mathematics education*. Journal for Research in mathematics

- Sánchez, N. N. (2012). *La resolución de problemas con inecuaciones cuadráticas: una propuesta en el marco de la teoría de situaciones didácticas* (Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú). Descargado de <http://hdl.handle.net/20.500.12404/1641>
- Socas, M. (1997). *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria*. *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 125-154.
- Socas, M. (2007). *Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico*. XI Simposio de la SEIEM, 19-52. Descargado de <https://www.seiem.es/pub/actas/index.shtml>.
- Torres, A. (2013). *Aplicación del enfoque gráfico en la enseñanza de inecuaciones: Una revisión de la experiencia didáctica desde la perspectiva ontosemiótica*. *El cálculo y su enseñanza*, 4, 83–102.
- Vargas, A. P. M. (2013). *Propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales*. *Revista educación*, 37 (2), 1–16.

Análisis matemático y didáctico de un recurso: el problema de la zona despejada

Nicolás ROSBACO⁽¹⁾, Verónica PARRA⁽²⁾, Patricia SUREDA⁽²⁾

(1) C.U.R.Z.A (Centro Regional Zona Atlántica - Universidad Nacional del Comahue),
Argentina

(2) CONICET, Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA, Argentina

nicolasrosbaco@curza.com.ar

vparra@exa.unicen.edu.ar

psureda@exa.unicen.edu.ar

Resumen

Este trabajo (que forma parte de uno más amplio, correspondiente a una tesis de grado) propone, describe y analiza un tipo particular de recurso que, no es nada más ni nada menos, que un problema matemático. Se utiliza la aproximación documental de lo didáctico, específicamente las nociones de *recurso*, *transparencia*, *visibilidad* e *invisibilidad* de un recurso como marco conceptual. Se presentan: el problema, algunas de sus posibles variantes, y su potencialidad en términos de saberes matemáticos a abordar y de recursos informáticos (libres) a utilizar: wxMaxima (programa destinado a la realización de operaciones algebraicas y aritméticas) y GeoGebra (programa empleado con el propósito de graficar funciones). Mostramos cómo el uso genuino de ambos permite abordar este problema a partir de ciertos saberes matemáticos que, de otra forma, no sería posible estudiar en un aula. Realizamos, además, un breve análisis en términos de transparencia, visibilidad e invisibilidad de esos recursos digitales. Se trata de un problema que los profesores pueden utilizar para provocar oportunidades de enseñanza en el estudio de funciones en una, dos o más variables y si se quiere también, permite el estudio de funciones poco convencionales (salir de los paraboloides, de las sillas de montar, que recurrentemente aparecen en los textos), estimulando a los profesores hacia la incorporación de nuevos recursos para el trabajo matemático escolar en el aula.

Palabras clave: Resolución de problemas, recurso, transparencia, visibilidad, invisibilidad.

Introducción

La palabra “recursos” en el área de la educación matemática constituye una noción con diversas acepciones. Hay autores que distinguen entre medios, recursos, materiales y contextos que los profesores utilizan para enseñar matemática (Castro, Velásquez-Echavarría, López-Sora, 2021). Hay también diferentes consideraciones sobre los usos genuinos de estos “recursos” en los procesos de enseñanza/aprendizaje, tanto del lado de los estudiantes como del lado de los profesores. Un uso genuino de un recurso es, a nuestro criterio, aquel que de no tenerlo dentro del proceso de enseñanza/aprendizaje, la construcción de un determinado saber o saberes o, más aún, la conceptualización por parte de los estudiantes de un campo de conocimientos o una parte de él no hubiera sido posible. Un ejemplo cercano y bien pragmático de esto lo aportó la pandemia. En ese contexto, no tan lejano, la única mediación entre profesores, estudiantes y saber fueron recursos de tipo tecnológicos/digitales. Otro ejemplo, tal vez más habitual es GeoGebra. La pregunta que nos formulamos aquí es ¿qué tipo de uso hacemos los profesores y los estudiantes de este software? ¿Es un uso “maquillado”, es decir; un uso como una aplicación de algo que ya se estudió? o ¿acaso es un uso vital en términos de que sin la presencia del GeoGebra tal saber o la manera de aprender ese saber no hubiera sido posible?

Estos cuestionamientos sobre los recursos y sus usos nos remiten a pensar en la aproximación instrumental de Rabardel (1995). Este enfoque, proveniente del campo de la didáctica profesional (Rabardel, 1995), adopta entre otras nociones claves, la de artefacto, esquema de uso, instrumentos, procesos de instrumentalización y de instrumentación, y las implicancias que pueden tener en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Rabardel (Ibid.) define un instrumento como la combinación entre un artefacto y un esquema de uso de ese artefacto. En consecuencia, un mismo artefacto puede disponer de diferentes esquemas de uso y entonces, dar por resultado diferentes instrumentos. Y es aquí donde ubicamos la problemática de los usos genuinos de lo que consideramos un recurso. Rabardel (1999) aseguraba que los instrumentos eran considerados, erróneamente, como simples auxiliares, neutros, en la construcción de saberes. Afirmaba además que los instrumentos tenían un doble uso en educación: del lado de los estudiantes y del lado de los profesores. Para los primeros, en términos de influencias profundas de los instrumentos en la construcción del saber y en los procesos de conceptualización. Para los profesores, implicancias de los instrumentos considerados como variables potentes sobre las que pueden actuar para el diseño y control de situaciones de enseñanza. Se presenta aquí la idea de *mediación instrumental* como un concepto central en la construcción del saber.

Siguiendo esta línea, adoptamos la noción de recurso proveniente del enfoque documental de lo didáctico (ADD) (Gueudet y Trouche, 2008). Este enfoque, que describiremos en la sección correspondiente al marco teórico, toma sus bases en el enfoque instrumental, considerando en vez de artefactos e instrumentos a los recursos y documentos. Un documento es definido en el ADD como el resultado de al menos un recurso (Adler, 1998) y de al menos, un esquema de uso (Vergnaud, 1990) de ese recurso. Nos proponemos presentar en este trabajo un tipo particular de recurso que, no es nada más ni nada menos, que un problema matemático. Formulamos el problema, algunas de sus posibles variantes, su potencial en términos de saberes matemáticos a abordar y de recursos digitales a utilizar. Mostramos cómo el uso genuino de recursos digitales permite abordar este problema a partir de ciertos saberes matemáticos que, de otra forma, no sería posible. Realizamos, además, un breve análisis en términos de transparencia, visibilidad e invisibilidad (Adler, 1999) de esos recursos digitales. Se trata de un problema dirigido a los usos por parte de los profesores, que puede provocar oportunidades de enseñanza no sólo del *estudio de funciones en una, dos o más variables* sino también, conducir al estudio de funciones poco convencionales (salir de los paraboloides, de las sillas de montar, que recurrentemente aparecen en los textos), estimulando a los profesores hacia la incorporación de nuevos *recursos* para el trabajo matemático escolar en el aula. El problema matemático que se analizará supone una dificultad de operatoria algebraica y aritmética que lo convertiría en inapropiado (por poco *económico*). Sin embargo, esta dificultad constituye también una gran oportunidad: la de incorporar a las prácticas de estudio y de enseñanza *recursos* informáticos significativos, no por su mera presencia, sino por su valor instrumental (que se evidencia en el empleo).

Marco Teórico

El enfoque documental de lo didáctico (ADD) (Gueudet y Trouche, 2008) toma sus bases en el enfoque instrumental de Pierre Rabardel. Dentro del ADD, se define un documento como la combinación entre un recurso (Adler, 1998) y un esquema (Vergnaud, 1990) de uso de ese recurso. Por su parte, Adler (2000) define un recurso como todo aquello que puede nutrir, revitalizar, aportar nuevos elementos, alimentar de

nuevo o de manera diferente la práctica matemática escolar, haciendo referencia a los recursos “tanto como sustantivo y como verbo, como objeto y como acción que realizamos en nuestra práctica” (p. 3). A su vez, propone una clasificación de recursos agrupándolos en tres grandes categorías: los recursos humanos, los recursos materiales y los recursos culturales. Dentro de los recursos materiales, distingue entre herramientas tecnológicas, material para las matemáticas escolares, objetos matemáticos y objetos cotidianos o no matemáticos. Un problema matemático, como el que presentamos aquí, corresponde a un recurso de tipo material, específico de la matemática escolar. Y los softwares que proponemos como parte vital constitutivas del análisis matemático, wxMaxima y GeoGebra, recursos materiales tecnológicos.

Adler (1999) utiliza los conceptos de *visibilidad*, *invisibilidad* y *transparencia* de recursos en uso en la práctica matemática escolar.

Un recurso es *visible* si la intención de los alumnos y del profesor, está centrada en este recurso. Tal visibilidad puede ocultar (tapar) conceptos matemáticos, por ejemplo, en el caso de un software, el alumno puede centrarse en aspectos de familiarización con funcionalidades técnicas y olvidar las matemáticas. Inversamente, un recurso se dice *invisible* si el trabajo en clase se desarrolla sin prestar atención a la presencia del recurso y a las posibilidades que él ofrece. La *transparencia* de un recurso designa el equilibrio entre visibilidad e invisibilidad: el potencial del recurso es reconocido y explorado, pero el objetivo matemático se mantiene central (p.3).

La incorporación de *recursos* informáticos en los procesos de enseñanza y aprendizaje supone un riesgo: extraviar en ese camino la centralidad de la matemática que se pretende enseñar, lo que puede ocurrir debido a dos factores: por un lado, la *visibilidad del recurso*: el empleo de programas que demandan una gran experticia, especificidad para su uso, provocan que el entrenamiento que demanda su correcta utilización *oculte* los conceptos matemáticos que se desean estudiar. Por el otro, su *invisibilidad*: en ocasiones se emplean programas que no provocan ningún tipo de reflexión en los usuarios (estudiantes), se operan con tal automatismo, con tal hermetismo, que *mágicamente emergen supuestos resultados*. Por el contrario, se propone, en este trabajo, aportar recursos que resulten *transparentes*, es decir: que no trasladen el eje de lo que se quiere estudiar, pero además permitan ciertas conexiones entre la matemática que se estudia y el recurso que se utiliza.

El problema de la zona despejada

Se propone una adaptación del problema Marín del Moral (2012). Esta adaptación no propone más que algunas modificaciones de forma respecto de la propuesta original.

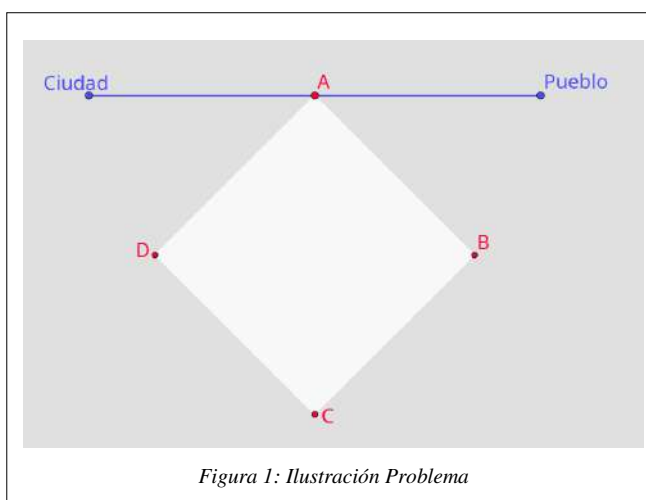


Figura 1: Ilustración Problema

En la figura 1 se puede observar, en color gris, una zona boscosa y de dificultoso tránsito. En esa región la velocidad de desplazamiento se considera en 1km/h. En blanco se identifica una región despejada de todo tipo de obstáculos, en la que la circulación puede darse con una velocidad de 5km/h. Esta “zona despejada” es un cuadrado de 7 kilómetros de lado y está dispuesto de forma tal que:

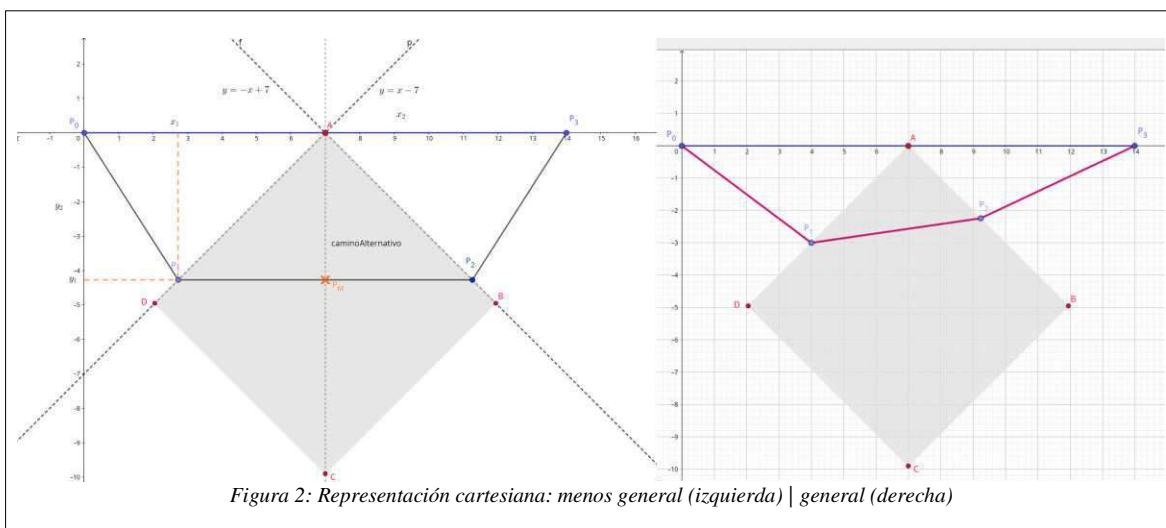
- (a) el vértice A es punto medio del segmento con extremos Pueblo y Ciudad.
- (b) la diagonal del cuadrado, que contiene a los vértices A y C, es perpendicular con el segmento referido.

En estas condiciones consideramos la siguiente situación: una persona se encuentra en la Ciudad y

necesita llegar al Pueblo. La distancia que separa las dos ubicaciones es de 14 kilómetros (en línea recta). Se debe determinar y describir la ruta que se debe seguir a efectos de realizar el recorrido en el menor tiempo posible.

Análisis Matemático del problema

En la resolución matemática de este problema impera la necesidad de su representación cartesiana. Aquí, podemos presentar, en principio, dos interpretaciones. Una de ellas implica suponer que el recorrido alternativo, el que requiere ingresar y transitar por la región despejada de obstáculos, debe ser (necesariamente) paralelo con el *camino directo* (ver Figura 2, izquierda). Por otro lado, frente a la imposibilidad de establecer afirmaciones objetivas que sostengan esa interpretación, y en un intento por abandonar todo impulso del sentido común, surge una segunda mirada (definida como: más general): considerar que este camino no necesariamente es paralelo con el eje de abscisas (un ejemplo se puede



observar en la Figura 2, derecha).

Estas dos interpretaciones, si bien producen la misma solución (esto se observará más adelante), se desarrollan sobre dos posibilidades didácticas diferentes.

Análisis general del problema, solución con dos variables

De este análisis se obtiene, y posteriormente se analiza, una función en dos variables. Sus variables independientes: x_1 y x_2 , son las abscisas de los puntos de ingreso y egreso a la región despejada (Figura 3). El recorrido alternativo que se debe realizar este dado por una poligonal (tres segmentos, tres tramos). Desde el origen (Ciudad) hasta el punto de ingreso a la región despejada ($\overline{P_0P_1}$); desde este punto hasta el punto de egreso ($\overline{P_1P_2}$), y por último: desde el punto de egreso de la región despejada hasta el punto de llegada (Pueblo) ($\overline{P_2P_3}$). Esta poligonal está definida por las abscisas de ingreso y egreso a la región despejada:

$$|\overline{P_0P_1}| = \sqrt{2x_1^2 - 14x_1 + 49},$$

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (-x_2 - x_1 + 14)^2},$$

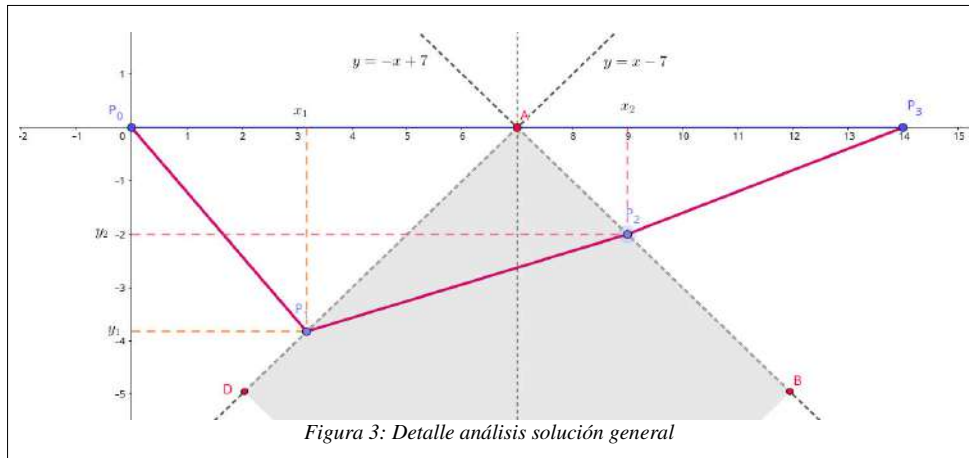
$$|\overline{P_2P_3}| = \sqrt{(14 - x_2)^2 + (-x_2 + 7)^2}$$

La función resultante: $t(x_1, x_2)$, que determina el tiempo de traslado por el camino alternativo, en función de las variables referidas y su dominio quedan definidas del siguiente modo:

Sean los intervalos reales $A = \left[7 - \frac{7\sqrt{2}}{2}, 7\right]$; $B = \left(7, 7 + \frac{7\sqrt{2}}{2}\right]$, y el conjunto

$D = \{(x_1, x_2) / x_1 \in A \wedge x_2 \in B\}$, la que establece el tiempo de un recorrido alternativo es:

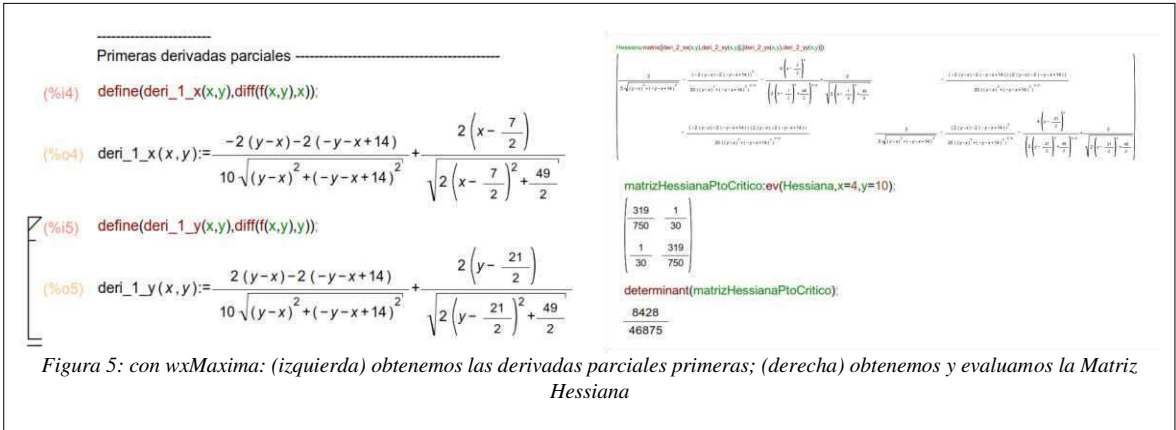
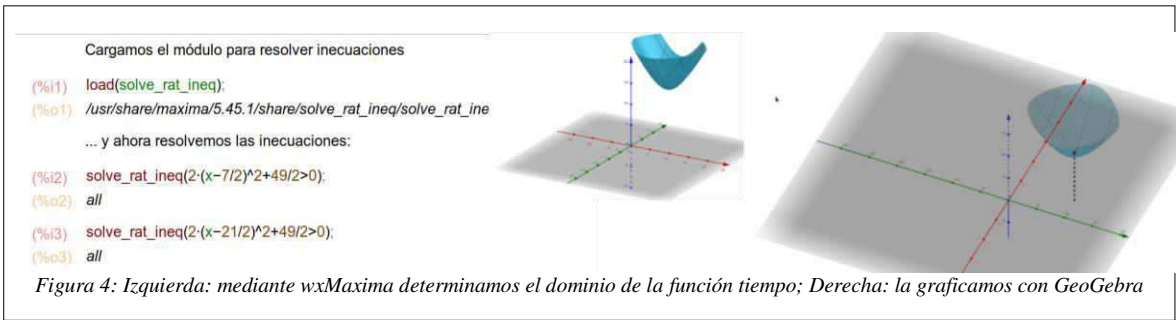
$$t: D \rightarrow R / t(x_1, x_2) = \sqrt{2x_1^2 - 14x_1 + 49} + \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (-x_2 - x_1 + 14)^2}}{5} + \sqrt{2 \cdot x_2^2 - 42 \cdot x_2 + 245}$$



El mínimo de esta función, en caso de existir, permitirá (en comparación con el tiempo que insume el recorrido directo) establecer la ruta que insume el menor tiempo para su realización. De modo que este problema, se convierte así, en un caso (muy poco convencional, en término de las funciones que se suelen estudiar para este propósito) adecuado para el estudio de extremos en funciones de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

La complejidad algebraica para obtener las derivadas, resolver las ecuaciones/inecuaciones que las anulan/indeterminan, obtener la Matriz Hessiana y evaluarla, hace realmente impracticable, económicamente inconducente, esta situación en un aula del siglo pasado. Pero, si en lugar de reposar en la pizarra, la carpeta y la paciencia de los/as estudiantes, optamos por apoyarnos en el uso de programas matemáticos específicos (wxMaxima como programa CAS y GeoGebra como sistema para representar gráficamente funciones) en los cuales *delegar el trabajo algebraico* y de *representación gráfica*, podríamos estar frente a una verdadera oportunidad en la que, nuestras/os estudiantes emplearían todo su esfuerzo de concentración y trabajo, en analizar y operar sobre un modelo matemático y no en superar dificultades algebraicas.

Seguidamente, consignamos algunas capturas del trabajo realizado con software (intentando sintetizar el análisis de este problema):

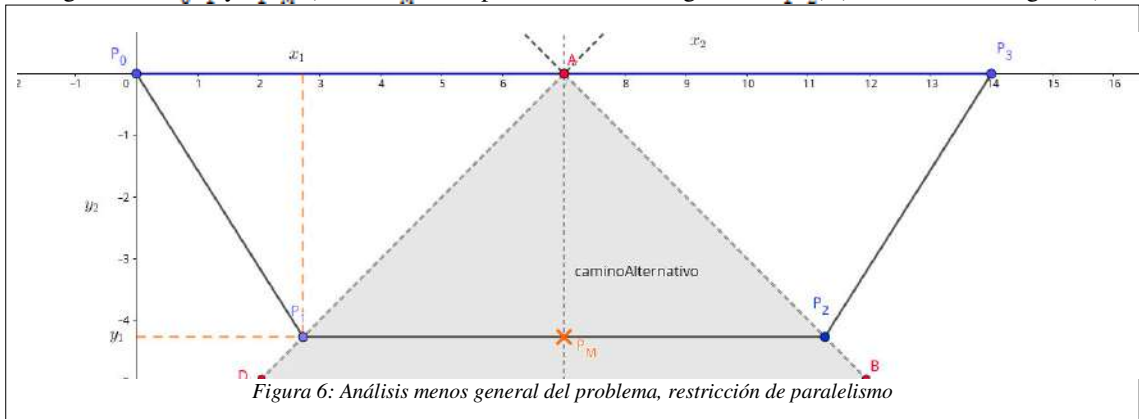


Resumiendo: Podemos afirmar que, estudiada la función tiempo, $t(x_1, x_2)$, se observa que admite un mínimo: $t = \frac{56}{5} = 11.2$ al ingresar en la zona despejada cuando $x_1 = 4$ y abandonándola en $x_2 = 10$. Siendo que 11,2 hs. es un tiempo menor que las 14 hs. que demanda el recorrido directo, damos por concluido el problema.

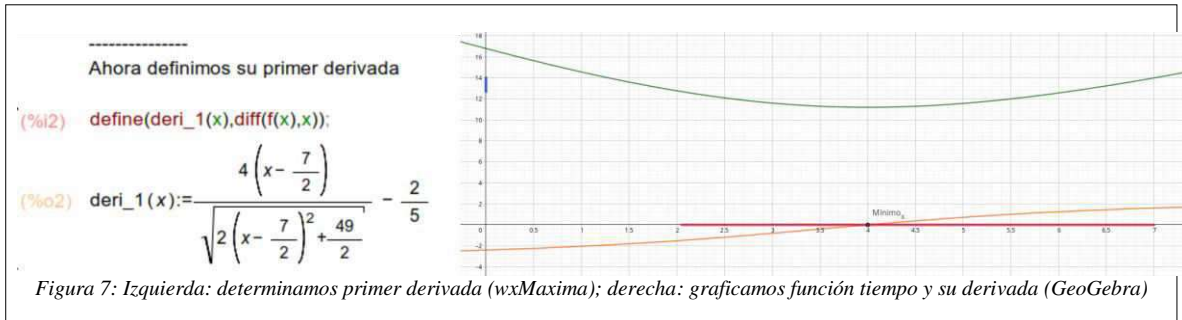
Análisis menos general del problema, con una variable

Incorporamos al problema una nueva condición: “Los puntos de ingreso y egreso a la región despejada deben ser simétricos con la diagonal \overline{AC} ”. De este modo estaríamos garantizando que el camino, sobre la región despejada, se realiza en forma paralela al camino directo entre Ciudad y Pueblo (el Eje X en nuestro caso). Y ya podríamos avanzar sobre la segunda línea de trabajo.

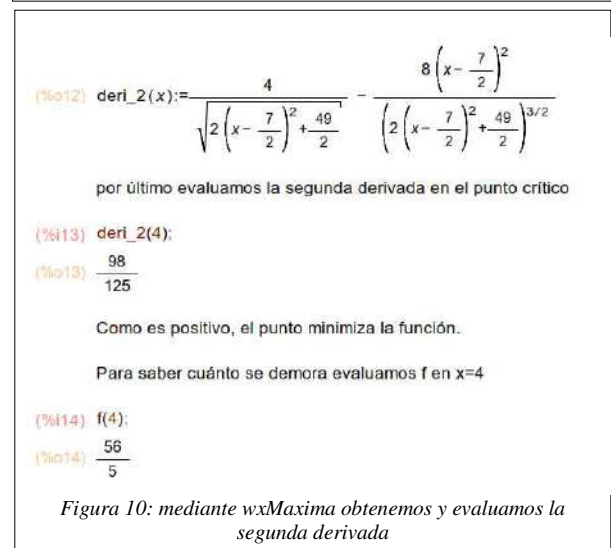
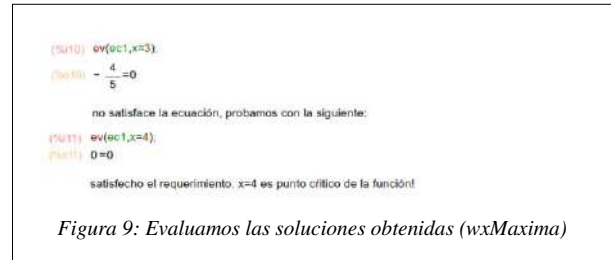
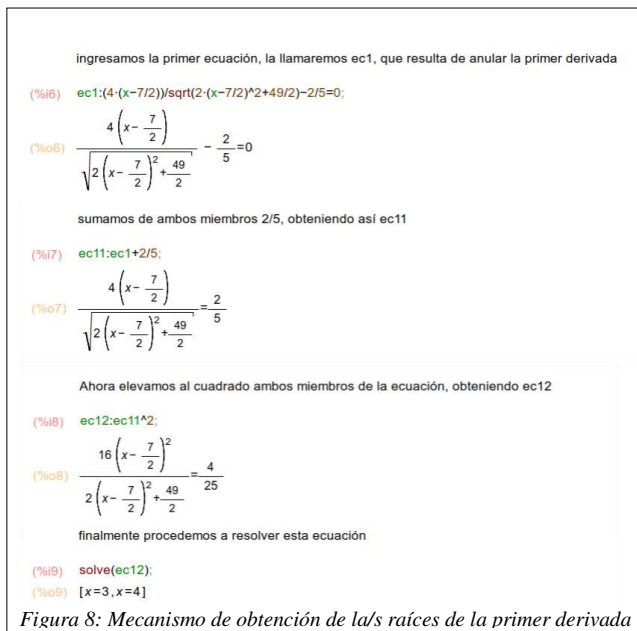
De este modo el recorrido que el personaje debe realizar quedaría inscripto en el contorno de un trapecio isósceles. Con lo cual todo el recorrido puede ser expresado como una combinación lineal de las medidas de los segmentos: $\overline{P_0P_1}$ y $\overline{P_1P_M}$ (donde P_M es el punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$) (se ilustra en la Figura 6)



Así planteado, la distancia del recorrido dependerá *solamente* de la variable x_1 , y tendremos como función de tiempo y su dominio. Sea $D = \left[7 - \frac{7\sqrt{2}}{2}, 7\right)$, $t: D \rightarrow R/t(x) = 2 \cdot \left(\sqrt{2 \cdot x^2 - 14 \cdot x + 49} + \frac{7-x}{5}\right)$ es la función que expresa el tiempo que insume recorrer el camino alternativo. Tenemos una función en una variable, con lo cual su estudio se simplifica notablemente (respecto de lo que ha sido el análisis del apartado anterior).



Establecida la primera derivada (Figura 7, izquierda) se procede a graficar (Figura 7, derecha). En la Figura 9 podemos observar el procedimiento que se siguió, con wxMaxima, para obtener las raíces de la primera derivada. En la Figura 9 evaluamos (también con wxMaxima) las soluciones que se obtuvieron, para determinar si alguna verificaba la ecuación original. Por último, en la Figura 10 podemos observar cómo obtenemos la segunda derivada y la evaluamos en el punto crítico hallado, determinamos que se trata de un mínimo, y que ese mínimo determina el mismo recorrido alternativo que en el análisis general previamente realizado.



Consideraciones finales

Si bien se esboza la resolución/análisis del problema a grandes trazos, esto en función de lo breve de este documento, consideramos estamos en condiciones de afirmar que:

El uso que se les dio a GeoGebra y wxMaxima, como recursos materiales tecnológicos, ha sido netamente instrumental. Así, dado que estos recursos digitales no esconden la matemática que se desea estudiar, no cancelan la necesidad de analizar propiedades, ni los procesos (como por ejemplo el necesario para resolver ecuaciones intentando anular derivadas); nos atrevemos a sostener que tal y como se presentan: los recursos recomendados se erigen como *transparentes*. Esto quiere decir que este problema no puede ser tratado en un aula sin el empleo de los recursos materiales informáticos sugeridos debido a que sin ellos la resolución sería ineficiente, y hasta contraproducente. La resolución también muestra que los recursos digitales no están de adorno, ni se incorporan por el brillo que devuelve la pantalla, sino que están siendo *genuinamente usados* por las/os estudiantes en su camino hacia la conceptualización de aquello que el docente se propuso enseñar.

Queremos destacar también que ambos programas son libres, este no es un dato menor, consideramos el deber de promover el empleo de tecnologías libres: por costos, pero, sobre todo: por soberanía.

El empleo de wxMaxima aporta además a la posibilidad de compartir notación matemática (problemática señalada por Carnelli y Colombano (2022)). La simbología que se utiliza en este programa podría ser adoptado (en una clase, en un colegio, etc.) como un estándar de escritura, lo que facilitaría el intercambio por medios electrónicos (chat, foros, etc.) de situaciones de trabajo que involucren lo matemático.

Finalmente, dado que hoy en día nadie realiza una división, ni calcula una raíz cuadrada, empleando métodos manuales. Del mismo modo este problema nos permite pensar en la posibilidad de comenzar a trasladar, ciertas prácticas escolares: al rincón de las cosas poco habituales.

Referencias Bibliográficas

- Adler J. (1998). Resources as a verb: Recontextualizing resources in and for school mathematics practice. In. Olivier A. and Newstead K., (eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1-18). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.
- Adler, J. (1999). The dilemma of transparency: Seeing and seeing through talk in the mathematics classroom. *Journal of Research in Mathematics Education*, 30, pp. 47-64.
- Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, p. 205-224.
- Carnelli, G.; Colombano, V. (2022, 12 y 13 de mayo). *Los recursos tecnológicos en cursos de Matemática de primer año del nivel superior: uso, evidencias y primeros análisis*. III Simposio de Educación Matemática Virtual (III SEM-V). <http://www.sem-basicas.unlu.edu.ar/?q=node/78>
- Castro, W.; Velásquez-Echavarría, H.; López-Sora, J. (2021). Recursos Didácticos y Contextos Usados por Futuros Profesores de Matemáticas. *Bolema, Rio Claro (SP)*, 35(69), pp. 432-458.
- Gueudet, G., Trouche L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et didactique*, 2(3), 7-33.
- Marín del Moral, (2012). Experiencias y reflexiones en torno al desarrollo de la competencia de modelización matemática en secundaria con apoyo de las nuevas tecnologías. En Romero I. R. (ed.), *Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas* (pp. 77-122). España: Secretaría General Técnica, Subdirección General de Documentación y Publicaciones.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies : Approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.
- Rabardel, P. (1999). Le langage comme instrument ? Éléments pour une théorie instrumentale élargie. In Y. Clot (Éd.), *Avec Vygotski* (pp. 241-265). Paris : La Dispute.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(23), pp. 133-170.

Las generaciones y el Proceso de Aprendizaje Virtual

Giselle KARDJIAN

kardjian_giselle@yahoo.com.ar

Resumen

El objetivo de este artículo es abrir un espacio reflexión sobre el vínculo entre la incorporación de conocimientos y la generación a la cual pertenece el sujeto y, desde allí, analizar las oportunidades y desventajas que la tecnología introduce en el aprendizaje virtual de la matemática desde la óptica descripta.

Al efecto, es menester revisar las teorías y enfoques didácticos más relevantes del último siglo y redefinir el rol docente en el nuevo contexto.

Palabras Clave: Teorías de aprendizaje, tecnología educativa, educación matemática, pedagogía, inclusión generacional.

Introducción

Los debates acerca de la formación de los educadores del siglo XXI señalan que ellos deben estar formados para promover el desarrollo de habilidades que la sociedad contemporánea requiere en el orden de la autonomía, polivalencia, flexibilidad, adecuada selección y procesamiento de la información; capacidad para la toma de decisiones en contextos de cambio, incertidumbre y complejidad, integración a equipos de trabajo, ser creativos en sus clases, imaginar nuevos escenarios.

¿Cómo es posible aspirar a cumplir estos requisitos en la era de la información?

Si no es posible imaginarse la sociedad dentro de 30 años, tampoco podemos imaginarnos las habilidades necesarias para desarrollarnos dentro de ella. Allí reside la incertidumbre, complejidad y flexibilidad en la que nos embebe la modernidad líquida.

Por ende, como una derivada en punto, debemos revisar el contexto (social y tecnológico) al que abordamos ante cada variación infinitesimal y e ir construyendo la visión y las habilidades necesarias para el futuro inmediato, momento a momento.

En el presente documento, trataremos de esbozar la prospectiva social actual, y basados en ella, algunas herramientas tecnológicas disponibles para trabajar en el área de la matemática.

Contexto

Teorías de Aprendizaje

Dos de las teorías de aprendizaje más relevantes en el último siglo son la corriente la conductista y la constructivista.

La **corriente conductista o mecanicista**, como su nombre lo indica, propugna por un aprendizaje repetitivo y mecánico. Se basa en las relaciones causa efecto, a través de reforzamientos positivos y negativos, para conseguir el objetivo propuesto.

El profesor, se ubica en el centro del proceso enseñanza- aprendizaje. El alumno (a-lúminis “sin luz”) es un receptor de contenidos.

Algunos de sus máximos exponentes fue el psicólogo ruso Pavlov y, en el ámbito educativo, F. B. Skinner. Esta corriente tuvo su auge entre las décadas de 1940-1960.

El **modelo constructivista u organicista**, considera que el estudiante, es un ser con luz propia, que aprende aquellos conceptos que ha construido o que han ayudado a construir.

El educando aprende haciendo, a través de la aproximación empírica, junto a sus pares y tutor, al conocimiento.

Algunos representantes, directa o indirectamente, de esta concepción, antagónica a la corriente conductista, son Jean Piaget, Lev Vygotsky, David Ausubel, Jerome Bruner, George Polya, Yves Chevallard y Guy Brousseau.

Si bien, desde la década de 1940 podemos encontrar representantes y escritos que luego formarán la base para este modelo.

En términos pedagógicos, es posible evidenciar su auge a partir de la década de 1990. No es casualidad su interposición temporal con la evolución de las Tics y la modernidad líquida.

En virtud de lo expuesto por Jean Piaget sobre los períodos etarios del desarrollo del pensamiento, **nos situaremos en sujetos adentrados en el cuarto período, el denominado del pensamiento abstracto**. El cual comienza alrededor de los 12 años. En esta etapa, el educando es capaz de establecer hipótesis y llegar a su solución.

Es importante partir de esta base ya que en la teoría constructivista juega un papel importante la resolución de problemas.

¿Es posible introducir la tecnología para incorporar conceptos matemáticos antes de los doce años? Claro que sí, pero **el presente trabajo se centrará en sujetos que se encuentran en Media y Superior ya que, relacionaremos la forma de elegir su educación con su propia visión de futuro en la sociedad y trabajo, influenciada, entre otras variables por su generación.**

Características de la sociedad actual

Zygmunt Bauman, denomina al período que va desde finales de 1980 como **modernidad líquida o posmodernidad**.

Para el sociólogo las características de esta época son **el colapso del pensamiento, de la planificación y de la acción a largo plazo, olvidar por completo y con rapidez la información obsoleta y las costumbres añejas puede ser más importante para el éxito futuro que memorizar jugadas pasadas y construir estrategias basadas en un aprendizaje previo**. Es decir, el individuo comprende su vida a través de una serie de proyectos de corto alcance, que van en contra de los conceptos de *desarrollo, maduración, carrera*. En donde la *virtud* que se proclama más útil para el *crecimiento individual* es la *flexibilidad*, para abandonar compromisos, lealtades para ir con rapidez tras la oportunidad del momento”.

Yves Chevallard: La Transposición Didáctica

En la década de 1990, *años de la modernidad líquida, posmodernismo o del pensamiento débil*, **Yves Chevallard** crea la noción de la transposición didáctica, del contrato didáctico, conceptos que surgen dentro de la didáctica de la matemática y posteriormente pasan a formar parte de la didáctica general de toda ciencia. Desde esta perspectiva ya comienza a visualizarse un cambio de paradigma en el concepto de enseñanza.

En la tríada didáctica, será el docente quien deje de ocupar el lugar escénico de divulgador de conocimientos para reorientar la enseñanza en una reinención de la matemática mediante la creación de situaciones didácticas. El fin último de la enseñanza es la apropiación de la obra matemática por parte de los alumnos en los contextos característicos de una *modernidad líquida*: la producción colegiada, el incentivo de la creatividad no solo en el razonamiento sino también en la comunicación de ideas matemáticas, la flexibilidad de los tiempos de trabajo adecuados a una verdadera asimilación de contenidos, la planificación inacabada y siempre incompleta de una clase en virtud de los aportes, necesidades, contextos formativos, diversidad del grupo y ecología del aula.

Guy Brousseau: La Teoría de las Situaciones

Brousseau sostiene que la reproducción de una actividad científica por parte de un estudiante implica poder actuar, formular, probar y reconocer el conocimiento. Esto lo lleva a considerar distintas *funciones del saber*, que en el aula se traducen por distintos tipos de *situaciones*:

- **Situaciones de acción**: en ellas se propone al estudiante un problema para el que la mejor solución se logra mediante el conocimiento a enseñar.
- **Situaciones de formulación**: son aquellas en las que el estudiante intercambia información con otros estudiantes para su posterior debate en la clase.
- **Situaciones de validación**: en ellas, el estudiante debe probar la validez, exactitud y pertinencia de su modelo, convenciendo a otros, quienes pueden pedir explicaciones adicionales y aún rechazar –justificando – las que no acuerden.
- **Situaciones de institucionalización**: son las que permiten establecer convenciones sociales. En esta etapa reaparece explícitamente la intencionalidad didáctica. Este momento es el que más se asemeja a las clases tradicionales, al docente “dando clase”.

El Aula

Es tal la velocidad de cambio de esta era que el formato de curso varió no solo desde hace unos cincuenta años al presente sino, desde hace diez años hacia el contexto actual. **En términos de tecnología, muchas de las herramientas utilizadas en la década precedente resultan obsoletas.**

Si a la creciente aceleración provocada por la revolución digital, sumamos el contexto de confinamiento por una pandemia (años 2019-2020), podremos entender la proliferación de software disponible y la creatividad de los profesionales de la educación para mantener el concepto de conjunto.

Para ello, podemos hacer una analogía entre el concepto de aula y el de conjunto desde el álgebra.

Un conjunto puede definirse por comprensión, a través de una cualidad que identifica si un elemento pertenece o no al mismo.

El aula tradicional, en la cual se daba el proceso enseñanza-aprendizaje, se organizó de la manera que la conocemos hace unos trescientos cincuenta años. Se estructuró en base a una disposición centrada en el frente, con un punto de atención en la figura adulta que organizaba la relación con el educando. Es decir, una relación asimétrica entre el docente y los alumnos.

Hasta hace unos años, podíamos entender al aula como la expresión física de la pertenencia a un curso.

¿Qué ocurre si no podemos encontrarnos para llevar a cabo este proceso? Debemos encontrar otro espacio común para generar pertenencia.

Como expresaría E. Bachrach, *emergencia y creatividad van de la mano*. Bajo el contexto de pandemia tuvimos que encontrar otros puntos de contacto e interacción para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje. Allí proliferaron espacios de intercambio sincrónico y asincrónico ([Zoom](#), [Google Meet](#), [Google Classroom](#), [Moodles](#) adaptadas y sus foros, [Pizarras digitales](#), grupos de [WhatsApp](#), [Telegram](#), [Discord](#), [Blackboard](#), entre otros), para los cuales cada persona debió contar con un dispositivo como punto de conexión con el profesor y sus compañeros.

Claro que no fue sencillo, tuvimos que romper con un concepto que lleva más de trescientos años y entender que lo que nos agrupaba era más que un lugar físico de interacción.

Si bien esa barrera nos atravesó a todos los sujetos inmersos en el proceso educativo, la dificultad en la adaptación hacia el nuevo contexto estuvo, está y estará relacionada directamente con la distancia generacional a la cual pertenece el sujeto y la actual.

Si definimos a una generación como un grupo de individuos que comparten una edad o etapas comparables al vivir hitos históricos: movimientos sociales, políticos, desarrollo tecnológico, entre otros; todo en un periodo de tiempo particular (McCrinkle & Wolfinger, 2009) y entendemos que cada una se diferencia por conductas, percepciones y motivaciones a través de las condiciones históricas y culturales que les ha tocado vivir, podemos observar que el esfuerzo por comprender y dominar las herramientas actuales no fue el mismo para quienes eran nativos digitales (Generaciones: “Y o Millennials” nacidos entre 1981-1993; “Z” nacidos entre 1994-2010; “Alpha” nacidos entre 2011-actualidad) que para quienes se desarrollaron bajo la pedagogía conductista (Generaciones: “Baby Boomers” nacidos entre 1949-1968; “X” nacidos entre 1969-1980).

Como se ha visto anteriormente, a la complejidad de adquirir los conocimientos necesarios para utilizar una tecnología en la cual no se es nativo, debemos adicionar que la predisposición al cambio e incertidumbre es distinta para un individuo seteados con un aprendizaje externo, dirigido, sin tolerancia al error, a través de estímulo-respuesta propio de la modernidad sólida ante otro que entiende que equivocarse es parte del aprendizaje, que el profesor no tiene el conocimiento absoluto sino que ambos se retroalimentan y benefician continuamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje (individuos pertenecientes a las generaciones propias de la modernidad líquida).

Pero estos son solo algunos aspectos a tener en cuenta, romper las barreras intergeneracionales (sociales, culturales, comunicacionales, tecnológicas, entre otras) siempre será un desafío adicional para quienes deben adaptarse a las últimas.

A sí mismo, si tenemos en cuenta que, a nivel tecnológico, cada generación representa una evolución sobre la anterior, podemos realizar una analogía con el concepto de interés compuesto. Es decir, por ejemplo, un docente o alumno perteneciente a la generación Baby Boomer tuvo que incorporar léxico y herramientas propias de las generaciones X, Y, Z y Alpha simultáneamente para poder interactuar en el contexto de pandemia.

En cuanto a la visión de futuro de las nuevas generaciones, podemos relacionar el contexto social actual desde la mirada de la generación sólida, con lo expuesto por el sociólogo y filósofo Zygmunt Bauman, en *Los retos de la educación en la modernidad líquida*, como el Síndrome de la Impaciencia.

Allí describe a una joven de 18 años quien expresa que no le gustaría hacer un racconto de su vida y ver que permaneció en un lugar sólo porque era seguro. Esta posición frente al futuro laboral demuestra un cambio de postura frente a la honra de permanecer en un mismo empleo hasta jubilarse propio de la generación sólida.

Bauman, observa que para las nuevas generaciones “el ascenso en la jerarquía social se mide por la creciente habilidad para obtener lo que uno quiere ahora, sin demora.” Dicho logro permite ser un privilegiado en la escala social.

Esta impaciencia y necesidad de observar resultados inmediatos, propio de las nuevas generaciones, podemos extrapolarla a lo que esperan de nuestras clases y de las carreras de instrucción.

Es por ello la proliferación de carreras o cursos de rápida salida laboral como los que ofrece CoderHouse en Argentina y la deserción de carreras de larga duración como Ingeniería.

Bauman, parafraseando a E. Myers, sobre las nuevas generaciones exhibe, “la creciente tendencia a considerar la educación como un producto antes que como un proceso” ...”El paso del tiempo presagia la disminución de oportunidades que debieron tomarse y consumirse cuando se presentaron”.

Podríamos hacer una analogía con el concepto de límite y de capitalización compuesta; los estudiantes buscan observar el crecimiento en su estatus, obtenido a partir de cada variación infinitesimal en su capacitación.

El hecho de aprender, experimentar, construir nuevamente a partir del conocimiento previo adquirido, buscado por las nuevas generaciones, en el cual se obtiene un resultado superior al de interés simple, comparable con la educación formal tradicional sin experimentación de campo es coherente en los términos propios de la generación pero no debemos olvidar el objetivo macro ya que, si bien, el aprendizaje con experimentación inmediata nos permite corregir el rumbo rápidamente, sin una institución o programa formal con un lineamiento y objetivo determinado, podemos engrosar nuestra cultura general sin especializarnos en ningún área, lo cual, derivará en el fallo del objetivo último de la profesionalización y por ende en la estratificación buscada.

Allí es donde las instituciones y los educadores tenemos el desafío de contener y preparar con visión de futuro a las próximas generaciones mediando entre la inmediatez y el mediano plazo.

Como educadores, ¿Qué acciones podríamos llevar a cabo?

Como expresarían el Dr. Pere Marquès Graells en *“La cultura de la sociedad de la información. Aportaciones de las Tic”* y Howard Gardner en *“Inteligencias Múltiples. La teoría en la práctica”*, deberíamos aprovechar las ventajas que las herramientas tecnológicas nos dan para poder hacer frente a la **diversidad** en el aprendizaje, entendiendo que una inteligencia puede servir tanto de **contenido** de la enseñanza como de **medio** empleado para comunicar este contenido.

Es por este motivo que podemos recurrir a una abundancia de recursos multimedia (auditivos, visuales, interactivos, animados, etc.) y a la interacción social, tanto presencial como virtual, para generar aprendizaje no solo desde la interacción docente-alumno sino desde la zona de desarrollo próximo, tal como sostenía Vygotsky.

En el caso de la educación superior o de adultos, también podemos aprovechar la heterogeneidad para promover el desarrollo de habilidades blandas que la sociedad contemporánea requiere. Es decir, como educadores, no solo impartimos contenido, estamos formando a individuos, por lo cual, en relación con lo expuesto, podemos trabajar en la homogeneización intergeneracional, dando relieve frente a las nuevas generaciones al **compromiso** que, generalmente, demuestran quienes pertenecen a la generación de modernidad sólida y continúan formándose; **trabajando con ellos también en las situaciones de formulación y validación**, que no se encuentran en su naturaleza cultural.

Es nuestro deber entender el contexto de nuestro curso, no solo generacional, sino también sociocultural para adaptar los recursos a cada grupo.

Podemos entender entonces que el profesor dentro de la posmodernidad, con el nuevo contexto social y el acceso inmediato a los contenidos, se transformó en un tutor que guía al curso hacia la consecución del objetivo propuesto.

Los alumnos

Sobre los alumnos entendemos que, al ser en su mayoría, **nativos digitales necesitan permanentes estímulos** y recompensas o resultados por su trabajo o estudio. Con esta visión, adentrándonos específicamente en el campo de la matemática, existen actualmente muchas herramientas para llevar a cabo un aprendizaje dinámico.

Por ejemplo, el modelo de ***aula invertida***, es un modelo pedagógico que plantea la necesidad de transferir parte del proceso de enseñanza y aprendizaje fuera del aula con el fin de utilizar el tiempo de clase para el desarrollo de procesos cognitivos de mayor complejidad que favorezcan el aprendizaje significativo.

No es casualidad que este modelo que está en auge se haya iniciado en la década de los 90’, ya que tiene base constructivista y se apoya en el uso de las herramientas multimedia para lograr un acercamiento previo de los estudiantes a los contenidos donde luego, con la intermediación del docente, se perfecciona el entendimiento de estos.

Conociendo las características de nuestros educandos, debemos hacer énfasis en la utilidad y aplicación en la vida cotidiana del contenido a incorporar (condición necesaria para un nativo “Y” en adelante).

A modo de ejemplo, si debemos enseñar las superficies cuádricas podemos relacionarlas con objetos conocidos como ser un tazón con un Paraboloides; un Hiperboloides de una hoja con el famoso juguete Diavolo, entre otros.

También podemos ir más allá de los contenidos para lograr una experiencia significativa y, como sugiere Teresa Loíacono, en *Creatividad e Imaginación en la Formación de Formadores*, utilizar el código QR (hoy utilizado mundialmente para acceder a las listas de productos/servicios y precios) como enlace a los contenidos.

Algunas actividades para aprovechar las ventajas tecnológicas actuales:

- Podemos grabar un video corto explicando las nociones básicas,
- guardar el documento u hojas utilizadas en la pizarra digital, armar o recomendar un recurso gráfico interactivo de prueba según el contenido, como por ejemplo derivadas parciales en [Geogebra](#) [[Enlace a recurso interactivo](#)] o un tablero en Power BI [[Dashboards Power BI](#)]
- pedirles que modifiquen variables o coeficientes para favorecer la exploración. La exploración puede ser libre, dirigida o podemos pedirles que elijan un tema de su interés e intenten reproducir el análisis. También podemos romper a propósito nuestra función o set de datos y pedirles que investiguen la causa y la solución, en el caso que exista.

Para algunas áreas en particular, existe software específico para explorar junto a nuestros alumnos:

- Para Estadística Descriptiva, abundan interfaces gráficas que permiten moldear un gran set de datos y jugar con sus atributos. Entre ellos, Excel, R Studio, Phyton, Power BI. Podemos mostrar gráficamente allí, conceptos como promedio, desvío, valor atípico, asimetría, definir KPIs y luego, entendiendo la importancia de comprender y manipular esta información, introducirlos en la forma de cálculo y teoría.



- Para Distribuciones de Probabilidad, una herramienta maravillosa es [Probability Distributions](#), una aplicación en la cual, los estudiantes pueden interactuar con las distribuciones más utilizadas, variando los parámetros.

Además, cuenta con la información más relevante, como la expresión de la función de densidad, el dominio, la forma de cálculo de la media y varianza.



Otros recursos interesantes

- [Casio](#): La famosa marca de calculadoras tiene emuladores gratuitos de sus modelos más avanzados. Podemos descargar los modelos 570 y 991 que permiten calcular raíces de polinomios de hasta tercer grado, resolver sistemas de ecuaciones, distribuciones de probabilidad, matrices, integrales, inecuaciones.



- [Anki App](#): podemos diseñar una actividad Memotest para que incorporen o fijen fórmulas o definiciones, a través de tarjetas.
- [Symbolab](#): es una herramienta de educación matemática avanzada. Permite aprender, practicar y descubrir temas matemáticos utilizando símbolos matemáticos y notaciones científicas, además de texto. Además, proporciona soluciones automatizadas **paso a paso** para temas algebraicos, trigonométricos y de cálculo que abarcan desde la escuela secundaria hasta la universidad.

Para los alumnos, resulta una excelente herramienta de apoyo para la resolución de ejercicios y su comprensión. Otra herramienta similar es [Mathway](#).

- Exámenes y simulacros con autocorrección, formularios del tipo choice en Google Forms o Moodles propias.
Es posible configurar una respuesta a cada elección. Por ende, podemos mostrar los errores más comunes y la forma correcta de resolver el ejercicio de forma automatizada.

13/7/2021

Examen Final Algebra A - 13 de julio de 2021

Pregunta 4

Incorrecta

Puntúa 0,00 sobre 0,25

Sea $P(x) \in \mathbb{R}[x]$, un polinomio de grado mínimo que cumple simultáneamente:

- $P(3) = -13$
- P es divisible por $(x+2i)$
- P tiene a 2 como raíz de multiplicidad 3.

Indicá la única opción que contiene una expresión de P :

Seleccione una:

- $P(x) = -(x+2i)(x-2)^3$ ✘ **Observá que el polinomio P tiene coeficientes reales y esta opción no cumple esa condición. No tuviste en cuenta que, como P tiene coeficientes reales y sabemos que $-2i$ es raíz, entonces $2i$ también lo es.**
- $P(x) = (x-2)^3(x^2+4)(x-3)$
- $P(x) = -x^5 + 6x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 48x + 32$
- $P(x) = x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 32x^2 + 48x - 32$

Su respuesta es incorrecta.

En este problema se trabaja con la construcción de polinomios conociendo sus raíces y su valor al evaluarlo en un número dado. Estas estrategias, las estudiamos con el ejercicio 10 de la Práctica 8.

Si tuviste problemas con leer los datos dados, te recomendamos leer sobre el tema en el libro de cátedra: Álgebra A. (2020). 1 ed. (coordinación general de Claudia Lombardo). Buenos Aires: Eudeba. Libro digital, PDF. - (UBA XXI). Sección 8.3.1.

La respuesta correcta es: $P(x) = -x^5 + 6x^4 - 16x^3 + 32x^2 - 48x + 32$

Conclusiones

En síntesis, las posibilidades de incorporar tecnología en nuestras clases son infinitas y avanzan de forma exponencial. Su aceleración creciente, nos enfrenta hoy como profesionales, a la incertidumbre y al reto de la actualización constante propios de la era en que vivimos.

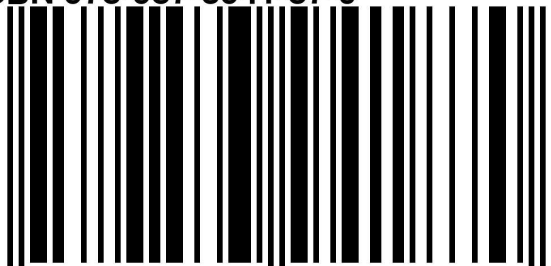
Si tenemos en cuenta la rama del estudio y la investigación informática que busca formas de imitar el funcionamiento de las neuronas humanas en las máquinas y la resolución de diversos problemas basados en el comportamiento humano, mediante mecanismos matemáticos y lógicos, denominada inteligencia artificial (IA) y su incesante progreso, como por ejemplo el ChatGPT, un prototipo de chatbot creado en 2022 (menos de un año a la fecha), que se especializa la capacidad de indexar información de grandes motores de búsqueda y sostener un diálogo, realizar monografías, etc. Debemos entender que estamos ante un nuevo punto de inflexión. Con la IA al alcance, tendremos que preguntarnos nuevamente, ¿Cuál será nuestro rol en breve? ¿Qué diferencial podemos aportar? ¿Cómo nos vamos a adaptar a esta nueva tecnología al alcance de

cualquier usuario? ¿Cómo serán nuestras clases? ¿Cómo evaluaremos el progreso cognitivo de nuestros estudiantes? Estas son algunas inquietudes por revisar en el futuro inmediato.

Referencias Bibliográficas

- Bauman, Z. (2009). Los retos de la educación en la modernidad líquida. Barcelona: Gedisa S.A.
- Bauman, Z. (2009). Tiempos líquidos. Buenos Aires: Ensayos Tusquet.
- Bacharach, E (2014). En Cambio. Buenos Aires, Editorial Sudamericana.
- Gardner, Howard (1995). Inteligencias Múltiples. La teoría en la práctica. Barcelona. Paidós.
- Piaget, J. (1986) Psicología y pedagogía. España. Planeta-Agostini.
- Hernández Rojas, G. (2008). The constructivisms and their implications on education. México. Perfiles educativos vol. 30 no.122. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-26982008000400003
- Ekstrom, R., French, J., Harman, H. (1979). Cognitive factors, their identification and replication. Nashville: Society of Multivariate Experimental Psychology
- Polya, G. (1945) How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton University Press. Abstract.
- Prensky, Marc (2010) Teaching Digital Natives. Partening for real learning. Thousand Oaks: Corwin
- Kilpatrick, Jeremy & Gómez, Pedro & Rico, Luis. (1998). Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia.
https://www.researchgate.net/publication/278009025_Educacion_Matematica_Errores_y_dificultades_de_los_estudiantes_Resolucion_de_problemas_Evaluacion_Historia
- Chevallard, Y. (1998). La Transposición Didáctica. Del Saber Sabio Al Saber Enseñado. Argentina. AIQUE Grupo Editor.
- Borghi, M. C.; Loliacono, T. (2015) Uso de Tecnologías en Educación Superior. Antes y Ahora. XV Jornadas de Tecnología Aplicada a la Educación Matemática Universitaria. UBA
- Borghi, M. C.; Loliacono, T. (2012) Las Nuevas tecnologías en la formación de formadores. Mathema. Edumat (2012). Chivilcoy-Bs.As.
- Loliacono, T. (2020). Pedagogía Líquida en Tiempos de Pandemia. Memorias del I SEM-V (Simposio de Educación Matemática-Virtual). UNLu:13-14/8/20. EDUNLU. ISBN 978-987-3941-61-0.
- Loliacono, T. (2021). Creatividad e Imaginación en la Formación de Formadores en Memorias del II SEM-V (Simposio de Educación Matemática-Virtual). UNLu:13-14/5/21. EDUNLU. ISBN 978-987-3941-67-2.
- Loliacono, T. (2022). Desafíos de la Educación Matemática en Tiempos Híbridos. Formación de Formadores en Memorias del III SEM-V (Simposio de Educación Matemática-Virtual). EDUNLU.
- Bustos, H.; Rodríguez Larribau, M.; Zinkes, M. C. Nuevos materiales didácticos en la formación docente. Buenos Aires, ISP Dr. JVG 2008. ISBN:978-987-1500-03-1
- Marques Graells, P. “La Cultura de la Sociedad de la Información. Aportaciones de las TIC”: <http://www.peremarques.net/si.htm> (07 -08- 2011)
- Marques Graells, P. “Impacto de las TIC en Educación: Funciones y Limitaciones”: <http://www.peremarques.net/siyedu.htm> (17 -02- 2012)
- Teoría del Reforzamiento Frederick B. Skinner (conductismo): recuperado de: <https://teoriasdeaprendizajesite.wordpress.com/conductivismo/> (08-04-21)
- https://es.wikipedia.org/wiki/Aula_invertida
- Trabajos que pueden desaparecer por la inteligencia artificial. ABC Tecnología (10/03/2023)

ISBN 978-987-3941-87-0



9 789873 941870