1014. D’Amore, B. (2022). La Matematica nella Divina Commedia. In A. Buonocore, G. Gerla, L. Restuccia & C. Toffalori (Eds.), *Matematica 2021. Dante e la Matematica*. Atti del Convegno omonimo a cura di Federazione Italiana Mathesis. Verona-Firenze, 2021. Pagg. 17-28. Palermo: New Digital Frontiers.

La Matematica nella Divina Commedia

Bruno D’Amore

Doctorado Universidad Francisco José de Caldas, Bogotá – NRD Università di Bologna

Sunto. La *Divina Commedia*, componimento poetico universalmente considerato come una delle creazioni letterarie più perfette, contiene molti versi di carattere matematico. Ma questo fatto è caratteristico di tutta l’opera di Dante.

L’esplorazione e la messa in evidenza dei moltissimi contenuti matematici nell’opera di Dante in generale e nella *Comedìa* in particolare ha un inizio che oramai data almeno un secolo. Eppure, il connubio tra le cosiddette “cultura umanistica” e “scientifica” ancora desta sorpresa in taluni.
Nell’analisi della presenza di versi e temi a carattere matematico nella produzione di Dante, mi limito qui a pochi esempi, distinguendoli per appartenenza matematica piuttosto che per motivi legati alla lirica del Sommo Poeta, rinviando chi volesse saperne di più ai testi citati in bibliografia. Mi ridurrò all’aritmetica e alla geometria, i capisaldi storici della matematica, ma avvertendo che vi sono momenti altamente significativi nei quali si tratta di logica e di ottica geometrica, per conoscere i quali rinvio ancora alla bibliografia.
Questi studi matematici nulla hanno a che fare con la numerologia, sulla quale s’accaniscono studiosi dilettanti o accaniti cacciatori di metafore numeriche; è ben risaputo che, nella lirica medievale, la presenza di “misure metriche” e numeri era notevole [basti pensare a Petrarca (1304 - 1374) e alle sue “stanze”]; e che la mistica numerologica era assai più di quel che è considerata oggi, mera curiosità; ma sarebbe inutile scomodare la matematica per questo genere di banalità aritmetiche.
Quel che voglio fare qui, invece, è presentare versi nei quali la matematica ha un ruolo serio assai significativo, anche per dimostrare che, nel Medioevo e specialmente in Dante, parlare di “due culture” è quanto meno fuorviante.

1. Aritmetica

Dopo il 1290 (dunque all’età di 25 anni) e per circa 30 mesi, Dante studia filosofia e in particolare Boezio (come apprendiamo dal *Convivio*). Ma Anicio Manlio Torquato Severino Boezio (480 - 524) (l’autore del *De consolatione philosophiae*) non è solo il traduttore delle opere di Nicomaco ($^{-}$IV sec.) e di Euclide ($^{-}$IV - $^{-}$III sec.), bensì egli stesso valente matematico, autore di pregevoli trattati di Geometria e di Aritmetica; scrive, per esempio, un *De Institutione Aritmetica* (Dante lo incontra in Par. X 125-129).
Quale e quanta aritmetica conosceva Dante? È ben noto che la *Divina Commedia* è ricchissima di riferimenti numerologici; ora, però, per i calcoli necessari alla numerologia non occorre di solito una grande competenza aritmetica. Non è quindi al Dante numerologo che occorre guardare per avere la risposta alla nostra domanda, ma puntare di più l’attenzione sulla presenza di una vera e propria conoscenza aritmetica. A questo proposito, molti Autori si sono già posti autorevolmente il problema

come, per esempio Beniamino Andriani (1981). Aggiungerò dunque considerazioni con poca speranza di novità.
Sappiamo che Dante fu scolaro nel convento francescano di Santa Croce a Firenze e poi, pare, al convento domenicano di Santa Maria Novella, dapprima Studium Solenne poi, dal 1295, Studium Generale. Essere scolari a Firenze non è come esserlo in altre città: a Firenze, e in tutta la Toscana, era possibile avere Maestri d'Abaco di alto prestigio. Sappiamo, per esempio, che Jacopo (1289 - 1348), figlio di Dante, è addirittura allievo di Paolo dell'Abaco (1282 - 1374) che insegna in una delle poche scuole d'abaco fisse (di fronte alla chiesa di Santa Trinita).
Forse Dante viene a contatto con il Libro d'Abaco cui Paolo deve il suo nome? Secondo la testimonianza di Gino Arrighi (1906 - 2001), pare che tale trattato di Paolo fu reso pubblico negli anni intorno al 1339, ma non è escluso che ne esistessero versioni preliminari, semmai solo stralci, per esempio sotto forma di appunti di scolari.
Forse Dante, nella sua sete di sapere, viene a contatto con il *Liber Abaci* di Leonardo figlio di Bonaccio, il Pisano (ca. 1170 - 1242)?
Certo, Dante sembra essere molto attento alla cultura, anche scientifica, del suo tempo: ancora bambino, frequenta alcune lezioni di Pietro Ispano (1220 - 1277) e qui certo apprende l'efficacia del metodo euristico nelle scienze (ancora piuttosto ingenuo).
Anche grazie ad alcuni suoi passi tuttora di interpretazione dibattuta, sarebbe molto interessante avere le risposte alle precedenti domande; infatti, nonostante un articolo dello Statuto dell'Arte del Cambio di Firenze che nel 1299 vietasse l'uso dei numeri arabi, piuttosto diffuso nei Trattati d'Abaco è l'uso del sistema arabo-indiano (le "figure delli Indi") nella scrittura aritmetica e di conseguenza la manipolazione di sempre più rapidi algoritmi di calcolo.
Ciò significa, per esteso:

- uso di un sistema posizionale
- a base dieci
- uso esplicito dello zero come cifra.

Tutte queste sono assolute novità, rispetto alla numerazione latina nella quale non c'è sistema posizionale, non c'è zero (non ce n'è bisogno), mentre in effetti in essa il numero dieci gioca un ruolo dominante anche se non come "base" così come si diffonderà poi grazie all'opera di Fibonacci e altri.

Un celebre passo con riferimento all'aritmetica si trova in Par. XV 55-57:

…
Tu credi che a me tuo pensier mei
da quel ch'è primo, così come raia
da l'un, se si conosce, il cinque e 'l sei;
…

Sono le celebri frasi che Cacciaguida (ca. 1091 - 1148) rivolge a Dante: «Tu che hai ferma convinzione che il tuo pensiero discenda, si riveli direttamente a me da Dio, primo Ente e principio di ogni cosa, così come dalla conoscenza dell'unità deriva quella di tutti gli altri numeri» (Sapegno, in: Alighieri, 1978).
In tempi moderni si direbbe che, ammessa l'unità, si possono costruire i numeri naturali …, n, n+1, … intendendo con ciò tutti i numeri. In effetti, la notazione n, tipica oggi del matematico, tesa a indicare un numero naturale qualsiasi, è assai più recente; quel "il cinque e 'l sei", come nota Natalino Sapegno (1901 - 1990) (Alighieri, 1978), sta a indicare numeri naturali generici successivi. D'altra parte anche Euclide, quando vuol considerare un numero generico di numeri primi, ne prende tre (mi riferisco al celebre teorema: «Data una qualsiasi collezione finita di numeri primi, se ne può sempre trovare un altro non presente nella collezione», che si trova negli *Elementi*, IX, 20).
Detto ciò, mi pare che l'affermazione di Dante non sia poi di così grande rilevanza aritmetica; credo che qualsiasi persona anche di modesta cultura possa ben comprendere che, avendo a disposizione

l’unità, sia ragionevolmente facile costruire o raggiungere qualsiasi altro numero per addizione ripetuta di essa. Affermo ciò espressamente perché si è voluto invece vedere in questa frase addirittura qualche anticipazione dell’intuizione di Giuseppe Peano (1858 - 1932) che, com’è ben noto, ideò un sistema assiomatico dei numeri naturali. Pur con tutto l’amore e la stima che possiamo nutrire per Dante, questa interpretazione mi sembra eccessiva.
Molto più interessante trovo invece un altro riferimento aritmetico che si trova in Par. XXVIII 91-93:

…
L’incendio suo seguiva ogni scintilla;
ed eran tante, che `l numero loro
più che `l doppiar delli scacchi s’immilla.
…

Su questi versi ho già scritto a lungo altrove e dunque qui non mi ripeterò (D’Amore, 1991, 2020).
Appaiono, sempre nella *Divina Commedia*, molti altri passi aritmetici; voglio ricordare il paragone che Dante fa nel *Convivio* tra l’aritmetica e il Sole: così come il Sole illumina gli altri corpi celesti e di esso non è possibile sostenere la vista, così l’aritmetica illumina e permea tutte le altre discipline scientifiche. Sull’infinità dei numeri, poi, l’occhio dell’intelletto non può fermarsi «però che ‘l numero quant’è in sé considerato, è infinito, e questo non potremo noi intendere» (*Convivio*).

2. Geometria

È ben noto che Dante, dopo la morte di Beatrice (1265 ca. - 1290), frequentò la “scuola dei religiosi” e le “disputazioni dei filosofanti”, leggendo Cicerone (la retorica) ($^{-}$106 - $^{-}$43) e Boezio. Nel precedente paragrafo, Boezio ha significato principalmente Aritmetica; ma non dimentichiamo che lo stesso Boezio ha tradotto Euclide. Era quindi inevitabile, studiando Boezio, incontrare l’opera del geniale alessandrino.
Inoltre sono, i primi secoli del II millennio, tempi di traduttori solerti: Platone da Tivoli (ca. 1110 - 1145) traduce una grande quantità di libri di matematica dall’ebraico (quelli che Abraham Car Higgha Nasi (XII sec.) (aveva a sua volta tradotto dal greco e dall’arabo); Platone scrive anche il celebre *Liber Embadorum Savosardae* che ebbe discreta diffusione all’epoca. Nel 1175 Gherardo da Cremona (1114-1187) traduce dall’arabo al latino gli *Elementi* di Euclide, ma già mezzo secolo prima Abelardo da Bath (ca. 1080 - 1152) aveva cominciato a farlo.
Inoltre, su molti Libri d’Abaco (anche in alcuni di quelli già ricordati), figuravano quasi sempre regole geometriche, il più delle volte solo regole pratiche adatte ad agrimensori o muratori o artigiani (i commercianti, cioè coloro che più di ogni altro si servivano di aritmetica, avevano poco bisogno della geometria e dunque dimostravano in questo campo ben poca padronanza).
Di fatto, lo studio della geometria di Euclide, intesa come rigoroso sistema deduttivo, non si poteva praticare banalmente attraverso i maestri d’abaco più rozzi; richiedeva analisi più approfondite che, di solito, passavano attraverso la filosofia. Ed è qui il punto: forse lo studio di Aristotele ($^{-}$384 - $^{-}$322) che Dante intraprese con una certa dose di coraggio in modo così serrato, portava necessariamente, tra l’altro, a fare i conti con la geometria.
Uno dei più famosi passi geometrici di Dante è certo in Par. XXXIII 133-138:

…
Qual è il geomètra che tutto s’affige
Per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond’elli indige,

tal era io a quella vista nova;
veder volea come si convenne
l'imago al cerchio e come vi s'indova;
…

Su questi versi, di una prepotente bellezza e ricchi di significato come in nessun altro momento del viaggio oltremondano di Dante, vale la pena soffermarsi.

Che cosa debba intendersi con la "vista nova" è talmente risaputo che sarebbe offensivo nei riguardi del lettore farvi anche solo cenno; ma capire che cosa c'entra la "vista nova", appunto, con quel "misurar lo cerchio", non è immediato. Gli insegnanti e gli studenti, in questi casi, consultano le note di un critico poste in fondo alle pagine dei manuali scolastici. Nel più diffuso di tali testi (Alighieri, 1958) si trova la ben nota spiegazione di Natalino Sapegno: «come il geometra che si applica, concentrando tutte le sue facoltà mentali, all'*insolubile problema* della quadratura del circolo […] tal ero io dinanzi a quella straordinaria visione, ché invano […]» (corsivo mio).
Che cos'è *esattamente* il problema della quadratura del cerchio?
Si può esprimere in due modi almeno, tra loro equivalenti:

- data una circonferenza, trovare un quadrato (o un rettangolo) il cui perimetro coincida con la lunghezza della circonferenza;
- dato un cerchio, trovare un quadrato (o un rettangolo) la cui area coincida con quella del cerchio.

Questo problema era già stato risolto molto brillantemente nell'antichità greca, per esempio da Dinostrato (ca. $^{-}390$ - $^{-}320$) [ma non solo da lui; si vedano molti altri studi, elencati e illustrati per esempio in (Carruccio, 1964)]. Era un argomento ben noto, diffuso tra le persone colte, non solo tra i matematici, tra gli altri ben spiegata da Platone di Atene (ca. $^{-}428$ - $^{-}348$).
Perfino a studenti giovanissimi, alle prime armi, si spiega che una circonferenza, il cui raggio misura r, misura a sua volta $2\pi r$; dunque, se si prende un rettangolo di lati r e $(\pi-1)r$, lunghezza della circonferenza e perimetro di quel rettangolo coincidono; così, l'area di un cerchio il cui raggio misura r misura πr^2; dunque, un rettangolo i cui lati misurano πr e r avrà area uguale a quella del cerchio.
Ma allora, dove sta l'*impossibilità* del problema?
Dante ha fatto un sottinteso! Per motivi soprattutto estetici, i Greci privilegiavano le soluzioni "con riga e compasso" [è un modo di dire che nasconde qualche cosa di algebricamente più preciso che non il mero riferimento ai due strumenti concreti: si veda (Carruccio, 1964); sorvolerò qui sulle questioni tecniche, ben note a qualsiasi matematico; il lettore non matematico può interpretare che si tratti *davvero* di servirsi di una riga e di un compasso].
La soluzione data da Dinostrato, ma anche da altri studiosi greci della quadratura del cerchio, è sì corretta, ma NON è stata ottenuta con riga e compasso!
Inutilmente, e per secoli, dapprima i matematici greci e poi via via tutti gli altri, cercarono di quadrare il cerchio con questi strumenti, inutilmente: oggi sappiamo che ciò è impossibile [lo ha dimostrato Ferdinand von Lindemann (1852 - 1939), ma solo nel 1882]. I Greci devono averlo supposto, anche se in modo implicito, intuitivo: non può essere un caso se i tre problemi più amati e più studiati (i tre "problemi classici della geometria greca", citatissimi da Platone), tra i quali, appunto, quello qui in esame, erano perennemente presi a esempio in tante questioni matematiche e filosofiche.[1]
Dunque non è *impossibile* in sé il problema della quadratura del cerchio: è impossibile nelle modalità dette, con quegli strumenti. La nota del nostro Critico è, dunque, quanto meno, fuorviante. Il senso da attribuire ai versi 133-138 di Par. XXXIII è assai più profondo.

Ora, però, il problema è: poiché Dante non dice esplicitamente "con riga e compasso", è da ritenere che anche lui cadesse nell'equivoco, oppure che conoscesse la questione e ritenesse che i suoi lettori la possedessero altrettanto bene, dunque che non valeva la pena fare i pignoli? Non avremo mai la

[1] I tre problemi cosiddetti "dell'Ellade classica" in oggetto sono: la quadratura del cerchio, appunto; la duplicazione del cubo; la trisezione dell'angolo generico.

risposta a questa domanda; ma la competenza geometrica che si può rilevare in Dante, spinge più d'un autore quasi ad azzardare che siamo di fronte a un altro esempio di sconfitta attuale dell'unicità della cultura: in Dante le "due culture" convivevano; nei suoi lettori attuali, ahimè, spesso non solo non–matematici ma anti–matematici [perché stupidamente la matematica è talvolta considerata materia vuota ed "arida come i sassi", come diceva il filosofo Giovanni Gentile (1875 - 1944)], no.
C'è però da dire che per "quadrare il cerchio" spesso si intende una visione diversa anche se del tutto equivalente alla precedente e cioè trovare l'*esatto* valore del rapporto tra lunghezza di una data circonferenza e suo raggio, rapporto uguale per tutte le circonferenze.
Ora, qui si dovrebbe aprire tutta un'altra storia. Aristotele afferma in *Categorie* 7 b 31-33 che tale problema non è "ancora" scientifico, intendendo, seguo la traduzione critica di Giorgio Colli (1917 - 1979) (Aristotele, 1955), che «non esiste una scienza di tale quadratura, anche se esiste il problema come oggetto del sapere»; si potrebbe supporre che Dante abbia fatto uso di queste affermazioni, più che di quelle di Boezio che, invece, al riguardo non è proprio preciso, proprio commentando il precedente passo di Aristotele. Boezio afferma, infatti, che il problema è stato risolto; egli fa riferimento senz'altro alla misura di π che si suole far risalire al matematico greco Briso o Brisone di Eraclea (ca. $^-$450 - $^-$390), condannata da Aristotele e addirittura da questi ridicolizzata, ma accettata da molti geometri. Va detto, in realtà, che il contributo di Brisone a questo tema è ancora molto discusso e non del tutto chiarito. Il valore proposto da Brisone è 22/7, che corrisponde al valore massimo dei due estremi fissati successivamente per π da Archimede ($^-$287 ca. - $^-$212), cioè: 3+10/71 e 3+1/7. [In realtà, secondo alcuni studiosi, Brisone non pare far cenno al valore 22/7, limitandosi a dire che tra il quadrato inscritto e quello circoscritto a un cerchio, ce n'è uno equiesteso al cerchio: si vedano i commenti di Gino Loria (1862 - 1954) (Loria, 1914, pagg. 96-97)].

Ora si apre un giallo piuttosto complesso.
Dante aveva letto Archimede? Sembra difficile.
Se anche non lo aveva letto, poteva conoscere i calcoli del Siracusano per sentito dire? È possibile.
Dante accettava davvero la misura 22/7, molto diffusa nella sua epoca, ma rifiutata dai geometri più sofisticati? Se Dante afferma che tale rapporto esatto non esiste nel Par., quale è il calcolo esatto da fare in Inf. XXIX 7-9 circa la famosa misura delle bolge circolari?
Come mai Dante, fedele lettore di Boezio, non accetta il valore da questi suggerito per π?
E così via.
Si potrebbe rispondere a ciascuna domanda a suon di date: traduzioni di Archimede furono compiute dal frate fiammingo Guglielmo di Mörbeke (1215 - 1286), è vero, ma esse circolarono con molta difficoltà; per esempio, ne ebbe in mano una rarissima Nicolò Fontana da Brescia (il Tartaglia) (1499 - 1557) che nel 1543 e nel 1565 fece credere effettuate da lui, appunto, traduzioni di Guglielmo (l'auto-attribuzione, elemento caratteristico del pur eccellente matematico bresciano, fu scoperto solo nel 1884, quando venne rinvenuta un'altra rara traduzione di Guglielmo nella biblioteca Vaticana) (Loria, 1929; Maracchia, 1979).
A complicare le cose sta il fatto che Dante conosceva Brisone: lo cita, infatti in Par. XIII 121-126, addirittura con Parmenide di Elea ($^-$VI - $^-$V sec.), con Melisso di Samo (ca. $^-$470 - 430), e altri grandissimi (Andriani, 1981, pagg. 145-146), ma con toni negativi, come dimostrazione del fatto che ragionamenti sbagliati stravolgono l'idea stessa di verità (Par., XIII, 124-126):

…
E di ciò sono al mondo aperte prove
Parmènide, Melisso, e Brisso, e molti,
li quali andavano e non sapean dove.
…

La storia di tutta la questione è entusiasmante e non ha, per ora, finale univoco.

Proseguendo nella ricerca di altri passi a carattere geometrico, troviamo nella *Divina Commedia* paragoni, esempi o parafrasi per le quali, appunto, il campo di riferimento è la geometria, anche quando avrebbe potuto essere qualsiasi altro.
Per esempio, in Par. XIII 88-101 si sta discutendo il problema seguente: c'è contraddizione tra la sapienza perfetta di Adamo e di Cristo (ca. ¯7 - 30), e la sapienza di Salomone (ca. ¯1011 - ¯931)? Tutta la questione è interessante, ma io punto l'attenzione specificamente sui versi 95-102:

…
…el fu re, che chiese senno
acciò che re sufficiente fosse;

non per sapere il numero in che enno
li motor di qua su, o se necesse
con contingente mai necesse fenno;

non, si est dare primum motum esse,
o se del mezzo cerchio far si pote
trïangol sì ch' un retto non avesse.
…

Troviamo, tra le altre, due affermazioni, l'una tratta dalla fisica e l'altra dalla geometria:
- è possibile che vi sia un moto primo, cioè a sua volta non causato da un altro moto;
- è possibile che esista un triangolo inscritto in una semicirconferenza ma non rettangolo.

Ebbene, Dante le prende come esempio palese di qualche cosa di falso perché contraddicono alla modalità della necessità logica:
- se c'è un moto, allora c'è anche necessariamente qualche cosa che l'ha generato, una causa;
- se un triangolo è inscritto in una semicirconferenza, allora necessariamente quel triangolo è rettangolo cioè ha un angolo retto.

Ora, mentre l'affermazione di carattere fisico è legata al discorso che si sta facendo (e porta, come ben noto, alla esistenza di un unico Ente in grado di causare senza una precedente causa, un Motore a sua volta Immobile), come campo di riferimento analogico, per prelevare un esempio di qualche cosa di altrettanto necessario, Dante avrebbe potuto scegliere qualsiasi altro dominio, anche e soprattutto del mondo dell'esperienza. Sceglie la geometria perché gli è facile, consono, immediato … E forse perché, insisto, quel tipo di competenze era diffuso e ovvio tra i letterati dell'epoca e tra le persone colte.
Si noti anche lo stile di queste affermazioni, pedante e scolastico, ripetitivo: sembrano voler richiamare alla mente un insegnamento accademico cattedratico; ed è verosimile che questioni di filosofia e di teologia venissero davvero insegnate così; la geometria sembra più pertinente a quei campi che non ad altri.
A conferma di quanto asserito, vediamo anche i seguenti versi (Par. XVII 13-15):

…
"O cara piota mia, che sì t'insusi,
che come veggion le terrene menti
non capere in triangol due ottusi,

così vedi le cose contingenti
anzi che sieno in sé, mirando il punto
a cui tutti li tempi son presenti;
…

Dante ha appena incontrato il suo nobile trisavo crociato Cacciaguida e intende dirgli che lo vede così elevato, così in alto con il suo spirito che, così come banalmente le menti umane vedono con assoluta certezza che un triangolo non può avere due angoli ottusi, Cacciaguida vede le cose del futuro prima che avvengano (l'immagine è a dir poco stupenda: una specie di big bang temporale, un punto di assoluta contemporaneità, prima dell'inizio della freccia temporale).
Ancora una volta, dovendo dare un esempio di impossibilità logica, Dante ricorre a un esempio geometrico (è il teorema XVII del I libro degli *Elementi* di Euclide, enunciato ben 17 volte nelle opere di Aristotele e dimostrato per intero nella *Metafisica* 1051a, 24-25; enunciato ma non dimostrato, come sempre, da Boezio).

3. Conclusione e cenni al Dante astronomo e musico.

Evito qui ogni riferimento a Dante astronomo, tolemaico *e* aristotelico (scrivo questa congiunzione con enfasi particolare in modo consapevole, perché ci sarebbe parecchio da discutere …), il che mi porterebbe assai lontano. Ma non senza ricordare che, per poter comprendere e spiegare il sistema delle sfere concentriche necessarie a concepire il sistema aristotelico, occorre qualche non banale riflessione. D'altra parte, a tale tema è dedicato un contributo specifico in questo stesso testo.

Non solo alla matematica (aritmetica e geometria) e all'astronomia sono rivolte le attenzioni di Dante, per quanto riguarda le quattro scienze del quadrivio, ma anche alla quarta, la musica.
Non mi addentro in questo tema, per quanto di estremo interesse, dato che un contributo esplicito in questo testo ne parla; mi limito a citare alcuni saggi che ho trovato significativi (Salvetti, 1971; Pirrotta, 1984, 1994; Mortara, 2004).

Ringraziamenti
Esprimo un ringraziamento sentito al referee che ha accuratamente letto una versione precedente di questo testo, dandomi suggerimenti colti e opportuni.

Bibliografia

Andriani, B. (1981). *Aspetti della scienza in Dante*. Firenze: Le Monnier.
Alighieri, D. (1958). *La Divina Commedia*. A cura di N. Sapegno. Firenze: La Nuova Italia.
Aristotele (1955). *Organon*. Traduzione e commento di Giorgio Colli, Bari: Laterza. [Nuova edizione: (2003). Milano: Adelphi].
Carruccio, E. (1964). Il valore ascetico della matematica nel pensiero di S. Agostino. *Studium*, dicembre.
D'Amore, B. (1991). Cenni sulla presenza della matematica nell'opera di Dante. In E. Pasquini (Editor), *Dante e l'enciclopedia delle scienze*. Atti del Convegno omonimo. Bologna: Clueb.
D'Amore, B. (1993). Alcuni cenni sulla presenza della Matematica nella Divina Commedia. *Cultura e scuola*, 127, 145-161. [Ristampato (1993) in *Alma Mater Studiorum*, *7*(1)40-68 (in italiano), 69-86 (in inglese)]. [Ristampato in B. D'Amore & F. Speranza (Eds.) (1995), *La matematica e la sua storia*. Milano: Angeli].
D'Amore, B. (1995). Probabilità, logica formale e geometria: contributi all'esegesi di alcuni passi della Commedia. In P. Boyde & V. Russo (Eds.), *Dante e la Scienza*. Atti del Convegno omonimo. Ravenna: Longo. 91-108.

D’Amore, B. (2020). *La matematica nell’opera di Dante Alighieri*. Prefazioni di U. Bottazzini e di E. Pasquini. Bologna: Pitagora.
D’Amore, B. (2012). Spigolature (minime) dantesche su temi matematici. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *35B*(4), 459-476.
Loria, G. (1914). *Le scienze esatte nell’antica Grecia.* Milano: Hoepli.
Loria, G. (1929). *Storia delle Matematiche*. Vol. I. Torino: Sten.
Maracchia, S. (1979). Dante e la matematica. *Archimede*, 4, 195-208.
Mortara, G. (2004). I canti polifonici nella Divina Commedia. *Sotto il Velame*, 4(67-71).
Pirrotta, N. (1984). *Musica tra Medioevo e Rinascimento*. Torino: Einaudi.
Pirrotta, N. (1994). Poesia e musica. In L. Pestalozza (Editor), *La musica nel tempo di Dante*. Firenze: La Nuova Italia
Salvetti, G. (1971). La musica in Dante. *Rivista italiana di musicologia*, 6, 160-204.