TESI IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA • Volume 2

Miglena Asenova

# Definizione categoriale di Oggetto matematico in Didattica della matematica

Prefazione di
*Ferdinando Arzarello*

Pitagora Editrice Bologna

TESI IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA • Volume 2

**Miglena Asenova**

# Definizione categoriale di Oggetto matematico in Didattica della matematica

**Tesi di dottorato in**
***Matematica e Scienze Computazionali***
**Dipartimento di Matematica**
**Università di Catania**

Prefazione di
*Ferdinando Arzarello*

Pitagora Editrice Bologna

Collana: Tesi in Didattica della Matematica
Diretta da: Bruno D'Amore
Volume 2

In questa collana:

1. **Maura Iori**: *La dimensione semio-cognitiva nell'apprendimento della matematica* (2021)
2. **Miglena Asenova**: *Definizione categoriale di Oggetto matematico in Didattica della matematica* (2021)
3. **George Richard Paul Santi**: *Changes of meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: a comparison between semiotic perspectives* (2022)

ISBN 88-371-2145-7



Stampa: Pitagora Editrice S.r.l., Via del Legatore 3, 40138 Bologna, Italy

http://www.pitagoragroup.it
e-mail: pited@pitagoragroup.it

*Al mio Maestro, che mi ha insegnato la navigazione in mare aperto.*

# Indice

**Prefazione**

**Premessa**

**1. Introduzione** ........................................................................................ **1**
1.1. Motivazione della ricerca ........................................................................ 1
1.2. Struttura della tesi e indicazioni utili per la lettura .............................. 4

**2. La questione ontologica in filosofia della didattica della matematica** ......... **7**
**3. Domande di ricerca** .................................................................................. **17**

**4. Considerazioni metodologiche generali** ................................................. **19**
4. 1. Contestualizzazione della ricerca ......................................................... 19
4. 2. Quadro generale della metodologia ..................................................... 19
4. 3. Metodologia generale della presente ricerca ........................................ 21

**PRIMA PARTE** ........................................................................................... **25**

**5. Gli oggetti "didattici" in didattica della matematica** .............................. **27**
5. 1. Analisi .................................................................................................. 27
5. 1. 1. Definizioni di oggetto matematico in didattica della matematica ........ 27
5. 1. 2. "Oggetti" in didattica della matematica dal punto di vista prasseologico o in riferimento alla formazione degli insegnanti ........................................... 30
5. 1. 3. Riflessioni di natura metateorica e ontologica in riferimento agli oggetti della didattica della matematica ........................................................ 31
5. 2. Sintesi ................................................................................................... 37

**6. Alcuni esempi di oggetti matematici specifici della didattica della matematica** ..................................................................................................... **39**
6. 1. Questioni metodologiche: l'approccio alla dualità processo-oggetto in Sfard (1991) ......................................................................................................... 42
6. 1. 1. L'approccio alla dualità processo-oggetto in Dubinsky (1991) ........... 44
6. 1. 2. Il contrasting tra gli approcci di Sfard e Dubinsky ............................. 45
6. 1. 3. La reificazione a confronto con l'incapsulamento .............................. 45
6. 1. 4. Il ruolo delle rappresentazioni e della nominalizzazione nella reificazione e nella condensazione .................................................................. 47

6. 1. 5. La dualità operazionale/strutturale in didattica della matematica........49
6. 2. Esempi di oggetti matematici specifici della didattica della matematica ....51
6. 2. 1. Divisione per ripartizione e per raggruppamento................................51
6. 2. 2. La teoria didattica dell'aritmetica ......................................................57
6. 2. 3. Lo zero come oggetto didattico..........................................................64
6. 2. 4. Concezioni "algebrico-grafica" e "curvo-algebrica" di funzione ........69
6. 2. 5. Dimostrazione e argomentazione........................................................78
6. 2. 6. La logica della dimostrazione in didattica della matematica ...............90
6. 3. Analisi .....................................................................................................95
6. 4. Sintesi......................................................................................................98

**7. Concetti ........................................................................................................99**
7. 1. Riflessioni preliminari ............................................................................99
7. 2. Questioni metodologiche ........................................................................99
7. 3. Concetti in filosofia................................................................................100
7. 3. 1. Natura e funzione dei concetti in ambito filosofico ..........................100
7. 3. 2. Le dualità concetto-oggetto e senso-denotazione in Frege (concetti come segni linguistici) .........................................................................109
7. 3. 2. 1. Oggetti e concetti.........................................................................110
7. 3. 2. 2. Senso e denotazione ....................................................................113
7. 4. Concetti in didattica della matematica con cenni al versante psicologico .118
7. 4. 1. Costruzione dei concetti per astrazione (concetti come rappresentazioni mentali) ..........................................................................................119
7. 4. 1. 1. Concetti per astrazione dalle azioni (astrazione riflettente).......120
7. 4. 1. 1. 1. Astrazione riflettente e dualità processo-oggetto ...............120
7. 4. 1. 1. 2. Il *procept*: una sintesi tra processo e oggetto tramite il simbolo ...........................................................................................123
7. 4. 1. 2. Concetti per astrazione dagli oggetti (astrazione strutturale).....126
7. 4. 1. 3. Concetti per astrazione complementare da oggetti e processi (astrazione rifletturale) ..............................................................128
7. 4. 2. Concetti come invarianti situazionali (concetti come abilità)............135
7. 4. 2. 1. I campi concettuali di Vergnaud ................................................136
7. 4. 3. Concetti e concezioni: le dimensioni soggettiva e oggettiva dei concetti ..........................................................................................139
7. 4. 4. I concetti scientifici in Vygotskij .......................................................155
7. 5. Analisi ....................................................................................................157
7. 6. Sintesi.....................................................................................................162

**8. Definizioni di oggetto matematico in didattica della matematica ...........165**
8. 1. Riflessioni preliminari ...........................................................................165
8. 2. Questioni metodologiche .......................................................................169
8. 3. Analisi ....................................................................................................173
8. 3. 1. Le sette definizioni esaminate............................................................173

Definizione 1 .......... 174
Discussione in riferimento alle domande (1')-(7') .......... 175
Definizione 2 .......... 177
Discussione in riferimento alle domande (1')-(7') .......... 177
Definizione 3 .......... 178
Discussione in riferimento alle domande (1')-(7') .......... 183
Definizione 4 .......... 185
Discussione in riferimento alle domande (1')-(7') .......... 192
Definizione 5 .......... 194
Discussione in riferimento alle domande (1')-(7') .......... 198
Definizione 6 .......... 201
Discussione in riferimento alle domande (1')-(7') .......... 222
Definizione 7 .......... 224
Discussione in riferimento alle domande (1')-(7') .......... 230
8. 4. Sintesi .......... 231
8. 5. Conclusioni .......... 236

**9. Oggetti in filosofia della matematica .......... 239**
9. 1. Riflessioni preliminari .......... 239
9. 2. Questioni metodologiche .......... 239
9. 3. Analisi .......... 240
9. 3. 1. Oggetti matematici e sistemi assiomatici .......... 240
9. 3. 2 Tentativi di fondare la matematica .......... 242
9. 3. 2. 1. La risposta fondazionale logicista .......... 243
9. 3. 2. 2. La risposta fondazionale formalista .......... 246
9. 3. 2. 3. Critiche al logicismo e al formalismo .......... 252
9. 3. 2. 4. La risposta fondazionale intuizionista .......... 254
9. 3. 2. 5. Bourbaki .......... 262
9. 3. 3. Una molteplicità di approcci .......... 265
9. 3. 3. 1. Diverse correnti in filosofia della matematica .......... 267
9. 3. 3. 1. 1. La prospettiva costruttivista .......... 267
9. 3. 3. 1. 2. La prospettiva realista .......... 269
9. 3. 3. 1. 3. La prospettiva naturalista .......... 271
9. 3. 3. 1. 4. La prospettiva quasi-empirista .......... 272
9. 3. 3. 1. 5. La prospettiva dell'embodied cognition .......... 278
9. 3. 3. 1. 6. La prospettiva socioculturale .......... 281
9. 3. 3. 1. 7. La prospettiva fenomenologica .......... 283
9. 3. 3. 2. La filosofia della pratica matematica .......... 288
9. 4. Sintesi .......... 291
9. 5. Conclusioni .......... 295
Risposta alla domanda di ricerca D1 .......... 297

**SECONDA PARTE** ........................................................................**301**

**10. Quadro teorico** ........................................................................**303**
10. 1. Introduzione ........................................................................303
10. 2. Questioni metodologiche ........................................................................304
10. 3. Il paradigma di ricerca ........................................................................305
10. 3. 1. Quale filosofia della matematica? ........................................................................306
10. 3. 1. 1. Due dualità fondamentali in filosofia della matematica ...........306
10. 3. 1. 1. 1. Approccio realista versus approccio pragmatico .............307
10. 3. 1. 1. 2. Approccio realista versus approccio idealista .................309
10. 3. 1. 1. 3. Filosofia analitica e pratica della matematica ..................311
10. 3. 1. 2. La filosofia sintetica della matematica contemporanea ...........314
10. 3. 1. 2. 1. Digressione sui concetti di Fundierung e facticity in Rota ........................................................................321
10. 3. 1. 2. 2. Questioni ontologiche ........................................................................322
10. 3. 1. 2. 3. Questioni epistemologiche ........................................................................325
10. 3. 1. 2. 4. Aspetti fenomenologici ........................................................................327
10. 3. 2. Considerazioni riguardo alle ripercussioni della filosofia sintetica della matematica contemporanea sulla presente ricerca ...............................329
10. 3. 2. 1. Questioni ontologiche ........................................................................329
10. 3. 2. 2. Questioni epistemologiche ........................................................................332
10. 3. 2. 3. Il problema gnoseologico ........................................................................334
10. 4. La questione semiotica ........................................................................339
10. 4. 1. La definizione di segno e il concetto di semiosi .............................339
10. 4. 2. Il triangolo epistemologico: la necessità di un'interpretazione ........348
10. 4. 3. Il pensiero matematico nell'ambito della teoria dei registri semiotici ........................................................................350
10. 4. 4. Il *semiotic bundle* ........................................................................354
10. 5. Una prospettiva ermeneutica ........................................................................355
10. 5. 1. Modelli ermeneutici ........................................................................358
10. 6. La questione del significato ........................................................................362
10. 7. Il ragionamento diagrammatico ........................................................................366
10. 8. Cenni al ruolo del linguaggio ........................................................................367
10. 9. Il ruolo del linguaggio categoriale ........................................................................375
10. 10. Metafore e analogie ........................................................................377
10. 11. Considerazioni conclusive ........................................................................380

**11. Strumenti matematici categoriali per il quadro teorico e loro possibili interpretazioni** ........................................................................**387**
11. 1. Questioni metodologiche ........................................................................387
11. 1. 1. Modelli e interpretazioni ........................................................................388
11. 1. 2. Convenzioni metodologiche ........................................................................394
11. 2. Modelli e interpretazioni categoriali in didattica della matematica .........394

►Modellizzazione (1) ....................................................................399
►Interpretazione (1)......................................................................403
►Interpretazione (2)......................................................................405
►Interpretazione (3)......................................................................407
►Interpretazione (4)......................................................................408
►Interpretazione (5)......................................................................409
►Interpretazione (6)......................................................................414
►Interpretazione (7)......................................................................415
►Interpretazione (8)......................................................................417
►Interpretazione (9)......................................................................419
►Interpretazione (10)....................................................................421
11. 3. Conclusioni ..........................................................................423
Risposta alla domanda di ricerca D2 ..............................................427

**TERZA PARTE** ..........................................................................**433**

**12. Definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica**..........................................................................................**435**
12. 1. Introduzione ..........................................................................435
12. 2. La definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica nel linguaggio categoriale.............................................436
12. 2. 1. Modello generale di definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica.................................................................437
►Interpretazione (11) ..............................................................438
►Interpretazione (12) ..............................................................442
12. 2. 2. Due casi particolari del modello generale di definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica ................................442
12. 3. Conclusioni ..........................................................................445
Risposta alla domanda di ricerca D3 ..............................................447

**13. Strumenti metodologici** ..............................................................**451**
13. 1. Questioni metodologiche ........................................................451
13. 2. Il modello SKTR.......................................................................452
13. 2. 1. Il pensiero (matematico) come fascio: il modello S........................454
13. 2. 1. 1. Un esempio di ricorso al modello S tratto dal presente lavoro 458
13. 2. 2. Fasci sopra modelli di Kripke: il modello SK................................462
13. 2. 2. 1. Modelli di Kripke intuizionistici ............................................463
13. 2. 2. 2. Modelli di Kripke modali .......................................................466
13. 2. 2. 3. Un esempio di ricorso al modello SK tratto dal presente lavoro ...........................................................................................................470
13. 2. 3. I topoi: il modello SKT ...............................................................472

13. 2. 3. 1. Un esempio di ricorso al modello SKT tratto dal presente lavoro ....................................................................................................................482
13. 2. 4. Le superfici di Riemann ....................................................................486
13. 2. 4. 1. Un esempio di ricorso al modello TR tratto dal presente lavoro ....................................................................................................................489
13. 3. Conclusioni ..............................................................................................490

**14. Conclusioni** ..............................................................................................**493**
14. 1. Riflessioni conclusive: uno sguardo indietro e uno in avanti ..................493
14. 2. Riflessione critica sul ricorso agli strumenti matematici in didattica della matematica ..............................................................................................497

**Ringraziamenti** ..............................................................................................**503**

**Bibliografia** ..............................................................................................**505**

# Prefazione

**Ferdinando Arzarello**

*Mais ces changements me semblent tous dans la nature d'une "continuité" essentielle — ils n'ont jamais placé le mathématicien, attaché (comme tout un chacun) aux images mentales familières, devant un dépaysement soudain.*
*(A. Grothendieck, La topologie ou l'arpentage des brumes)*

Ogni insegnante di matematica ha davanti a sé il problema di come fare apprendere efficacemente ai propri allievi le conoscenze matematiche previste nel loro piano di studi: da un lato, possiede le conoscenze e i metodi matematici che deve insegnare (per esempio l'Aritmetica) nelle versioni per così dire dotte, che si trovano nei sacri testi della disciplina (la scuola didattica francese parla di 'sapere sapiente'), dall'altro ha presenti teorie e strumenti didattici opportuni (per esempio le teorie costruttiviste dell'apprendimento, i vecchi regoli di G. Cuisenaire o il recente TouchCounts di N. Sinclair) per la trasposizione didattica di tali conoscenze e metodi (il 'sapere da insegnare'). In questo senso, ogni insegnante ha davanti a sé due tipi di 'oggetti': quelli matematici e quelli specifici della didattica della matematica. I due devono certamente parlarsi, ma come questo si possa realizzare non è certo impresa facile: di fatto si tratta di un problema ancora aperto, cui le varie scuole di ricerca in didattica della matematica hanno dato soluzioni diverse e spesso parziali. Questo accade in realtà anche per gli oggetti matematici del sapere sapiente, ma dal versante del sapere insegnato il problema è molto più serio. Infatti, da un lato la questione ontologica degli oggetti della matematica (il *che cosa*?) è risolta in vari modi da chi si occupa di fondamenti della disciplina nell'ambito di precise istanze epistemologiche (il *come*?); dall'altro chi lavora alla definizione ontologica degli oggetti propri della didattica della matematica è particolarmente attento ad aspetti di natura etica, come il valore sociale, culturale e politico della formazione matematica (il *perché*?), mentre gli aspetti epistemologici non sono sempre così presenti. La dimensione più strettamente matematica rischia perciò di essere trascurata o assente, il che può rappresentare un ostacolo serio per definire gli oggetti della didattica della matematica in modo ontologicamente soddisfacente. Questo problema è bene messo in luce da M.A., che scrive:

> Il legame dei suoi [della didattica della matematica, N.d.A.] oggetti di studio con quelli corrispondenti della matematica non ha finora ricevuto la dovuta attenzione nelle ricerche e dunque nemmeno è stata mai affrontata la problematica di una

> definizione generale di oggetto matematico specifico della didattica della matematica. (p. 9)

L'autrice invece ritiene che è proprio dall'attività matematica che si possono derivare un'ontologia e una epistemologia per la didattica della matematica, e non viceversa. È questa dimensione, anche pragmatica, che deve condurre a una definizione di 'Oggetto Matematico Specifico della Didattica della Matematica' (OMSDM). Ed è precisamente di questa definizione concreta, che ha un carattere ontologico, epistemologico e pragmatico, e della sua giustificazione che tratta la sua tesi.
Per questo M.A. elabora in primo luogo dei criteri cui deve soddisfare una tale definizione e, visto che non trova alcun costrutto tra quelli correnti in filosofia della matematica che siano in grado di soddisfarli, ricorre alla filosofia sintetica della matematica contemporanea di Fernando Zalamea, matematico e studioso dei fondamenti dell'Università di Bogotà, che a sua volta si ispira alle riflessioni fondazionali del grande matematico Alexander Grothendieck (1928–2014), che lui definisce 'maestro universale della matematica' e il cui pensiero troviamo anche nel lavoro di M.A. Nelle sue opere F.Z. propone una svolta verso una comprensione sintetica (come antonimo di analitica) della matematica più recente, che si basa ampiamente sulla teoria matematica delle categorie (di qui il suo debito a Grothendieck, uno dei padri di questa teoria). È questa interpretazione categoriale che gli permette di evidenziare importanti tensioni dialettiche e dinamiche nell'attività matematica, che tendono ad essere oscurate, e talvolta del tutto cancellate, dalla consueta comprensione analitica e formale, tipica della filosofia della matematica più tradizionale, da cui traggono ispirazione quasi tutti gli studi sui fondamenti della matematica da G. Frege (1848–1925) in poi. Egli prospetta così una visione dell'evoluzione del pensiero matematico attraverso un processo di crescita a spirale, che rompe le consuete prospettive riduttive e lineari in cui la comprensione matematica viene intesa in modo iterativo.
È proprio questa visione dialettica e dinamica della matematica prospettata da F.Z. che spinge M.A. a tracciare nella sua tesi un cammino nuovo verso una definizione di OMSDM in grado di soddisfare ad alcuni criteri, individuati come necessari; questi (p. 307) richiedono che la definizione:

(1) sia compatibile con una visione statica, ma anche con una visione dinamica di teoria in didattica della matematica;
(2) tenga conto del rapporto tra gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica come disciplina e gli oggetti matematici della matematica come disciplina, nella loro versione formale;
(3) tenga conto degli aspetti ontologici specifici della didattica della matematica come disciplina, oltre che di quelli più prettamente concettuali matematici;
(4) sia sufficientemente generale da poter astrarre dall'approccio epistemologico nelle diverse teorie in didattica della matematica.

(5) sia in grado di inquadrare tecnicamente la modalità relazionale con la quale si formano i complessi concettuali che costituiscono gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica.

È questo un compito davvero arduo, che non spaventa certo la nostra studiosa, che non esita ad affrontare il problema in modo aperto e innovativo rispetto alle soluzioni più tradizionali, nessuna delle quali permette, per un motivo o per l'altro, di soddisfare pienamente a tutti questi criteri. Con pazienza e sagacia degne di Ulisse, intraprende un viaggio attraverso le principali definizioni di oggetto matematico avanzate dal 1991 ad oggi dai più prestigiosi ricercatori in didattica della matematica, da Y. Chevallard ad A. Sfard (cap. 8), e le confronta tra di loro rispetto ai criteri individuati. Il viaggio tocca sette mete e il resoconto dei dati raccolti è riassunto nella Tabella 6 (p. 242) e nel diagramma della Figura 29 (p. 245), entrambi ampiamente commentati. Essi mostrano che nessuna delle definizioni esaminate soddisfa tutti i criteri utili ai fini di una definizione appropriata di OMSDM. M.A. scopre inoltre una caratteristica che contraddistingue tutte le definizioni esaminate, cioè il fatto che esse sono formulate come definizioni generali di oggetto matematico *tout court*, valide indipendentemente dal fatto che si prenda in considerazione la matematica o la didattica della matematica come riferimento. Di per contro, tutte le definizioni considerate presentano alcune caratteristiche comuni condivise: la natura epistemica, la dinamicità e una posizione pragmatica nei confronti del loro significato; inoltre gli aspetti semiotici sono presenti in sei definizioni su sette.
A questo punto, vista la risposta non specifica rispetto alla natura degli OMSDM che ha trovato nelle definizioni correnti in didattica della matematica, la nostra ricercatrice decide di verificare se e in quale misura le caratteristiche degli oggetti matematici che si evincono dalle definizioni date in didattica della matematica trovano una qualche corrispondenza nelle definizioni di oggetto matematico che si incontrano nella matematica come disciplina. Perciò intraprende un secondo viaggio tra le molte proposte date in merito dalle diverse scuole fondazionali della matematica a partire da quelle nate a cavallo tra Ottocento e Novecento giù giù fino ai nostri giorni. Il viaggio è oggetto del Cap. 9 e tocca 12 mete di vario tipo: esso si conclude con l'osservazione che gli oggetti matematici descritti in filosofia della matematica presentano caratteristiche molto diverse tra loro e solo alcuni di essi possono essere considerati compatibili con le definizioni di oggetto matematico incontrate nel primo viaggio. Di fatto le definizioni di oggetto matematico fornite in didattica della matematica fanno riferimento a una tipologia di oggetto matematico che non esiste come tale in filosofia della matematica, ma che ha molti tratti in comune con un ipotetico oggetto di studio della *filosofia della pratica matematica*.
Il sugo dei due viaggi porta la nostra viaggiatrice indefessa ad approdare infine alla seguente domanda: a quale tipo di filosofia della pratica matematica fare riferimento ai fini di ottenere

> una risposta adeguata alle esigenze ontologiche comuni a tutte le definizioni di oggetto matematico in didattica della matematica, di tenere conto della dinamicità degli oggetti matematici, del carattere pragmatico del loro significato, della loro dimensione epistemica, senza trascurare quella semiotica? (p. 305)

In un certo senso, Ulisse si trasforma in Kant, che si chiede nei suoi Prolegomeni come sia possibile una scienza pura della natura; analogamente qui si tratta di definire una scienza 'pura' che riguardi gli OMSDM. Scrive infatti M.A.:

> [Rispondere a questa domanda] consentirebbe di inquadrare gli oggetti matematici dal punto di vista della filosofia della matematica in maniera tale che la loro definizione si accordi con le esigenze di una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica. (p. 305)

Definiti così i criteri in modo per lei soddisfacente (p. 308), M. A. può finalmente dedicarsi alla ricerca di una definizione precisa di OMSDM. Dapprima intraprende la costruzione di un quadro teorico che sia coerente con tali criteri (seconda parte della tesi: capp. 10 e 11); segue la definizione di OMSDM (terza parte, cap. 12), coerente conseguenza del quadro teorico precedentemente preparato.
La seconda parte costituisce il cuore della ricerca mentre nella terza parte se ne raccolgono i frutti. Il punto di partenza è l'individuazione di una specifica filosofia della pratica matematica vera e propria, da interpretare nell'ambito della didattica della matematica attraverso una integrazione con elementi propri di quest'ultima, di carattere gnoseologico, semiotico ed ermeneutico, relativi agli oggetti propri della didattica della matematica. Essa è anche la sua parte più complessa e irta di difficoltà di lettura, soprattutto per chi non abbia una qualche conoscenza della teoria delle categorie. Infatti il modo nuovo di guardare agli oggetti matematici della teoria delle categorie è proprio la 'svolta ontologica' che permette la definizione di un quadro teorico che soddisfi ai criteri individuati nella prima parte e la conseguente definizione di OMSDM. Qui F. Zalamea, con la sua filosofia sintetica, e A. Grothendieck, con la sua nozione di fascio e poi di topos, unificante e chiarificatrice in matematica[1] vengono in aiuto a M.A., che osserva:

> Zalamea fa risalire questo cambio di prospettiva ontologica al lavoro di Grothendieck, che in matematica ha avuto un effetto simile a quello che ebbe la nascita della teoria della relatività in fisica; infatti, è a Grothendieck che Zalamea attribuisce la 'svolta einsteiniana' […] in matematica. Tale svolta consiste nel mettere al centro dell'attenzione il movimento, il transito degli oggetti, come nella teoria della relatività viene messo al centro il movimento degli osservatori; ciò che in tale 'matematica relativa' […] diventa centrale, è l'individuazione di invarianti appropriati che 'si celano' dietro ai transiti. (p. 332)

[1] Grothendieck (Recoltes et Semailles, Manoscritto inedito, p. 52; reperibile online: https://jmrlivres.files.wordpress.com/2009/11/recoltes-et-semailles.pdf) usa la metafora dell'arpentage des brumes (mappare le nebbie) per indicare il ruolo dei fasci nell'unificare le diverse geometrie, così come nello sposare i numeri con le grandezze (épousailles du nombre et de la grandeur).

È questa l'idea chiave che ispira tutto il lavoro della tesi: una definizione categoriale degli OMSDM ne cattura coerentemente tutti gli aspetti richiesti dai criteri definiti nella prima parte, tra i quali quello della dinamicità ha un ruolo fondamentale.
L'autrice è ben consapevole delle difficoltà che questi argomenti presentano, soprattutto in quanto richiedono di guardare agli oggetti matematici in modo nuovo e rivoluzionario rispetto alla tradizionale concezione insiemistica cui si è abituati. M.A. si trasforma allora in una guida insuperabile e, novello Virgilio (quante vesti indossa nel suo lavoro!), accompagna il lettore con un testo in cui le inevitabili difficoltà sono spezzettate e presentate con il continuo ricorso a interpretazioni intuitive, ma non per questo meno rigorose, e all'uso di utilissimi diagrammi, che sfruttano opportunamente in questo senso il linguaggio delle categorie come scienza dei diagrammi per chiarire i vari concetti introdotti. In questo il lavoro riprende importanti idee di C.S. Peirce sul ragionamento diagrammatico, di cui negli ultimi anni si è riappropriata la didattica della matematica. Questo aspetto ci consente di introdurre degli elementi di ragionamento diagrammatico all'interno della didattica della matematica come disciplina, il che può avere dei vantaggi teorici importanti, a causa della "osservabilità" diagrammatica delle relazioni coinvolte.
Nell'economia della tesi, il linguaggio categoriale, in quanto diagrammatico, è un metalinguaggio, che descrive e spiega il diagramma, ma tale descrizione/spiegazione non può sostituire il diagramma. Questo aspetto è spiegato nella tesi con una bella analogia, in cui M.A. ricorre al celebre problema dei ponti di Königsberg e alla soluzione che ne diede L. Euler (p. 400 e ss.). Le figure in quelle pagine illustrano sia la città come rappresentata in una mappa del 1652 (Fig. 39) sia il grafo astratto elaborato da Euler nel 1636 (probabilmente a partire da una qualche mappa analoga) per risolvere il problema. Esso segna la nascita dell'odierna teoria dei grafi, della quale Euler enunciò le prime definizioni e teoremi. Ora,

> il teorema dimostrato da Euler non parla di ponti, aree della città e di numero di ponti che si affacciano su esse, ma di oggetti astratti (nodi, archi e gradi di nodi) e per essere considerato una soluzione del problema dei ponti di Königsberg deve essere interpretato nel contesto; [si può dire, da un lato, che modellizza il problema in forma generale ed astratta, e dall'altro] per essere considerato una soluzione del problema dei ponti di Königsberg deve essere interpretato nel contesto. (p. 449)

Ebbene, gli

> strumenti categoriali [sono usati nella tesi] nello stesso modo in cui oggi si usano gli strumenti appartenenti alla teoria dei grafi per modellizzare dei fenomeni complessi reali, con l'obiettivo di rendere evidenti le relazioni generali tra gli elementi coinvolti. (p. 403)

e inoltre la trattazione che se ne fa "necessita di un'interpretazione nel linguaggio della didattica della matematica con la sua terminologia e le sue relazioni specifiche" (p. 404). La teoria delle categorie risulta perciò, per usare il linguaggio di Grothendieck, una mappatura astratta adatta a descrivere gli OMSDM. Il capitolo 11 accompagna il lettore passo passo nella costruzione di questa mappatura: essa

> consiste nella messa in corrispondenza di elementi del linguaggio astratto categoriale, che sono via via introdotti, con elementi del linguaggio della didattica della matematica come disciplina. In questo modo le relazioni che valgono in teoria delle categorie potranno ottenere un'interpretazione (o modellizzazione) nell'ambito della didattica della matematica. (p. 400)

Ad ogni passo (ce ne sono ben 11 nel capitolo) l'introduzione dei concetti categoriali è seguita dalla sua interpretazione/modellizzazione, con esempi presi dal contesto della didattica della matematica. Ad esempio, si mostra come "le trasformazioni naturali [tra categorie] possano essere viste come modalità più generali di classificazione delle strategie di *networking* proposte in Prediger, Bikner-Ahsbahs e Arzarello (2008),[2] sulla base della tipologia di "traduzione" a cui ricorrono" (p. 413).

Questo metodo permette di affrontare anche un importante problema gnoseologico riguardante il significato degli oggetti matematici. L'idea di fondo è l'interpretazione di un importante teorema, il cosiddetto Lemma di Yoneda, in base al quale il concetto categoriale di funtore rappresentabile consente di esprimere il fatto che la conoscenza pragmatica dell'oggetto, espressa attraverso la sua conoscenza in contesto, è una conoscenza potenzialmente completa dell'oggetto. Questo significa che

> un oggetto (matematico) può essere interpretato attraverso (o sostituito da) le sue relazioni con il contesto, dove il contesto è costituito dalle relazioni con gli oggetti di una categoria a cui l'oggetto appartiene. Cioè la conoscenza pragmatica dell'oggetto, che si esprime attraverso la sua conoscenza in contesto, è una conoscenza potenzialmente completa dell'oggetto. (p. 415)

Questa proprietà avvicina l'interpretazione categoriale qui affermata sul significato degli oggetti matematici a quelle date, in forma e tempi diversi, da Pierce e Wittgenstein: si afferma infatti un'interpretazione del significato in termini di:

> uso in contesto (reale o potenziale). L'uso di un oggetto (o gli effetti pratici che esso può produrre) sono pensabili solo attraverso le sue relazioni con altri oggetti ed è proprio questo aspetto che può essere interpretato in termini di *funtore rappresantabile*. (p. 415)

Tutto il capitolo 11 è sostanzialmente un itinerario verso la dimostrazione di questa proposizione, che può anche essere espressa in questa forma: "attraverso

---

[2] Prediger, S, Bikner Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM: the international Journal on Mathematics Education, 40*(2), 165–178. doi 10.1007/s1185-008-0086-z

l'immersione di Yoneda è (...) possibile dimostrare [sotto opportune assunzioni] che tramite l'attribuzione di significato pragmatica all'oggetto, cioè attraverso la sua conoscenza in contesto, è possibile accedere a tutti i significati dell'oggetto e quindi conoscerlo completamente" (p. 419).

A questo punto gran parte del lavoro è fatto: non resta che definire l'OMSDM, nonché l'oggetto matematico a esso collegato tramite un linguaggio diagrammatico. Questo è fatto nel capitolo 12, in cui si esemplificano due casi specifici di categorie (la categoria in cui l'insieme di base è ridotto a un singoletto e una categoria in cui l'insieme di base è ordinato) e si illustrano le conseguenze di tali ipotesi sulle relazioni tra la dimensione formale degli oggetti matematici e la loro dimensione pragmatica nell'ambito della pratica matematica. Nel primo caso si ha una frattura totale fra gli aspetti analitici e quelli sintetici, nel secondo caso l'ordinamento permette di introdurre una dimensione dinamica nel modello (si possono ottenere infatti i modelli di Kripke, descritti successivamente nel cap. 13) ed esso è concretamente interpretabile con un costrutto semiotico usato in didattica della matematica, il *semiotic bundle* ([3]), in cui quelli che sono i suoi insiemi semiotici diventano prefasci nell'interpretazione categoriale.

La tesi si conclude con un approfondimento tecnico (cap. 13), in cui si espone, sempre con il linguaggio piano e il più possibile intuitivo cui M.A. ci ha abituati, una sintesi dello strumento principale della filosofia sintetica di F. Zalamea, raccontato dall'autore in un volume non ancora pubblicato al momento della stesura della tesi ([4]) e qui indicato con l'acronimo SKTR (dalle iniziali inglesi di: Prefascio (Sheave), Kripke, Topos, Riemann): esso corrisponde all'acronimo HKTR nel testo spagnolo di Zalamea (prefascio si dice Hace in quella lingua). Si tratta dell'approfondimento del modello di 'arpentage des brumes' proposto da Grothendieck così come è interpretato da Zalamea e cui M.A ha ampiamente attinto, come lei stessa esplicita.

In questo modo l'autrice è stata in grado di rispondere opportunamente alle tre domande di ricerca, poste all'inizio della trattazione, e che, in quanto pienamente soddisfatte, e opportunamente espresse in forma assertoria riassumono il contenuto del suo lavoro:

1. *Criteri cui deve soddisfare una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica.*
2. *Elementi teorici per costruire un quadro teorico di riferimento che soddisfi i criteri del punto 1.*
3. *Definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica nel contesto teorico individuato (2) e che tenga conto dei criteri individuati (1).*

[3] Arzarello, F. (2006). Semiosi as a multimodal process. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), Semiotics, Culture and Mathematical Thinking [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 267–299.

[4] Nel frattempo esso è stato pubblicato: Zalamea, F. (2021). *Modelos en haces para el pensamiento matemático*. Bogotà: Universidad Nacional de Colombia.

Conclude il lavoro una ricca bibliografia, che dimostra l'ampiezza della ricerca di Miglena Asenova, con cui mi complimento per l'ottimo lavoro fatto.
Invito pertanto caldamente coloro che si interessano ai problemi dell'insegnamento della matematica e quanti amano i problemi fondazionali della matematica stessa, a leggere questo lavoro. La fatica che faranno li premierà certo con l'apertura di nuovi orizzonti di riflessione e di pensiero: è quanto è successo a me e auguro a tutti loro.

Torino, 30 agosto 2021

Ferdinando Arzarello

# Premessa

Questo libro racchiude in sé la tesi di dottorato dell'autrice, svolta sotto la guida del prof. Bruno D'Amore e della prof.ssa Cinzia Cerroni, discussa il 20 febbraio 2021 presso l'Università di Catania.
In esso si espone il percorso costruttivo che ha consentito di formulare un nuovo costrutto in didattica della matematica: quello di oggetto matematico specifico della didattica della matematica.
La problematica dalla quale nasce la motivazione per la ricerca esposta nella tesi deriva dalla necessità di chiarire il legame tra gli oggetti matematici della matematica come disciplina e gli oggetti matematici studiati e prodotti in didattica della matematica come disciplina.
La questione ontologica in didattica della matematica viene affrontata a livello generale nell'ambito della filosofia della didattica della matematica, ma di solito in riferimento ad aspetti di natura etica, come il valore sociale, culturale e politico della formazione matematica, e mai in riferimento agli aspetti epistemologici. Quest'ultimo aspetto è motivato dalla grande pluralità di approcci e teorie dell'apprendimento presenti nella disciplina, tra i quali non vi è un accordo su una visione epistemologica unica. Ciò che scompare nelle considerazioni ontologiche in filosofia della didattica della matematica è quindi proprio la dimensione più strettamente matematica, che invece è caratterizzante per essa rispetto ad altre didattiche disciplinari.
Il legame dei suoi oggetti di studio con quelli corrispondenti della matematica, a nostro avviso non ha finora ricevuto la dovuta attenzione nelle ricerche e dunque nemmeno è stata mai affrontata la problematica di una definizione generale di oggetto matematico specifico della didattica della matematica. Nella tesi vengono individuati prima dei criteri che una tale definizione dovrebbe soddisfare, analizzando il problema sia dal punto di vista teorico, sia dal punto di vista più empirico, cioè sulla base di elementi che emergono da analisi di esempi, definizioni e approcci. Data l'impossibilità di accogliere tali criteri nei costrutti già esistenti esaminati, viene di seguito costruito ad hoc il quadro teorico in cui inserire la definizione cercata, in maniera tale che possa soddisfare i criteri individuati, collocando tale quadro teorico nell'ambito dalla filosofia sintetica della matematica contemporanea (Zalamea, 2009/2012a), la quale viene così estesa alla didattica della matematica. Successivamente viene costruito un modello matematico categoriale in grado di supportare il quadro teorico, nel quale viene fornita anche una dimostrazione della fondatezza gnoseologica dell'approccio sintetico agli oggetti.
Infine, viene fornita la definizione cercata in un linguaggio categoriale diagrammatico, che garantisce la sua generalità, formulando anche una sua possibile interpretazione. L'oggetto matematico specifico della didattica della

matematica viene interpretato sia come un insieme di attribuzioni di significato il cui modello è dato dall'insieme dei prefasci che emergono dall'immersione della categoria della pratica matematica, "arricchita" dalla categoria dei risultati in didattica della matematica, nella categoria della pratica della didattica della matematica, sia come metafora strutturale basata su un'analogia stabilita tra un frammento della teoria delle categorie e un frammento della didattica della matematica, rappresentati rispettivamente dalle due dimensioni del quadro teorico: quello specifico della (filosofia) della didattica della matematica e quello basato sul modello matematico. In questa prospettiva la didattica della matematica emerge come una matematica applicata, nel senso evidenziato da D'Amore (2016), il che contribuisce a un'estensione della conoscenza in matematica.

Dal punto di vista operativo, gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica sono dei modelli ermeneutici dinamici, nei quali possono essere distinti due diversi livelli interpretativi: uno prasseologico e uno relativo all'epistemologia della disciplina.

Nell'ultimo capitolo viene introdotto il modello SKTR (Zalamea, 2021) che contiene strumenti teorici che consentono di rendere operativa la definizione in una prospettiva di sue possibili future applicazioni.

# 1. Introduzione

## 1.1. Motivazione della ricerca

Il percorso seguito nella ricerca che ha portato alla stesura della tesi è stato lungo e tortuoso. Esso ci ha indotti a uscire dal sentiero inizialmente intrapreso, poco battuto e ricco di sfide, ma che offriva una certa sicurezza di praticabilità, e ad addentrarmi in una zona impervia in cui la vera sfida è diventata quella di verificare se è possibile tracciare un percorso significativo e coerente seguendo la direzione intrapresa.
La situazione che ha dato origine alla ricerca può essere circoscritta e descritta come segue.
In didattica della matematica si parla molto di dimostrazione: nei convegni internazionali, i *Working Group* su questo argomento sono tra i più numerosi e la produzione scientifica pluridecennale sull'argomento è molto vasta. In tutto ciò, la specificità della dimostrazione studiata dal ricercatore in didattica della matematica, mentre osserva e analizza e interpreta le azioni d'aula durante le ore di matematica, oppure mentre discute con i propri colleghi sull'argomento, emerge di rado come un *oggetto di studio* a sé stante. Ciò che emerge di solito è la considerazione di una forma di ragionamento (di solito si fa riferimento all'argomentazione) che tende verso un ideale (per vari motivi irraggiungibile) di dimostrazione matematica. Tuttavia, ciò che il ricercatore in didattica della matematica studia, analizza e interpreta, non è quell'oggetto matematico ideale, sulla cui natura tra l'altro non c'è un accordo totale, ma è un oggetto di studio specifico della disciplina nell'ambito della quale si svolge la sua attività di ricerca; esso non emerge dall'attività di ricerca del matematico professionista, ma dall'attività di ricerca relativa alle modalità con cui si svolge il processo di insegnamento-apprendimento che ha caratteristiche sue proprie e le cui analisi e interpretazione richiedono l'uso di strumenti e metodi specifici della disciplina.
Vediamo un esempio.
In riferimento alla problematica relativa alla comprensione delle dimostrazioni per assurdo, tipiche della geometria euclidea tramite la quale lo studente viene di solito introdotto alla dimostrazione, Antonini nota che: "When argumentation based on empirical evidence is rejected, only the cogent logic of the proving method guarantees that a statement is proved" (Antonini, 2019, p. 794), mentre dall'altra parte D'Amore, in riferimento a una ricerca sull'apprendimento della dimostrazione, svolta intervistando studenti dei primi anni della scuola secondaria di secondo grado, evidenzia che: "(…) the adherence to Aristotelian logic as a model for natural proof cannot be taken for granted and anyway is not unique" (D'Amore, 2005c, p. 31). Come o in quali termini è dunque possibile parlare di dimostrazione in didattica della matematica, se nemmeno la logica di riferimento

sulla quale si basa il metodo dimostrativo può essere data per scontata? Che cosa si può intendere in generale per "dimostrazione" in didattica della matematica?
Questi primi interrogativi mi hanno condotta a studiare il fenomeno in classe, osservando studenti e insegnanti durante le ore di matematica, costruendo questionari e svolgendo interviste con studenti e docenti di diversi gradi scolastici. I dati raccolti sono stati utili per confermare l'idea iniziale che il tipo di dimostrazione il cui significato veniva negoziato in aula era qualcosa di molto vago ma certamente diverso da quello che avevo in mente io, dopo un percorso di studi universitari in matematica e in veste di docente di scuola secondaria di secondo grado con anni di esperienza.
Per dare un'idea degli elementi raccolti durante le sperimentazioni, cito solo tre esempi tratti dalle "lettere" scritte dagli studenti per spiegare a uno studente più giovane (puramente virtuale) che cosa sia una dimostrazione.[5]

*Per esempio, nella prima dimostrazione abbiamo un disegno e poi abbiamo scritto cosa vedevamo e abbiamo descritto il disegno.* (Studente III anno scuola secondaria di primo grado).

*Una dimostrazione è la spiegazione di un argomento tramite una formula algebrica, oppure attraverso metodi alternativi i quali solitamente non vengono usati spesso poiché sono anche più complessi rispetto ai soliti metodi di spiegazione, quando queste 'dimostrazioni' vengono fatte è presente una persona esterna alla classe, la quale normalmente è un'esperta o sta facendo particolari progetti inerenti a queste cose*. (Studente II anno scuola secondaria di secondo grado).

*Una dimostrazione in matematica, in generale, è un insieme di calcoli basati sull'osservazione, ad esempio di una figura.* (Studentessa III anno scuola secondaria di secondo grado).

Quelli riportati non sono affatto degli esempi isolati e, al di là del carattere aneddotico di alcuni passaggi, mostrano che il genere di dimostrazione che si incontra nell'ora di matematica e che costituisce il terreno di studio per il ricercatore in didattica della matematica è molto lontana dalla dimostrazione matematica, qualsiasi definizione si volesse dare di essa. E non è sufficiente parlare di "concezioni" di dimostrazione per inquadrare la questione perché in quel modo si suppone che ci sia una dimostrazione "ideale" della quale lo studente ha

---

[5] Questo tipo di richiesta è legata all'idea di TEP [*Textuelle Eigenproduktion*, cioè produzione testuale propria (Selter, 1994)], nelle quali lo studente, messo nella condizione di potersi esprimere con linguaggio personale, accetta di liberarsi da condizionamenti linguistici e fa uso di espressioni spontanee che poi consentono al ricercatore di ottenere una comprensione più profonda del suo modo di pensare e di comprendere la matematica; per questo motivo la richiesta è legata alla presenza (ideale) di un persona che ha *bisogno* dell'informazione richiesta (D'Amore & Maier, 1999, 2002).

una concezione, spesso distorta o non pienamente fedele, mentre tutto quello di cui è possibile parlare negli esempi citati sono le idee di dimostrazione in esse contenute, basate su esperienze concrete in aula. Dunque, il terreno di studio del ricercatore in didattica della matematica che studia la dimostrazione nell'aula di matematica è questo tipo di "dimostrazione" e non una dimostrazione matematica ideale.
Pensare alla "dimostrazione come oggetto didattico", con caratteristiche epistemologiche e metodologiche proprie è sembrato dunque un passaggio quasi obbligato.
Tuttavia, parlare di "oggetto didattico" dimostrazione fa sorgere dei problemi, poiché si tratta di un costrutto che non esiste in didattica della matematica. La domanda che sorge spontanea nelle interazioni con altri ricercatori è di solito la seguente: "Ma che cos'è un *oggetto didattico*?".
Come scrive Anna Sfard, in un articolo in cui si occupa del ruolo delle teorie in didattica della matematica:

> Most Ph.D. students I know are quite desperate. They are in a constant quest after the holy grail of theory, but, depending on how they manage to look, all they can see is either a dazzling abundance of candidates or an almost total absence thereof. Either way, they feel helpless. (Sfard, 2018, p. 219)

Il focus principale della ricerca è diventato dunque quello di riuscire a inquadrare dal punto di vista teorico le caratteristiche della specificità degli oggetti della didattica della matematica, indipendentemente dal fatto che si stia parlando dalla dimostrazione o di qualsiasi altro oggetto matematico particolare.
Come già evidenziato, mentre nessuno si stupisce se sente parlare di "oggetti matematici" e la questione ontologica è, accanto a quella epistemologica, il punto focale della filosofia della matematica, ancora non sappiamo dire bene di "che cosa" stiamo parlando in didattica della matematica, quando ci riferiamo agli oggetti matematici trattati in didattica. E in questo caso non possiamo nemmeno ricorrere alla ben nota frase di Russell, secondo cui la matematica è la sola scienza in cui non si sa mai di che cosa si sta parlando, né se quello che si dice è vero, poiché le teorie in didattica della matematica non sono certamente teorie formali che possono risolvere il problema con questa sospensione di giudizio sulla natura dei loro oggetti. Infatti, anche se nemmeno dei risultati della didattica della matematica si può dire se sono "veri" o "falsi" perché sono validati sulla base di criteri diversi da quelli logici di verità, la questione ontologica rimane di primaria importanza per l'identità della disciplina.
Premettiamo che con il termine "ontologia" qui non intendiamo la metafisica in senso aristotelico, cioè come "filosofia prima" che studia l'essere in quanto essere e le sue cause prime, ma come studio di ciò che può essere considerato "esistente" in quanto oggettivato e studiato nonché le condizioni per la sua realizzazione.
Le ricerche relative alla questione ontologica in didattica della matematica affrontano il problema degli oggetti di studio della disciplina da un punto di vista molto generale, soffermandosi principalmente sugli aspetti sociopolitici ed etici e,

a causa delle diversità delle teorie dell'apprendimento presenti in essa, mai dal punto di vista epistemologico. A nostro avviso, non è tuttavia possibile parlare di ontologia in didattica della matematica senza tenere conto della componente epistemologica, poiché è quest'ultima che la caratterizza in maniera univoca rispetto alle altre didattiche disciplinari.
Il presente lavoro ha dunque l'obiettivo di fare chiarezza sugli aspetti evidenziati, creando uno strumento teorico che sia in grado di tenere conto della specificità degli oggetti matematici della didattica della matematica come disciplina.
Si tratta, come già anticipato, di un terreno impervio, in quanto la definizione di "oggetto matematico specifico della didattica della matematica" che il presente lavoro di tesi si prefigge di proporre, è funzionale a un ambito che come tale non esiste (ancora): quello dell'epistemologia della didattica della matematica, cioè quell'ambito della didattica della matematica che studia l'acquisizione di conoscenza nella disciplina. Parlando di ontologia, è però possibile fare riferimento alla filosofia della didattica della matematica, come mostreremo nel capitolo 2. In ogni caso però, è stato non solo impossibile trovare una teoria in cui inserire la ricerca, ma nemmeno è stato possibile trovare una metodologia che potesse supportarla. Dunque, anche se essa si inserisce nell'ambito della filosofia della didattica della matematica, il terreno che sta esplorando è del tutto nuovo e in esso i punti di riferimento vengono fissati mentre si procede con l'esplorazione.

## 1.2. Struttura della tesi e indicazioni utili per la lettura

La tesi è suddivisa in 14 capitoli.
All'introduzione, in cui si espongono le motivazioni della ricerca e la struttura della tesi, seguono i capitoli 2, 3 e 4, dedicati rispettivamente all'introduzione all'argomento di ricerca, alla metodologia e alle domande di ricerca.
I capitoli dal 5 al 12 sono dedicati alla risposta alle domande di ricerca formulate nel capitolo 3.
I capitoli 5, 6, 7, 8 e 9 sono dedicati alla domanda di ricerca D1; i capitoli 10 e 11 sono dedicati alla domanda di ricerca D2; il capitolo 12 si riferisce alla domanda di ricerca D3.
Le risposte alle domande di ricerca sono riportate alla fine di ciascuna delle tre parti a cui si riferiscono. Esse si basano l'una sull'altra e quindi la risposta alla prima è necessaria per la ricerca relativa alla seconda e la risposta alla seconda è necessaria per la ricerca relativa alla terza domanda.
Il capitolo 13 rappresenta un elemento aggiuntivo che è emerso dalle riflessioni riguardo a un passaggio futuro dal risultato astratto ottenuto nella tesi alle sue possibili applicazioni, in quanto fornisce un insieme di strumenti matematici concettuali che consentono di rendere tale risultato operativo. In questo senso il

capitolo 13 può essere visto come un ponte verso future ricerche che non possono avere spazio nella presente tesi.
Infine, nel capitolo 14 proponiamo una riflessione finale sul significato più ampio dei risultati ottenuti nella tesi.
Data la complessità del lavoro esposto abbiamo predisposto un indice navigabile il più possibile dettagliato, in maniera tale da facilitare l'orientamento durante la lettura.
La tesi può essere vista come una "dimostrazione costruttiva", nel senso che in essa viene esposto un percorso che conduce alla costruzione di un oggetto; essa richiede quindi una lettura in sequenza, sulla base dell'ordine dei capitoli.

## 2. La questione ontologica in filosofia della didattica della matematica

Il presente lavoro di tesi ha come obiettivo primario quello di fornire una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica; esso concerne dunque la questione ontologica in didattica della matematica.
Parlando di ontologia è inevitabile parlare di filosofia; nel nostro caso, volendo discutere la questione ontologica in didattica della matematica, il riferimento specifico è quello della filosofia della didattica della matematica. In questo ambito sono fondamentali i lavori di Ernest (1991/2004; 2012; 2016; 2018a, 2018b), a cui faremo ampio e preciso riferimento di seguito.
La questione ontologica in didattica della matematica è affrontata da Ernest (2012) nell'ambito della discussione della domanda relativa alla *filosofia prima* della disciplina, cioè la filosofia che dovrebbe avere priorità rispetto ad altre filosofie in essa.[6]
Ernest passa in rassegna diversi possibili candidati ad assumere il ruolo di filosofia prima della didattica della matematica: da un lato ci sono la filosofia della matematica, con la sua influenza pervasiva in didattica della matematica, in quanto su essa si basano le assunzioni sulla natura della matematica stessa, sia dal punto di vista ontologico sia dal punto di vista epistemologico, ma anche la filosofa critica che si occupa del ruolo della conoscenza scientifica e della matematica in particolare nella società[7] (Ernest, 2012, p. 8); dall'altro lato ci sono l'ontologia (che rappresenta la metafisica), l'epistemologia e l'etica.
Soffermiamoci prima sulla filosofia della matematica, sull'epistemologia e sull'ontologia; successivamente esamineremo la questione della filosofia prima dal punto di vista della filosofia critica in didattica della matematica e dell'etica, seguendo sempre Ernest (2012).
Pur rimanendo un riferimento di base importante per l'epistemologia della didattica della matematica, la filosofia della matematica da sola non è in grado di svolgere il ruolo di filosofia prima della didattica della matematica, in quanto essa prescinde dalla componente etica, che appare come indispensabile in quest'ultima (Ernest, 2012). Inoltre, Ernest rifiuta l'idea che la filosofia della matematica possa essere la filosofia prima della didattica della matematica anche con la motivazione

[6] In Ernest (1991/2004) l'Autore propone il costruttivismo sociale come base della filosofia della didattica della matematica. All'inizio degli anni '90 del XX secolo, il costruttivismo era infatti il riferimento indiscusso per la didattica della matematica; la nascita delle teorie socioculturali ha introdotto invece una prospettiva pluralista nella disciplina che ha indotto a riflessioni più generali riguardo a una possibile "filosofia prima" della didattica della matematica.
[7] Come riferimenti per la filosofia critica, Ernest cita soprattutto esponenti della Scuola di Francoforte come Adorno, Fromm, Habermas, Horkheimer e Marcuse, i cui lavori sono stati sviluppati soprattutto a partire delle idee di Marx ed Engels (Ernest, 2012, p. 8).

che la contrapposizione tra prospettive assolutiste e fallibiliste (Ernest, 1991/2004), la quale può essere considerata caratterizzante per la matematica, non ha riscontro in didattica della matematica. Infatti, egli sottolinea che, pur esistendo in generale molte evidenze scientifiche a favore del fatto che la filosofia implicita dell'insegnante determini l'immagine che egli ha della matematica e di conseguenza l'immagine che di essa egli trasmette agli studenti [si vedano a titolo di esempio Speranza (1997) e D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Santi e Sbaragli (2009)], in realtà posizioni autoritarie o progressiste sull'insegnamento della matematica, che si potrebbero far derivare rispettivamente da posizioni assolutiste o fallibiliste sulla matematica, non si presentano in maniera distinta, in quanto spesso nel docente convivono senza apparente contraddizione un'immagine assolutista della matematica con idee progressiste sul suo insegnamento.

Secondo Ernest (2012), l'epistemologia potrebbe essere di per sé un buon candidato per una filosofia prima della didattica della matematica, sia che la si intenda come lo studio della conoscenza sia che la si intenda come lo studio della metodologia di acquisizione della conoscenza. Per quanto riguarda il primo modo di intenderla, l'Autore nota che le questioni relative al modo di acquisire conoscenza sono molto dibattute in didattica della matematica, con posizioni tra loro spesso inconciliabili.

Per quanto riguarda l'epistemologia intesa come metodologia di acquisizione della conoscenza, che costituisce la parte più interessante dell'epistemologia per la questione esaminata, Ernest nota che essa si presenta solo come una componente dell'epistemologia e che non ha mai acquisito una completa autonomia nell'ambito filosofico.

In particolare, Ernest mette in evidenza la necessità di una distinzione tra metodologie prescrittive e descrittive sia in matematica sia in didattica della matematica. Per quanto riguarda la metodologia prescrittiva, l'esempio più evidente è il ruolo di strumento metodologico per la matematica attribuito alla logica (classica) nella filosofia analitica. Mentre, per quanto riguarda una metodologia descrittiva, egli nota che un esempio in tal senso sono le euristiche di Pólya (1944/1973) e di Lakatos (1976/1979).[8]

Se in matematica la metodologia non è mai assurta a branca autonoma, aspetto che invece, ribadiamolo, secondo Ernest sarebbe importante per la didattica della matematica, ciò è dovuto al fatto che gli strumenti matematici usati in un certo periodo storico vengono inglobati attraverso la routinizzazione delle euristiche col passare del tempo nella matematica stessa, divenendo a loro volta degli oggetti

[8] Torneremo più avanti su questo argomento, ma riteniamo importante sottolineare qui il fatto che la filosofia sintetica della matematica (Zalamea, 2009/2012a; 2021) (si veda il capitolo 10) fornisce una soluzione interessante da questo punto di vista. Infatti, essa si basa su una metodologia descrittiva della pratica matematica e propone allo stesso tempo strumenti metodologici matematici molto versatili, basati sul linguaggio della teoria delle categorie, e non sul linguaggio della teoria degli insiemi, al quale si riconducono gli strumenti logici della filosofia analitica e ai quali fa riferimento Ernest quando parla di "metodologia prescrittiva".

matematici (Ernest, 2012, p. 11).[9] Dunque, da un lato sarebbe fondamentale studiare la metodologia adottata nella ricerca matematica, ma dall'altro ciò è difficile poiché tale metodologia non esiste come branca propria della matematica, in quanto in matematica ciò che era metodo (processo), diventa prima o poi elemento (oggetto) che si inserisce nella struttura della matematica come disciplina.[10]

Nel discutere la possibilità di considerare l'ontologia come filosofia prima della didattica della matematica, Ernest caratterizza il raggio d'azione di quest'ultima come segue: "Ontology inquiries into the kinds of objects we take for granted as populating the universe we study, and live and work in, as well as the worldviews associated with these objects" (Ernest, 2012, p. 12).

Egli evidenzia tre possibili paradigmi ontologici: "1. the scientific world, comprising material objects in physical space; 2. the world of subjective and intersubjective reality, comprising human meanings; 3. the social world and its power relations, comprising persons in relationships and within institutions" (Ernest, 2012, p. 12).

Ernest non discute le relazioni tra questi tre paradigmi ontologici, ma evidenzia tre domande che essi fanno sorgere: "What are mathematical objects? What are the objects of education and mathematics education? What overall theory of existents and existence are we assuming in our research, either overtly or covertly?" (Ernest, 2012, p. 12).

La prima domanda si collega al primo paradigma, nel quale l'ontologia è riferita al mondo scientifico in questione, che Ernest sembra identificare con la matematica o con la didattica della matematica o con una sovrapposizione di queste ultime. Infatti, una distinzione non è possibile poiché dal testo non si evince se con il termine "oggetti matematici" l'Autore intenda gli oggetti del mondo scientifico della matematica (quindi quelli della matematica come disciplina scientifica coltivata dai matematici di professione) oppure gli oggetti del mondo scientifico della didattica della matematica (quindi quelli della didattica della matematica come disciplina che studia il modo in cui la conoscenza matematica oggettivata viene insegnata e appresa) oppure ancora se queste due tipologie di oggetti coincidono in questa visione.

La seconda domanda, quella relativa agli oggetti della didattica e della didattica della matematica, sorge dal secondo paradigma ontologico, cioè quello relativo al mondo della realtà soggettiva e intersoggettiva, compresi i significati umani. Sembra che sia in questo mondo che Ernest veda collocati quelli che noi abbiamo chiamato *oggetti matematici specifici della didattica della matematica*, dove essi vengono inquadrati in termini di significati personali degli oggetti matematici

[9] Notiamo qui la forte analogia con il concetto di *routine* delineato nell'ambito della *Commognition* da parte di Lavie, Steiner e Sfard (2019), tema del quale ci occuperemo in modo approfondito nel capitolo 8.

[10] Qui notiamo l'analogia con la doppia natura delle nozioni matematiche secondo Sfard (1991); anche su questo argomento torneremo ripetutamente nella presente trattazione.

"veri e propri". Notiamo che questa assunzione è problematica poiché induce a supporre che l'oggetto matematico "nella mente" dello studente sia lo stesso di cui scrive il ricercatore in didattica della matematica quando pubblica un articolo di ricerca. Per fare un esempio, sarebbe come se l'oggetto "derivata" a cui ci si riferisce nell'analisi dei protocolli di uno studente o di un gruppo di studenti che sta studiando tale argomento coincidesse con l'oggetto "apprendimento della derivata". Sebbene i due oggetti siano strettamente collegati, è chiaro che mentre il primo è "dato per scontato" sia dallo studente sia dal ricercatore, e quindi, secondo la caratterizzazione di "ontologia" fornita da Ernest, costituisce un oggetto per entrambi, il secondo è "dato per scontato" solo dal ricercatore in didattica della matematica, che è l'unico tra i due che possiede gli strumenti per poter rilevare e inquadrare tale oggetto, attraverso paradigmi e metodologie specifiche della propria disciplina.
La terza domanda, cioè quella relativa alla "teoria superiore", che potremmo chiamare metateoria, che implicitamente si assume nella ricerca in didattica della matematica in riferimento a ciò che si intende per *esistente* e per *esistenza*, è legato al terzo paradigma ontologico, cioè quello relativo al mondo sociale e alle sue relazioni, comprese le relazioni nelle e tra le istituzioni. Questo paradigma è di natura diversa rispetto ai due precedenti, in quanto non riguarda il modo di concepire l'esistenza e l'esistente degli oggetti della conoscenza, ma si riferisce al modo di concepire l'esistenza e l'esistere dell'essere umano ed è questo che determina, secondo Ernest, la natura degli "oggetti" della didattica della matematica: "The primary objects of study in mathematics education are human beings and their activities and relationships" (Ernest, 2012, p. 12).
Questa constatazione porta Ernest ai seguenti interrogativi:

> Ontology poses the question: what is a human being? Philosophically this is a very fundamental question. Answering it with respect to our field of study brings up issues of identity, subjectivity, agency, and human "nature" and development. What is a human being? And what is human being? (Ernest, 2012, p. 12)

Gli interrogativi su che cosa sia l'*essere* umano nel senso delle caratteristiche imprescindibili della sua *esistenza* e che cosa sia l'*essere umano* come soggetto generico appartenente al genere umano, possono essere posti a diversi livelli: biologico, storico-culturale, sociologico etc. oppure in riferimento a una combinazione tra gli ultimi due. La risposta che predilige Ernest è quella a livello socio-fenomenologico, in quanto egli afferma, seguendo Heidegger (citato da Ernest, 2012, pp. 12–13) e il costruttivismo sociale, che il nostro modo di conoscere noi stessi, quindi il modo di ottenere conoscenza su di noi come esseri umani, e quindi sul nostro essere, è molto più simile a un *sapere-come*-nelle-relazioni-sociali che non a un *sapere-che*-su-noi-stessi, in termini di valori e convinzioni individuali etc.
Per Ernest dunque l'oggetto primario della didattica della matematica è l'essere umano e l'ontologia di riferimento deve essere forgiata a partire da questo presupposto. Ma l'ontologia, e più precisamente la metafisica, non può fungere da

filosofia prima della didattica della matematica poiché, in maniera simile all'epistemologia nella sua versione metodologica, non è che una promessa, dato che richiederebbe l'esistenza di teorie dell'essere che siano applicabili alla didattica della matematica, cosa che invece rimane per ora solo una possibilità non realizzata (Ernest, 2012, p. 13).[11]

Veniamo ora alla filosofia critica e all'etica come possibili candidati per fungere da filosofia prima della didattica della matematica.

La filosofia critica funge da riferimento a molti lavori in didattica della matematica (p.e. D'Ambrosio, 1985, 2003; Skovsmose, 2016; Stinson & Bullock, 2012), il cui obiettivo è quello di indagare le diverse modalità con cui la matematica è usata nella società e le conseguenze sociali che da tali usi derivano.

Per contestualizzare meglio il ruolo della filosofia critica in filosofia della didattica della matematica, facciamo riferimento alla cronologia proposta da Stinson e Bullock (2012). In essa gli autori evidenziano quattro fasi o momenti storici, anche se non nettamente distinti e spesso sovrapposti, nell'evoluzione della disciplina: (1) *il momento processo-prodotto*, che inizia a partire dagli anni '70 del secolo XX e la cui caratteristica è quella di cercare di collegare le pratiche di insegnamento (processi) ai risultati ottenuti dagli studenti (prodotto); (2) *il momento interpretativo-costruttivista*, che inizia a partire dagli anni '80 del XX secolo e la cui caratteristica distintiva rispetto alla fase precedente consiste nel cercare di interpretare e comprendere i fenomeni dell'apprendimento piuttosto che di cercare di predirli; (3) *il momento della svolta sociale*, che inizia verso la metà degli anni '80, e che "acknowledge that meaning, thinking, and reasoning are products of social activity in contexts" (Lerman, 2000, citato in Stinson e Bullock, 2012); (4) la svolta socio-politica, che inizia a partire dagli anni 2000 e le cui caratteristiche sono legate a prospettive in didattica della matematica che "explore emancipation from or deconstruction of social phenomena rather than a mere understanding" (Stinson & Bullock, 2012, p. 44).

Nella panoramica appena presentata, gli autori focalizzano lo sguardo sull'evoluzione della didattica della matematica come disciplina in funzione all'evoluzione dell'interpretazione dei fenomeni sociali, a partire dalla *previsione* di quest'ultimi, passando per la loro *interpretazione e comprensione* e per la *presa di consapevolezza del carattere intrinsecamente sociale* dei fenomeni coinvolti nell'apprendimento, come il dare significato, il pensare, il ragionare, fino ad arrivare all'*azione sui fenomeni sociali* stessi. Riassumendo ulteriormente si può

---

[11] In questo senso possiamo notare che l'ontologia di recente emersa nella teoria dell'oggettivazione (Radford, 2019) sia in realtà un'attualizzazione di tale "promessa". In effetti, in essa l'*essere* dell'essere umano è il risultato del *joint labour* tra insegnante e studente, in quanto: "Mathematics education as a matter of joint labor is (…) inscribed within an understanding of mathematics education as a political, societal, historical, and cultural endeavor. Such an endeavor aims at the dialectic creation of reflexive and ethical subjects who critically position themselves in historically and culturally constituted mathematical practices and ponder and deliberate on new possibilities of action and thinking" (Radford, 2016, p. 4).

dire che in questa prospettiva la didattica della matematica si profila come una disciplina in cui si produce una progressiva presa di coscienza del ruolo dei fenomeni sociali nell'insegnamento-apprendimento della matematica.
L'approccio di Stinson e Bullock (2012), che si posiziona nell'ambito della filosofia critica (postmoderna) in didattica della matematica, a cui Ernest (2012) fa riferimento come una delle possibili candidate per fungere da filosofia prima della didattica della matematica, è coerente con le considerazioni fatte da questo Autore riguardo all'ontologia prima della didattica della matematica vista come un'ontologia legata all'*essere* dell'essere umano nonché all'*essere umano*. Tuttavia, Ernest sottolinea che la filosofia critica non può che fungere da "filosofia ultima" (Ernest, 2012, p. 9)[12] della didattica della matematica, dato che si occupa degli *effetti* che quest'ultima produce, piuttosto che dei *principi* dai quali essa discende.
Ernest giunge infine alla conclusione che la filosofia prima della didattica della matematica sia l'etica e questo per quattro motivi: (1) perché l'etica è determinante nella ricerca in generale e nel caso specifico nella ricerca in didattica della matematica, affinché ci si possa fidare dei suoi risultati; (2) perché come ricercatori in didattica della matematica partecipiamo all'evoluzione della conoscenza comune dell'umanità; (3) poiché, essendo esseri sociali, noi dipendiamo per la nostra sopravvivenza da un comportamento collaborativo ed etico; (4) poiché, citando Levinas (1987, citato in Ernest, 2012, p. 13), l'essere umano è eticamente responsabile nei confronti dell'altro e non deve cercare di renderlo semplicemente un *oggetto* di conoscenza (Ernest, 2012, p. 13).
Da quanto fin qui esposto, traiamo tre conclusioni che saranno centrali nella nostra trattazione:

- in filosofia della didattica della matematica la questione ontologica è affrontata a livello dell'essere umano come "oggetto" primo di studio e conoscenza, in linea con l'assunzione che l'etica sia la filosofia prima della didattica della matematica, ma allo stesso tempo l'implicazione etica vieta che l'essere umano sia considerato un oggetto di studio, in quanto l'etica precede l'ontologia (Levinas, 1987, citato in Ernest, 2012);
- in filosofia della didattica della matematica la specificità degli oggetti della conoscenza coinvolta, cioè la questione ontologica legata agli oggetti matematici, viene affrontata non direttamente, cioè come una problematica interna alla disciplina, ma solo tramite gli oggetti matematici in filosofia della matematica;[13]

[12] In riferimento al concetto di "filosofia ultima" Ernest scrive che il ruolo di una tale filosofia, se essa esistesse, sarebbe quello di "bringing together and combining other areas of philosophy to analyse and underpin mathematics education, especially with regard to its role in society and its politics" (Ernest, 2012, p. 9).
[13] Nel caso di Ernest, tale filosofia è il costruttivismo sociale basato sul quasi-empirismo di Lakatos (1976/1979) (Ernest, 1991/2004).

- la problematica epistemologica in didattica della matematica non viene affrontata a livello generale e non può dunque fungere da base per la sua ontologia poiché tale problematica si basa su teorie dell'apprendimento o su epistemologie specifiche di singole teorie in didattica della matematica, non condivise da tutte le correnti che si sono sviluppate in essa.

Si presenta dunque il seguente dilemma: da un lato la questione ontologica in didattica della matematica frappone necessariamente, tra l'ontologia legata agli oggetti matematici e il punto di vista dell'osservatore che cerca di teorizzare tale ontologia (colui che assume la posizione del filosofo della didattica della matematica), un'ontologia legata all'essere umano, che dunque si configura come "l'ontologia prima" della didattica della matematica; dall'altro lato, la questione epistemologica in didattica della matematica sembra non consentire una trattazione generale degli oggetti della conoscenza che essa studia, in quanto tale questione è dipendente dalla specifica teoria dell'apprendimento presa in considerazione da una determinata teoria in didattica della matematica.
Abbiamo esposto in maniera dettagliata la soluzione proposta da Ernest (2012, 2016), ma tale soluzione lascia irrisolta la problematica della specificità degli oggetti matematici della didattica della matematica *come disciplina*, che si presenta a prescindere dalle interpretazioni epistemologiche dalle singole teorie della didattica della matematica.
Infatti, se la filosofia prima della didattica della matematica è l'etica e i suoi oggetti primi sono gli esseri umani, pur nell'eticamente necessaria precedenza dell'etica sull'ontologia, in che cosa si differenzia la didattica della matematica, riguardo alla questione ontologica, dalle altre didattiche disciplinari e dalle scienze sociali in generale?
A nostro avviso, l'ontologia secondo cui è l'essere umano a essere l'oggetto primo della didattica della matematica e la filosofia che corrisponde secondo Ernest a tale ontologia, cioè l'etica, rendono conto della domanda sul *chi* e sul *come*, ma non della domanda sul *cosa* si studia in didattica della matematica. Infatti, anche se l'evoluzione descritta da Stinson e Bullock (2012) venisse accettata come *l'*evoluzione della didattica della matematica,[14] le conclusioni tratte da Ernest sono molto lontane da quella che potremmo chiamare *la dimensione ontologica specifica della didattica della matematica*, cioè quella relativa al sapere matematico il cui insegnamento-apprendimento essa studia e che la caratterizza rispetto ad altre didattiche disciplinari o rispetto ad altre discipline sociali in generale.
Potremmo dire che, nella prospettiva proposta da Ernest (2012), la dimensione etica e sociale ingloba, ma allo stesso tempo *nasconde*, la dimensione epistemologica del sapere matematico. In questo senso ci sembra importante non

[14] Mettiamo l'accento sul fatto che si tratta di una prospettiva che non è necessariamente l'unica possibile riguardo all'evoluzione della didattica della matematica come disciplina, in quanto il percorso evolutivo che si traccia in un'indagine può dipendere dagli aspetti su cui essa si focalizza.

trascurare il seguente interrogativo, posto da Ernest stesso: "How central is mathematics to research in mathematics education? Does educational research that does not draw on deep knowledge of mathematics have any right to proclaim itself as research in mathematics education?" (Ernest, 2018b, p. 16).
Anche passando in rassegna le quattro fasi dell'evoluzione della didattica della matematica come disciplina (Stinson & Bullock, 2012), ci si rende conto che, mentre l'aspetto sociale, politico ed etico prendono il sopravvento, la dimensione epistemologica specifica della didattica della *matematica* scompare quasi completamente; essa rimane presente solo in termini di posizione di rilievo che la formazione matematica riveste nelle società industrializzate e che la rendono un importante strumento di esclusione sociale, il cui meccanismo deve essere messo in discussione (Skovsmose, 2016) oppure come strumento culturale che non deve comunque essere considerato innocuo (Ernest, 2018a).
Inoltre, pur assumendo, in linea con l'idea che sia l'etica la filosofia prima della didattica della matematica (Ernest, 2012; Radford & Lasprilla Herrera, 2020, ma si vedano anche Ernest (2020) e Radford (2020), che l'apprendimento della matematica si produca nella tensione tra due poli, quello dell'oggettivazione e quello della soggettivazione[15] (Radford, 2008a; D'Amore, 2015a, 2017) e che il "prodotto" dell'apprendimento non sia un concetto o un oggetto matematico ma l'essere umano che si realizza tramite l'apprendimento, rimane comunque da considerare il fatto che la didattica della matematica come disciplina non può essere equiparata alla prasseologia[16] d'aula.
Dunque, pur ritenendo importantissime le dimensioni etica, sociale e politica come cornice irrinunciabile di ogni teoria in didattica della matematica, ci sembra importante ribadire la necessità di ancorare le considerazioni ontologiche in didattica della matematica anche *alla matematica* e quindi ai suoi oggetti.
Non intendiamo parlare in questo senso di un'ontologia "prima", in quanto concordiamo con le riflessioni critiche fatte a tale proposito da Ernest (2012); tuttavia, a nostro avviso l'ontologia della didattica della matematica non può prescindere da un'epistemologia propria di tale disciplina. Infatti, come mostreremo negli esempi del capitolo 6, gli oggetti matematici specifici in

[15] Il termine "soggettivazione" viene usato da Radford come controparte dell'oggettivazione della conoscenza che "produce" il soggetto stesso, trasformando la sua soggettività: "As understood here, objectification thus is more than the connection of the two classical epistemological poles, subject and object: it is in fact a transformative and creative process between these two poles, where, in the course of learning, the subject objectifies cultural knowledge and, in so doing, finds itself objectified in a reflective move that can be termed subjectification. The making of the subject, the creation of a particular (and unique) subjectivity is thus a process of subjectification that is made possible by the activity in which objectification takes place, and by the re-flective nature of thinking and the possibilities that e.g. language and other cultural instruments of thought offer to distinguish between an "I" and its surroundings (I/non-I; I/you; I/it; we/them, the impersonal discourse of science, etc.)" (Radford, 2008a, p. 225).
[16] Il termine "prasseologia" proviene dall'ambito economico e rappresenta lo studio teorico delle condizioni per le azioni intenzionali dell'essere umano; nel presente contesto sta a indicare lo studio delle attività in aula durante le ore di matematica.

didattica della matematica hanno una loro esistenza che non può essere negata e quindi supponiamo che possa esistere, almeno a livello implicito, un'epistemologia relativa a tali oggetti.

A nostro avviso, anche se le modalità di riferimento agli oggetti matematici possono essere diverse, rimane tuttavia la *necessità generale*, per ogni teoria in didattica della matematica, di un tale riferimento poiché, come sottolineano Godino, Batanero e Font: "it would be very difficult to suitably study the teaching and learning processes of undefined and vague objects" (Godino, Batanero, & Font, 2007, p. 127). Anzi, crediamo che la relazione epistemologica tra gli oggetti della matematica e la didattica della matematica sia più generale di quella derivante dal rapporto tra l'essere umano come "oggetto" primo della didattica della matematica, basata sull'assunzione dell'etica come filosofia prima, e la didattica della matematica. Infatti, l'etica può essere riconosciuta come filosofia *prima* o non essere riconosciuta come tale da un ricercatore, seppure con conseguenze alienanti per la didattica della matematica stessa nel secondo caso (Radford, 2017); di conseguenza anche il riconoscimento dell'ontologia derivante da tale assunzione non può essere considerata un fatto generale. La generalità del legame epistemologico tra gli oggetti matematici, che potremmo considerare in un certo senso come esistenti *a priori* dal punto di vista della didattica della matematica, in quanto sono oggetti di competenza della matematica, prodotti e oggettivati in essa, e la didattica della matematica, non ci sembra invece negabile, quale che sia la teoria in cui si posiziona un ricercatore in didattica della matematica.

Infatti, anche in una posizione costruttivista radicale (von Glaserfeld, 1995), in cui la semantica del linguaggio è dichiaratamente non denotativa e in cui non si forniscono di solito definizioni di oggetti matematici,[17] un riferimento a una matematica che funge da "serbatoio" di conoscenza potenziale, ma anche da riferimento normativo per la didattica della matematica, è inevitabile.

Una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica sembra dunque poter essere di interesse generale in didattica della matematica come disciplina, a patto che sia in grado di cogliere solo l'esistenza del legame epistemologico, senza coinvolgere le sue modalità specifiche di manifestazione nelle teorie.

---

[17] Per esempio, von Glaserfeld si riferisce a "pezzi di esperienza" (von Glaserfeld, 1995, p. 145) quando parla degli oggetti di conoscenza in matematica. Egli cita a tale proposito Rosenfeld: "The 'object' (…) is not 'verbal,' but experiential; the 'object' is the cognitive and affective structure which the reader calls forth and lives through (Rosenblatt, 1985, p.102, citato da von Glaserfeld, 1995, p. 45).

# 3. Domande di ricerca

L'obiettivo principale di questo lavoro di tesi è quello di fornire una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica.
La nostra domanda di ricerca in senso molto ampio è dunque la seguente:

> *È possibile individuare una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica e se sì, in quali termini?*

Si tratta tuttavia di una domanda molto generica che deve essere circoscritta, in maniera tale da poter fungere da guida generale nello svolgimento della ricerca stessa.
Formuliamo dunque le seguenti sottodomande:

*D1. Quali criteri deve soddisfare una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica?*

*D2. Quali sono gli elementi teorici che possono consentire di costruire un contesto teorico (quadro teorico di riferimento) che possa accogliere i criteri individuati in risposta alla domanda 1?*

*D3. È possibile fornire una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica nel contesto teorico individuato (D2) che tenga conto dei criteri individuati (D1)?*

Le tre domande di ricerca sono tra loro collegate e rappresentano delle tappe di un percorso; la riposta alla prima domanda è propedeutica a quella della seconda e le risposte alla prima e alla seconda sono propedeutiche alla risposta alla terza.
I capitoli 5, 6, 7, 8 e 9 si focalizzano sulla domanda di ricerca D1.
I capitoli 10 e 11 si riferiscono alla domanda di ricerca D2.
Il capitolo 12 si riferisce alla domanda di ricerca D3.
Le risposte alle tre domande di ricerca sono esposte a termine della parte della tesi a esse dedicata e sono accessibili dall'indice navigabile sotto i titoli "Risposta alla domanda di ricerca D1" (al termine del capitolo 9), "Risposta alla domanda di ricerca D2" (al termine del capitolo 11) e "Risposta alla domanda di ricerca D3" (al termine del capitolo 12).

# 4. Considerazioni metodologiche generali

## 4. 1. Contestualizzazione della ricerca

Quando si tratta di individuare una metodologia per una ricerca teorica è necessario, a nostro avviso, circoscrivere con la maggiore precisione possibile il contesto in cui essa si colloca, per poter poi valutare le metodologie adottate in tale contesto e procedere eventualmente, se ciò si rendesse necessario, con una integrazione o ampliamento di queste ultime.
Come già evidenziato nel capitolo 2, la branca della didattica della matematica che a nostro avviso è la più appropriata per accogliere la presente ricerca è quella della filosofia della didattica della matematica. Questa nostra posizione è motivata dall'argomento della ricerca, come già evidenziato nel capitolo 2, ma anche dalle riflessioni che riportiamo di seguito.
La filosofia della didattica della matematica è una branca autonoma relativamente recente della didattica della matematica e i criteri di accettazione dei lavori in quest'ambito sono ancora stabiliti su basi empiriche, cioè sulla base dei criteri di accettazione dei contributi ai convegni specifici. Tali criteri sono riassunti come segue da Bicudo e Miarca:

> For acceptance it was constituted as having a *research orientation that transcends the modus operandi of searching in Mathematics Education*, as well as the modus operandi of proposing didactic-pedagogical practices for its teaching and learning process. *Its way of thinking is characterized as systematic*, and it is characterized by *its concern with the epistemological, ontological and axiological aspects of issues of Mathematics Education* and in their respective investigative procedures. (Bicudo & Miarka, 2016, p. 19, enfasi nostra)

Esaminiamo i singoli punti evidenziati nella citazione precedente.
La ricerca qui proposta ha un orientamento che trascende il modus operandi della ricerca in didattica della matematica in quanto concerne e pone in rilievo una questione puramente teorica: lo status ontologico degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica; essa non riguarda pertanto un'applicazione di una qualche teoria della didattica della matematica.
Il modo di pensare esposto nella ricerca è sistematico in quanto affronta il problema dell'esistenza e della definizione di oggetti matematici specifici in didattica della matematica da molteplici punti vista, costruendo così una rete di concetti coinvolti.
La ricerca è inoltre chiaramente coinvolta con aspetti epistemologici e ontologici della didattica della matematica, in quanto mira a fornire una definizione di oggetto matematico specifico in didattica della matematica, la quale potrebbe costituire una base per un'epistemologia generale della didattica della matematica.

## 4. 2. Quadro generale della metodologia

Dopo aver motivato la collocazione della presente ricerca nell'ambito specificato della filosofia della didattica della matematica, vogliamo esaminare brevemente le indicazioni metodologiche che a nostro avviso sono specifiche di tale ambito.
Riportiamo le seguenti quattro citazioni di Bicudo e Miarca (2016, pp. 20–21), che caratterizzano euristicamente tale metodologia e che assumiamo come quattro punti da discutere per ottenere un'immagine più chiara e definita della metodologia in questo contesto.

> 1. The movement of discourse construction of the text is through questions that the authors pose to themselves when they become aware about the positivity of their statements. We do not refer here to the questions or interrogations of research, assumed as the motto impeller that triggers the research, but those that are implemented in the dialogue of authors with themselves and with the text that they are architecting. This manner of proceeding is an important tool of philosophical thinking to avoid naturalizing assumptions. Instead, the statements are accompanied by arguments that expand possible understandings and expose the debates that occur in the dialogues mentioned. Description is also revealed as an aspect characterizing philosophical work of philosophy of mathematics education. Descriptions are reports which in the analysed texts provide the ideas of references to works that show themselves relevant to the content of the focused documents analysed, or reports of experiences of significant individuals focussing on the phenomena or complex situations experienced in specific instances and occurrences.
>
> 2. The writing is articulated in terms of sustained ideas in the explanation of interpretative readings of relevant authors, from the standpoint of education, philosophy and the subject itself, articulating what was understood in new ideas.
>
> 3. The articles reveal a common method, which involves continually problematizing and interrogating the text that is being written; describing the living experience and the way in which ideas are articulated; and gathering ideas of significant authors around a theme under investigation.
>
> 4. The investigations indicate understandings or syntheses that moves away from having an interrogated or questioned text explained entirely, aiming to clarify the theme under investigation, instead of trying to fully explain it.

Notiamo che i quattro punti qui evidenziati sembrano in realtà descrizioni generiche del modo di procedere nelle indagini filosofiche, che possono dunque attingere a diversi metodi, come per esempio:
al *metodo maieutico* (Giannantoni, 2005), applicato in un approccio dialogico dell'autore del testo con sé stesso [questo aspetto sembra trasparire soprattutto nel primo punto: "The movement of discourse construction of the text is through questions that the authors pose to themselves" e nel terzo punto: "continually problematizing and interrogating the text that is being written" (Bicudo & Miarca, 2016, p. 20)];
al *metodo ermeneutico*, sia come metodo più propriamente inteso di interpretazione e comprensione (Dilthey, 1986; Schleiermacher, 2000), sia come

caratteristica fondamentale dell'essere umano (Heidegger, 2017; Gadamer, 2000) [l'aspetto ermeneutico della metodologia traspare soprattutto nel secondo punto: "The writing is articulated in terms of sustained ideas in the explanation of interpretative readings of relevant authors" (Bicudo & Miarka, 2016, p. 20)];
il *metodo fenomenologico*, attraverso la centralità che in esso viene attribuita all'esperienza intuitiva del "vedere" il fenomeno da parte del soggetto per la determinazione della sua essenza (Husserl, 2020) [l'aspetto fenomenologico traspare soprattutto nel primo punto: "reports of experiences of significant individuals focussing on the phenomena or complex situations experienced in specific instances and occurrences" (Bicudo & Miarka, 2016, p. 20) e nel terzo punto: "describing the living experience and the way in which ideas are articulated; and gathering ideas of significant authors around a theme under investigation" (Bicudo & Miarka, 2020, pp. 20–21)].
Notiamo inoltre che, nella descrizione delle caratteristiche metodologiche delle produzioni in filosofia della didattica della matematica, un ruolo importante sembrano avere le descrizioni (si vedano il primo e il quarto punto). Ciò che sembra inoltre essere centrale non è necessariamente la messa a punto di una soluzione di una data problematica, ma la messa in evidenza di eventuali problematiche molteplici, fra loro intrecciate, delle loro caratteristiche, degli elementi in esse coinvolte, della complessità delle relazioni coinvolte etc., con l'obiettivo primario di una chiarificazione, piuttosto che di una spiegazione.

### 4. 3. Metodologia generale della presente ricerca

Sulla base di quanto esposto nel paragrafo precedente diventa chiaro che le considerazioni metodologiche in filosofia della didattica della matematica sono molto generali e che dunque è necessario circoscriverle in maniera tale che il metodo da esse risultante possa essere utile sia all'organizzazione del lavoro di ricerca sia alla comunicazione dei suoi risultati.
Come riferimento generale per la caratterizzazione di un metodo adatto alla presente ricerca abbiamo scelto un paradigma di ricerca pragmatista, le cui caratteristiche sono riassunte come segue in Iori (2015):

> Il ricercatore pragmatista si focalizza sulle domande di ricerca e utilizza differenti metodi, di tipo qualitativo e quantitativo, per ottenere risposte alle domande di ricerca (…). I metodi sono mescolati in modo da ottenere le migliori possibilità di risposta alle domande di ricerca. In altri termini, il ricercatore sceglie i metodi, le tecniche e le procedure di ricerca che più soddisfano le esigenze e gli scopi della sua ricerca. (Iori, 2015, pp. 107–108)

Dato che nella presente ricerca non è prevista un'analisi di dati sperimentali, i metodi adottati sono soltanto di natura qualitativa. Per metodo qualitativo qui

intendiamo un metodo improntato all'interpretazione del contesto e delle relazioni in esso, nel senso di Denzin e Lincoln (2011).[18]
Solo nel capitolo 8 esamineremo alcuni aspetti dal punto di vista quantitativo, cioè sulla base della distribuzione dei criteri di cui la definizione cercata dovrebbe tenere conto, in riferimento alle definizioni di oggetto matematico esaminate nel capitolo e in riferimento alla frequenza relativa con cui si tiene conto dei singoli criteri nelle definizioni esaminate. Tuttavia anche in questo caso l'analisi dei dati sarà di tipo qualitativo, in quanto l'aspetto quantitativo fungerà primariamente da supporto all'analisi, ma quest'ultima sarà comunque effettuata sulla base di criteri qualitativi.
La nostra metodologia *globale* sarà dunque una metodologia guidata dalle domande di ricerca; per la sua attuazione faremo ricorso ai vari metodi di indagine filosofica, evidenziati nel paragrafo precedente, soprattutto al metodo ermeneutico e fenomenologico, senza distinguere esplicitamente il loro uso, come di consueto avviene nelle produzioni scientifiche di questo settore.
Inoltre, nei capitoli 5, 7, 8 e 9, in cui l'indagine è di tipo esplorativo, in accordo con la domanda di ricerca D1, procederemo per analisi e sintesi; più precisamente nella parte relativa all'analisi analizzeremo gli argomenti esposti in precedenza, sotto la guida dell'obiettivo prefissato nel capitolo, mentre nella parte relativa alla sintesi esporremo i risultati che sorgono dall'analisi effettuata, soprattutto in riferimento ai criteri per la definizione cercata.
In particolare, nei capitoli 5, 6, 7, 8 e 9 cercheremo di individuare e puntualizzare i criteri necessari per rispondere alla domanda di ricerca D1. Per fare ciò, applicheremo una strategia "top down", nel senso che cercheremo di estrarre dei criteri che deve soddisfare la definizione cercata attraverso analisi e metariflessioni teoriche, ma procederemo anche nel verso opposto, cioè tramite una strategia "bottom up", nella quale:

- i costrutti e le definizioni già esistenti di concetto o oggetto vengono confrontati con i criteri emersi per via teorica al fine di verificare se e in quale misura questi sono soddisfatti e per trarre elementi necessari per circoscriverli e puntualizzarli;
- i costrutti e le definizioni già esistenti vengono esaminati per verificare se si presentano dei criteri a essi trasversali dei quali fino a quel momento non si è tenuto conto, al fine di rendere il più possibile ampia e condivisibile la caratterizzazione della definizione cercata.

I criteri individuati tramite un'analisi teorica o "per astrazione", cioè come criteri trasversali, verranno assunti come necessari per la definizione cercata; essi verranno circoscritti e puntualizzati durante l'indagine e le definizioni di concetto

[18] Questi autori fanno riferimento alla ricerca qualitativa sul campo, in cui si ricorre a interviste, registrazioni etc. che poi vengono interpretate in senso qualitativo; il nostro riferimento al senso del termine "qualitativo" è dunque un'estensione di questa idea base all'attività interpretativa nei contesti teorici, nella quale l'interpretazione è svolta attraverso il metodo ermeneutico.

o oggetto esposte e analizzate verranno esaminate per stabilire se e in quale misura ne tengono conto. D'altro lato, invece, eventuali caratteristiche che dovessero emergere come caratterizzanti solo per la maggior parte degli approcci o definizioni, verranno considerati "convenienti" per la definizione cercata.
Il processo di ricerca dei criteri di cui dovrebbe tenere conto la definizione cercata può essere complessivamente paragonato a un processo di "distillazione" attraverso ripetuti passaggi di analisi e sintesi in percorsi sia *top down* sia *bottom up*.
I criteri in questione emergeranno quindi gradualmente durante le indagini della prima parte della tesi; la loro versione finale, che costituirà la risposta alla domanda di ricerca D1, verrà fornita al termine della prima parte della tesi.
In vari punti della tesi verranno inoltre introdotti elementi metodologici *locali*, necessari per inquadrare le singole parti della tesi.
Tali metodologie locali consistono nel ricorso a strategie di networking di teorie. Data la molteplicità di approcci e teorie presenti in didattica della matematica, in essa si dispone di una vasta gamma di strumenti in questo senso.
Il quadro metodologico generale del networking di teorie (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008) è organizzato in coppie di strategie simili che esporremo brevemente di seguito.

*Comprendere e rendere comprensibile*
Gli autori sottolineano la necessità di individuazione di strategie che rendano comprensibile ad altri una data teoria elaborata, dato che "theories cannot be explained by their official terms alone" (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008, p. 9). A tale scopo sembrano avere un ruolo fondamentale degli esempi paradigmatici. Il ricorso a strategie di comprensione e spiegazione di una data teoria è precondizione per un networking con altre teorie, ma può anche accadere che il ricorso a una qualche strategia di networking si dimostri uno strumento utile per *comprendere* e *rendere comprensibile* le teorie coinvolte. In questo senso potrebbe essere molto utile il ricorso alla seconda coppia di strategie, che consiste nel comparare e contrastare le teorie.

*Comparare e contrastare*
Comparare e contrastare teorie sono due strategie simili che differiscono "gradualmente" l'una dall'altra, nel senso che il *comparare* è considerato un modo più neutro di confronto tra componenti teoriche, mentre il *contrastare* è più focalizzato sulle differenze (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008, p. 9). Gli obiettivi con cui si adottano tali strategie possono essere diversi, uno dei quali è quello competitivo, per esempio nel caso in cui si intende giustificare l'adozione di una teoria piuttosto che di un'altra. Gli autori citano a tale proposito Cobb (2007), secondo il quale è necessario che i criteri di contrasto tra teorie con obiettivi competitivi siano sempre basati su principi normativi chiaramente esplicitati. Prediger e coautori evidenziano tre tipologie di criteri per la

comparazione o il contrasto tra teorie, non necessariamente con obiettivi competitivi: (1) criteri che si collocano a un livello generale e si basano su aspetti impliciti o espliciti della struttura teorica delle teorie; (2) criteri che si collocano a un livello più concreto, in cui le teorie vengono esaminate tramite la loro azione nella ricerca emprica; (3) criteri qualitativi definiti a priori (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008).

*Coordinare e combinare*

Le due strategie che compongono la coppia *coordinare* e *combinare* vengono adottate con obiettivi più circostanziati, soprattutto nel momento in cui si intende comporre un quadro teorico per una ricerca, il cui obiettivo è quello di connettere teorie per la comprensione articolata di dati o di fenomeni empirici.

Mentre la combinazione di teorie non richiede una compatibilità tra le teorie, in quanto esse possono essere anche semplicemente affiancate l'una all'altra, in una prospettiva che potremmo chiamare pragmatica, dove l'utilità del ricorso a lenti d'analisi differenti è prioritario rispetto a una coerenza globale dell'approccio, il coordinamento tra teorie mira a un quadro teorico coerente nel suo complesso e richiede di solito un certo grado di compatibilità tra le teorie, anche se diversi modi di connessione possono richiedere diversi gradi di compatibilità (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008).

*Sintetizzare e integrare*

L'ultima coppia di strategie simili individuata da Prediger, Bikner-Ahsbahs e Arzarello (2008) è quella composta dalle azioni di sintesi e integrazione. La possibilità di *sintetizzare* e *integrare* teorie può emergere come risultato dell'adozione della strategia di coordinamento. È possibile parlare di sintesi di teorie se esse hanno un grado di sviluppo e maturità simile e se dalla loro connessione emerge una nuova teoria. Gli autori portano come esempio in questo senso la prospettiva epistemologica sulle interazioni sociali di Steinbring (2005, 2008), la quale è emersa da una sintesi tra approcci di natura epistemologica e approcci di natura sociale. Si parla invece di integrazione tra teorie se esse hanno un grado di sviluppo e maturità differente e se la teoria più giovane o meno matura viene usata per integrare localmente quella più matura, anche se questo modo di procedere non deve essere inteso come una unificazione totale tra teorie ma appunto come una integrazione *locale*.

Il ricorso a una o all'altra strategia di *networking* verrà evidenziato nel corso dell'esposizione della tesi.

# PRIMA PARTE

# 5. Gli oggetti “didattici” in didattica della matematica

I contributi in letteratura relativi agli oggetti in didattica della matematica possono essere suddivisi in tre categorie: definizioni esplicite di “oggetto matematico”, di solito fornite nell’ambito di qualche teoria o approccio in didattica della matematica; accezioni diverse di “oggetto” considerate da un punto di vista prasseologico o in riferimento alla formazione degli insegnanti; riflessioni di natura metateorica e ontologica in riferimento agli oggetti della didattica della matematica.
Nel presente capitolo esamineremo le modalità con cui si usa parlare di “oggetti” in didattica della matematica in queste tre circostanze, con l’obiettivo di circoscrivere il contesto di ricerca e verificare se è possibile individuare sulla base di questa prima indagine dei criteri di cui una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica deve tenere conto, in sintonia con la domanda di ricerca *D1*.

## 5. 1. Analisi

### 5. 1. 1. Definizioni di oggetto matematico in didattica della matematica

Nella prima tipologia di contributi rientrano la definizione di “oggetto matematico” fornita nell’ambito della teoria antropologica della didattica (Chevallard, 1992), la definizione di oggetto matematico dal punto di vista delle relazioni tra noetica e semiotica in didattica della matematica (D’Amore, 2001a, 2005b), le definizioni fornite nell’ambito della teoria dell’oggettivazione (Radford, 2008a; 2014a, 2019), dell’approccio ontosemiotico (Godino & Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Font, & Gallardo, 2013) e dell’approccio semio-cognitivo (Duval, 1993, 2009), nonché le caratterizzazioni delle routine oggettivate in Lavie, Steiner, & Sfard (2019) e dei processi oggettivati nell’ambito dell’APOS Theory (Dubinsky, 1991; Dubinsky & Mc Donald, 2009).
Secondo Chevallard, nell’ambito della teoria antropologica della didattica, un oggetto matematico è un “emergente da un sistema di praxema” (Chevallard, 1991, p. 8), cioè un emergente dalle attività che coinvolgono oggetti materiali appartenenti a diversi registri semiotici[19] (orale, gestuale, delle iscrizioni etc.). In questo contesto gli oggetti didattici sono dunque in prima linea oggetti pragmatici,

[19] Il termine “registro semiotico” è usato da Chevallard (1991) in un senso più ampio di quanto ciò non avvenga nella teoria dei registri semiotici (Duval, 1993), nella quale i registri semiotici hanno la caratteristica di consentire dei trattamenti tra le rappresentazioni semiotiche che vi appartengono sulla base di regole prestabilite.

nel senso che emergono come risultati dell'attività umana e non esistono indipendentemente da essa.
Per D'Amore gli oggetti matematici sono invece "simboli di unità culturali che emergono da un sistema di utilizzazioni che caratterizzano le pragmatiche umane" (D'Amore, 2001, pp. 15–16). Gli oggetti matematici emergono dunque in questo contesto come simboli di unità culturali, cioè non solo come risultati delle pratiche umane, ma anche in funzione alla cultura di appartenenza degli esseri umani che attuano tali pratiche.
Radford definisce gli oggetti matematici come dei pattern fissi che emergono dalle pratiche sociali in un dato contesto culturale: (…) mathematical objects are fixed patterns of reflexive human activity encrusted in the ever changing world of social practice mediated by artifacts. (Radford, 2008a, pp. 221–222). Nella teoria dell'oggettivazione (*Theory of Objectification*, TO), gli oggetti matematici emergono sì dalle attività umane e sono culturalmente determinati, ma per la loro oggettivazione è indispensabile inoltre la pratica sociale mediata dagli artefatti culturali.
Secondo Duval, invece, l'oggetto matematico è un invariante rispetto alle trasformazioni semiotiche: "(…) l'objet mathématique est l'invariant d'une multiplicité possible de représentations sémiotiques" (Duval, 2009, p. 105). In questo contesto gli oggetti matematici sono esaminati dal punto di vista delle trasformazioni semiotiche che è necessario compiere per appropriarsi cognitivamente di essi, dato che l'attività matematica è essenzialmente di natura semiotica per via dell'inaccessibilità degli oggetti matematici attraverso i sensi.
Nell'approccio ontosemiotico possiamo trovare diverse caratterizzazioni dell'idea di oggetto matematico, come per esempio la seguente: "(…) any entity which is involved in some way in mathematical practice or activity and which can be separated or individualized" (Font, Godino, & Gallardo, 2013, p. 13).[20]
In questo contesto l'oggetto matematico ha caratteristiche diverse rispetto a quelle che si attribuiscono di solito agli oggetti matematici concettuali (per esempio l'oggetto "derivata", l'oggetto "funzione", l'oggetto "equazione" etc.), dato che nell'approccio ontosemiotico fanno parte dell'oggetto matematico anche componenti come le pratiche, le procedure, le risorse semiotiche etc. che si attivano nelle situazioni problematiche che hanno quel dato oggetto matematico come soluzione.
Una maniera ancora diversa di approcciarsi agli oggetti matematici è quella di Lavie, Steiner e Sfard (2019). Le autrici non definiscono l'idea di oggetto matematico, ma forniscono una descrizione del processo tramite il quale esso emerge. In questo contesto gli oggetti matematici sono costituiti da una sorta di "condensazione" di pratiche discorsive routinizzate che corrispondono a degli oggetti matematici concreti realizzati tramite tali routine e dal nuovo significante che emerge come invariante rispetto a esse: "(…) the signifier itself, together with

[20] Nel paragrafo 8.3.1. sono riportate ulteriori caratterizzazioni/definizioni di oggetto matematico formulate nell'ambito dell'approccio ontosemiotico.

all its possible mathematical object realizations, could be viewed as a new mathematical object" (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019, p. 164).

Inoltre, per Dubinsky e McDonald, "An object is constructed from a process when the individual becomes aware of the process as a totality and realizes that transformations can act on it" (Dubinsky & McDonald, 2001, p. 276). Anche in questo caso, più che fornire una definizione di oggetto matematico, gli autori descrivono le modalità con cui esso si viene a costituire. Tuttavia, come vedremo in dettaglio nel capitolo 8, mentre in Lavie, Steiner e Sfard (2019) il processo di oggettivazione delle routine attraverso il *signifier* acquisisce una dimensione oggettiva, non legata al solo punto di vista di colui che compie tale oggettivazione, nel caso di Dubinsky (1991) e Dubinsky e McDonald (2001) l'oggetto in questione è esclusivamente un oggetto mentale dell'individuo.

Simile per certi versi a quello appena descritto, almeno in riferimento alla dualità processo-oggetto come aspetto determinante per l'emergenza degli oggetti matematici, è l'approccio di Sfard (1991), secondo cui le nozioni matematiche astratte hanno, sia dal punto di vista epistemologico sia dal punto di vista psicologico, cioè cognitivo, una doppia natura: operazionale e strutturale, ma la prima emergenza della natura strutturale è il frutto di una reificazione dell'oggetto inteso come un'entità strutturale. In questo senso la fase operazionale precede quella strutturale, anche se successivamente le due nature che da esse discendono convivono una accanto all'altra.

Menzioniamo infine l'approccio di Gray e Tall (1994), che introduce l'idea di *procept*, la quale permette di superare la dualità processo-oggetto evidenziata da Sfard (1991) e Dubinsky (1991) e Dubinsky e McDonald (2001). Il *procept* è "un'amalgama" (Gray e Tall, 1994, p. 120) tra concetto e processo che consente di usare lo stesso simbolo matematico per riferirsi sia al processo che genera l'oggetto nella mente del soggetto sia all'oggetto stesso. Sottolineiamo che anche in questo caso non si tratta dunque di una definizione di oggetto matematico, ma della caratterizzazione di un concetto che consente di esprimere l'uso diverso di un simbolo.

Chiudiamo questo paragrafo evidenziando che sulla dualità processo-oggetto e sugli approcci di Sfard, Dubinsky e Gray e Tall torneremo più in dettaglio nel capitolo 7, nel quale ci occuperemo degli approcci ai concetti in didattica della matematica, mentre l'approccio di Sfard (1991) fornirà l'inquadramento metodologico per il capitolo 6. Nel capitolo 8 esamineremo invece in dettaglio sette delle definizioni e descrizioni di oggetti matematici fornite all'inizio di questo paragrafo, studiando il contesto in cui esse emergono e mettendo a confronto le loro caratteristiche, con lo scopo di caratterizzare l'idea di oggetto matematico della didattica della matematica "per astrazione" dai diversi approcci.

### 5. 1. 2. “Oggetti” in didattica della matematica dal punto di vista prasseologico o in riferimento alla formazione degli insegnanti

In questo paragrafo ci soffermeremo primariamente su due modalità di intendere il termine “oggetto” in didattica della matematica: come “boundary object” (Star, 1988, 2010) o come “didactical object” (Thompson, 2002).
Secondo Star (2010) un *boundary object* è un qualsiasi oggetto materiale o astratto (anche una teoria può essere un *boundary object*), la cui interpretazione è flessibile, facendo sì che esso possa fungere da elemento di congiunzione tra persone o gruppi di persone che hanno punti di vista differenti e non necessariamente compatibili, ma che desiderano instaurare un qualche genere di collaborazione. La caratteristica di *boundary object* non è quindi una caratteristica intrinseca dell’oggetto, ma deriva dal suo uso. Attraverso il lavoro comune sul *boundary object,* gli interlocutori possono superare le frontiere create dalle loro posizioni interagendo con la controparte, senza dover abbandonare il proprio punto di vista a favore di quello dell’altro. Un *boundary object* consente dunque di realizzare una “collaborazione senza consenso” (Star, 2010).
In didattica della matematica il concetto di *boundary object* è usato con modalità differenti, come per esempio nel caso in cui si cerca di mettere in comunicazione i contesti concreti in cui si presentano contenuti matematici con le nozioni matematiche astratte corrispondenti (Venkat & Winter, 2015), oppure per caratterizzare il concetto di *task situation*, in cui si realizza la comunicazione tra insegnante e studente riguardo a un dato contenuto matematico (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019), oppure ancora per realizzare una collaborazione tra ricercatori (in didattica della matematica) e docenti (Robutti, Aldon, Cusi, Olsher, Panero, Cooper, Carante, & Prodromou, 2020).[21]
A nostro avviso anche il concetto di *procept* esposto nel paragrafo precedente può essere interpretato in questo senso, se si considera il simbolo matematico come un *boundary object* astratto che consente di superare la “frontiera” tra il concetto matematico inteso come processo e lo stesso concetto inteso come oggetto, grazie alla flessibilità dell’interpretazione del simbolo. Non ci risulta tuttavia che una tale interpretazione sia presente esplicitamente in letteratura.
Concludiamo sottolineando che il concetto di *boundary object* è un costrutto versatile che può essere utile per inquadrare dei transiti concettuali, ma non è certo di per sé una definizione di oggetto dinamico in didattica della matematica.
Un’altra modalità con cui si ricorre al termine “oggetto” in didattica della matematica è data dalla locuzione “didactical object”.
Thompson (2002) usa il termine *didactical object* per descrivere degli artefatti in uso prevalentemente nella formazione docenti con l’obiettivo di fornire all’insegnante degli strumenti didattici per progettare e costruire contesti adatti (in termini di quesiti, rappresentazioni, problemi etc.) utili per far emergere le

[21] Per una indagine bibliografica approfondita sui concetti di *boundary object* e di *boundary crossing* si veda Akkerman e Bakker (2011).

concezioni (soprattutto le concezioni non adeguate agli obiettivi curricolari) degli studenti, prevedendo le possibili modalità di risposta e di evoluzione dei concetti matematici nell'ambito del processo di insegnamento e apprendimento. Gli strumenti concreti o astratti sui quali si basa la costruzione di tali contesti prendono il nome di *didactical objects*. A proposito di questo modo di intendere gli oggetti didattici si veda anche Lima, McClain, Castillo-Garsow e Thompson (2009).
Il concetto di *didactical object* non deve essere confuso con il concetto di *oggetto matematico specifico della didattica della matematica* sul quale si focalizza la presente tesi, in quanto quest'ultimo non è uno strumento concettuale per l'insegnante, ma un oggetto e uno strumento teorico del e per il ricercatore in didattica della matematica.
In questo senso evidenziamo il fatto che il concetto di oggetto matematico specifico della didattica della matematica si distingue per motivi analoghi anche da quello di *pedagogical content knowledge* (PCK) (Schulman, 1987), inteso come l'insieme delle conoscenze specifiche (esempi, rappresentazioni, spiegazioni etc.) necessarie per favorire l'apprendimento relativo a specifici concetti matematici che i docenti acquisiscono nel tempo e che può essere a sua volta tema di corsi di formazione per gli insegnanti.
Detto diversamente: così come l'insegnante non insegna il proprio PCK agli studenti, ma insegna con il suo aiuto, così anche il ricercatore in didattica della matematica ha delle conoscenze concettuali specifiche che non sono spendibili direttamente in aula o nei corsi di formazione per docenti, ma che gli sono indispensabili per fare ricerca, sia analizzando e interpretando i fenomeni prasseologici sia producendo risultati puramente teorici.
Gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica a cui ci riferiamo nel presente lavoro di tesi sono oggetti di questa seconda tipologia; essi non sono il risultato di semplici euristiche ma sono risultati scientifici della didattica della matematica. Questo non significa naturalmente che le due tipologie di conoscenze concettuali, PCK e oggetti matematici specifici della didattica della matematica siano a intersezione vuota, come vedremo nel capitolo successivo, dove presenteremo alcuni esempi di oggetti matematici specifici della didattica della matematica. In questi casi il contenuto concettuale può essere lo stesso, ma è il suo contesto di analisi e il suo uso a renderlo del tutto diverso. In tali casi il contenuto concettuale in questione può essere considerato come un *boundary object* per la collaborazione tra ricercatori e docenti.

### 5. 1. 3. Riflessioni di natura metateorica e ontologica in riferimento agli oggetti della didattica della matematica

Metariflessioni riguardanti la natura degli oggetti della didattica della matematica si trovano in vari contesti in letteratura: legati a una metateoria della didattica della

matematica all'interno della Theory of Mathematics Education Program proposta da Steiner (1985, 1987); legati alle ricerche sul concetto di teoria in didattica della matematica (Mason & Waywood, 1996); legati all'idea di oggetto di una possibile filosofia prima della didattica della matematica (Ernest, 2012; 2016).
Steiner (1985, 1987) esamina la questione di un approccio sistemico, promuovendo l'idea di una metateoria che dovrebbe basarsi su discipline differenti, e prende in considerazione alcune metacaratteristiche del campo di ricerca così ottenuto, focalizzandosi sulla sua organizzazione in termini di sistema autopoietico, cioè di sistema auto-organizzativo e auto-riproduttivo (Maturana & Varela, 1984/2003). In questo contesto, gli oggetti della didattica della matematica sono implicitamente intesi come riferiti a diverse epistemologie, il che porta Steiner a contrapporre un approccio riduzionista a un "more empirical and factual understanding" (Steiner, 1987, p. 47). Detto diversamente, Steiner evidenzia il fatto che un eventuale programma di ricerca unificante per la disciplina didattica della matematica necessiterebbe di una momentanea sospensione della prospettiva riduzionista che crea teorie monolitiche basate su principi primi fondanti, impedendo di trascendere le diversità negli approcci a favore di una base comune. Tale base potrebbe essere trovata, secondo Steiner, su un terreno più empirico, legato ai fatti piuttosto che alle basi teoriche, riassumibile appunto nel concetto di "programma di ricerca".
Steiner non fornisce una più dettagliata caratterizzazione degli oggetti base sui quali potrebbe articolarsi una metateoria, ma l'idea di un programma scientifico per la didattica della matematica da lui proposto diventerà successivamente il punto di partenza per l'approccio ontosemiotico (Godino & Batanero, 1994; Godino, 2002; Font, Godino, Gallardo, 2013), già menzionato in precedenza.
Mason e Waywood (1996) discutono esplicitamente il problema della natura degli oggetti di una teoria. Gli autori affermano che "invoking a theory entails ontological commitment to the objects created in, by, and for the theory" (Mason & Waywood, 1996, p. 1056) ed evidenziano che non solo le teorie sottostanti alle ricerche in didattica della matematica (comportamentismo, costruttivismo, sociocostruttivismo, postmodernismo etc.), ma anche le metodologie di ricerca (metodi etnografici, ermeneutici, fenomenologici, action-based etc.) coinvolgono scelte ontologiche precise. Anche se gli autori non trattano in maniera esplicita l'argomento degli oggetti matematici in didattica della matematica, essi sottolineano la necessità di affrontare gli aspetti ontologici come una esigenza trasversale alle teorie in didattica della matematica.
D'altro canto, Ernest (2012, 2016), come già discusso nel capitolo 2, esamina diverse possibilità per una filosofia prima in didattica della matematica (epistemologia, ontologia, etica etc.) e i vincoli che porterebbe con sé la scelta di ciascuna di esse come filosofia prima della didattica della matematica. Postulando che l'etica sia la filosofia prima della didattica della matematica, l'Autore conclude che gli "oggetti" della didattica della matematica sono gli esseri umani. Questa posizione è in linea con quello che Stinson e Bullock (2012) chiamano "the

socio-political-turn moment", identificato dagli autori come l'ultimo cambio di prospettiva (in ordine temporale), nella storia della didattica della matematica come disciplina.

Come esporremo più in dettaglio nel seguito della tesi, a nostro avviso è possibile considerare l'aspetto concettuale, più prettamente matematico, degli oggetti della didattica della matematica, anche in maniera autonoma, cioè assumendo come costante la componente socioculturale legata direttamente all'essere umano. Per evitare equivoci in questo senso abbiamo infatti scelto di parlare di oggetti *matematici* specifici della didattica della matematica, piuttosto che di oggetti della didattica della matematica.

Dalla discussione fin qui proposta emergono soprattutto due aspetti, all'apparenza in netta contraddizione tra loro: (1) il fatto che la questione relativa agli oggetti della didattica della matematica, e quindi alla loro componente concettuale, è un argomento metateorico, per la cui trattazione è necessario trascendere gli approcci delle singole teorie in didattica della matematica; (2) il fatto che un approccio agli oggetti matematici specifici della didattica della matematica è necessariamente legato ad aspetti epistemologici, i quali sono però di dominio delle singole teorie in didattica della matematica.

Discutiamo di seguito questi due punti, in modo più approfondito.

Il punto (1) richiama l'attenzione sul fatto che più che di "oggetti" è forse opportuno parlare di metaoggetti in didattica della matematica. Di conseguenza sembra necessario esaminare il significato stesso del concetto di "teoria" come metaoggetto in didattica della matematica, al fine di verificare in quali termini si usa parlare di oggetto in tale contesto.

Il punto (2) richiama invece l'attenzione sulla necessità di interrogarsi sulla questione se sia possibile o meno parlare di oggetti matematici specifici della didattica della matematica prescindendo da una teoria specifica. Questo interrogativo è strettamente legato a quello del punto (1), in quanto solo un metaoggetto può svolgere il ruolo di oggetto matematico specifico in didattica della matematica nel senso evidenziato dal punto (2), cioè facendo comunque riferimento alla sua natura epistemologica.

Per quanto riguarda il concetto di teoria come metaoggetto in didattica della matematica, possiamo citare Niss (2007), secondo cui una teoria in didattica della matematica è "an organized network of concepts (including ideas, notions, distinctions, terms etc.) and claims about some extensive domain, or a class of domains, consisting of objects, situations and phenomena" (Niss, 2007, p. 98).

Secondo Radford (2008b), invece, una teoria in didattica della matematica è una terna composta da: i) un sistema di principi organizzati gerarchicamente che caratterizzano la teoria da un punto di vista epistemologico; ii) una metodologia di ricerca; iii) un sistema di domande paradigmatiche di ricerca il cui significato si esplica nell'ambito del sistema di principi. Una teoria è per Radford non solo un modo per categorizzare e formalizzare, ma anche per produrre comprensione e modi di agire.

Prediger, Bikner Ahsbahs e Arzarello (2008), piuttosto che fornire una definizione di teoria e dei concetti a essa connessi, distinguono due modalità differenti di intendere il concetto di teoria: (a) un approccio statico e normativo (per esempio quello proposto da Niss, che ha la caratteristica di un sistema assiomatico nel senso classico) e (b) un altro, al quale gli autori dichiarano di aderire loro stessi, che vede la teoria come uno strumento di ricerca che in una prospettiva dinamica di teoria evolve con l'evolvere della ricerca stessa.
Possiamo notare che in nessuna delle prospettive relative all'idea di teoria in didattica della matematica qui esaminate viene fornita una definizione dei termini primi coinvolti, cioè di quelli che possiamo chiamare "gli oggetti della didattica della matematica", anche se Niss (2007), così come anche Mayson e Waywood (1996), sottolineano l'opportunità di una definizione in questo senso.
In una prospettiva di teoria statica come quella di Niss (2007), la problematica relativa a una definizione degli oggetti primi della disciplina è dovuta probabilmente in prima linea alla difficoltà oggettiva nel determinare le relazioni tra gli "assiomi" iniziali, che costituiscono un intreccio complesso di presupposti e metodologie, spesso eterogenei e derivanti da diverse discipline.
In una prospettiva dinamica, come quella alla quale aderiscono Prediger, Bikner Ahsbahs, e Arzarello (2008), il motivo per una mancata definizione è di natura teorica prima che pratica. Infatti, in questo contesto, l'idea di una definizione di oggetto della teoria può essere vista come incompatibile con l'approccio specifico adottato, che richiede per sua natura una concezione molto flessibile (e dunque più "vaga", in quanto dinamica) di teoria.
Infine, dal punto di vista assunto da Radford, più che la teoria è lo stesso oggetto di studio della didattica della matematica, cioè è l'acquisizione di conoscenza, a essere visto come una *forma di vita* complessa e quindi difficile da oggettivare epistemologicamente (Radford, 2014b, citato in Santi, 2019, p. 45).
Possiamo affermare che, per quanto riguarda i primi due aspetti, ci sembra importante chiarire se è possibile tenere conto sia di una dimensione dinamica sia di una dimensione statica di oggetto, in accordo con le visioni dinamica o statica di teoria, dato che una concezione dinamica e interpretativa di teoria in didattica della matematica richiede anche una concezione dinamica e interpretativa di oggetto matematico specifico della didattica della matematica. Infatti, se si considera l'idea di oggetto in senso classico, cioè come qualcosa di preesistente all'atto della sua percezione, oltre che separato dal soggetto che lo percepisce, il concetto di teoria come strumento flessibile e dinamico di ricerca sembra scontrarsi con l'idea stessa di ontologia intesa come lo studio degli "objects we take for granted as populating the universe we study" (Ernest, 2012, p. 12). In effetti, considerare gli oggetti di una teoria come entità già esistenti si scontra con l'idea dinamica di teoria che presuppone che tali oggetti siano in evoluzione e che emergono mentre vengono studiati.
Un aspetto importante da indagare è dunque se sia possibile considerare un'idea di oggetto in didattica della matematica che fornisca comunque una base per

un'ontologia in didattica della matematica, ma che non sia in contraddizione con l'idea dinamica di teoria, nonché la possibilità di conciliare una visione statica e una dinamica degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica. Un tale genere di ontologia potrebbe essere un buon terreno per considerare un metaoggetto avente un grado di generalità tale da trascendere le idee di teoria qui esposte.
Per quanto riguarda il terzo aspetto, cioè il fatto che l'apprendimento come oggetto di studio della didattica della matematica si presenti come una forma di vita complessa, difficilmente oggettivabile epistemologicamente, da esso consegue che, al fine di poter tenere conto della complessità di tali oggetti, una loro oggettivazione epistemologica richiede la presa in considerazione esplicita e contestuale di:

- elementi legati alla matematica, basati sul legame tra gli oggetti matematici della matematica come disciplina e gli oggetti matematici corrispondenti per come si presentano in didattica della matematica, nonché
- elementi legati alla didattica della matematica, riconducibili al fatto che gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica sono oggetti che emergono da pratiche specifiche della didattica della matematica come disciplina, la quale ha paradigmi, obiettivi e strumenti metodologici diversi da quelli della matematica come disciplina.

Veniamo ora al punto (2), cioè al fatto che un approccio agli oggetti matematici della didattica della matematica richiede un riferimento epistemologico, ma che gli aspetti epistemologici sono di dominio delle singole teorie in didattica della matematica.
Riguardo a questo punto ci sembra lecito porre la domanda se l'oggettivazione di un contenuto in didattica della matematica sia possibile solo all'interno di una teoria. Prendendo spunto dalla matematica, una possibile risposta, di ispirazione formalista, potrebbe effettivamente essere affermativa, ma è anche vero che spesso, prima di arrivare a una teoria assiomatica formale, il percorso seguito nella storia della matematica è stato proprio quello inverso: i matematici sono giunti all'oggettivazione di un contenuto matematico a partire dallo studio di quello che prima era considerato come un processo risolutivo, inquadrandolo in termini di oggetto di studio a sé stante. Questo modo di procedere ha portato spesso alla nascita di una teoria in grado di fornire una base teorica per lo studio di questo nuovo oggetto.
Un esempio in questo senso è la nascita dell'algebra astratta a partire dallo studio dei gruppi di permutazioni delle soluzioni delle equazioni algebriche. Il passaggio verso l'oggettivazione di un metaoggetto "gruppo" ha dato origine a una nuova branca della matematica, l'algebra astratta, ma questo passaggio è stato possibile solo grazie al fatto che le equazioni erano state studiate come oggetti in sé: invece di domandarsi se un certo tipo di equazione sia risolvibile in generale, ci si è posta la domanda a quali condizioni le equazioni ammettono soluzioni generali. Ciò è

avvenuto senza che fosse preesistente una "teoria delle equazioni" oppure una "teoria delle strutture algebriche".
Quello appena riportato ci sembra un esempio classico (e certamente non unico) che testimonia il fatto che in matematica è lecito pensare, definire e studiare inizialmente un oggetto indipendentemente da una teoria esistente, pur ammettendo il fatto che è solo all'interno di una teoria che esso acquisisce una vera "identità", sulla base delle relazioni con altri elementi che vi appartengono.
Un analogo cambio di prospettiva in didattica della matematica, che sposti il focus dalla teoria in cui si definisce l'oggetto matematico, all'oggetto stesso, potrebbe permettere di proporre una diversa riflessione sulla natura degli "oggetti matematici specifici della didattica della matematica". Se ciò è lecito in matematica, che è una disciplina formale, appare a maggior ragione lecito in didattica della matematica.
Considerare la questione relativa agli oggetti matematici specifici della didattica della matematica facendo riferimento solo ad aspetti epistemologici generali e non ad aspetti specifici di un particolare approccio metateorico ci sembra quindi una strada lecita da percorrere; essa dovrebbe anche consentirci di inquadrare il problema relativo agli oggetti matematici specifici della didattica della matematica prescindendo dagli approcci epistemologici specifici delle teorie in didattica della matematica.
Questa prospettiva si presenta come il punto focale della presente tesi e ci porta a riassumere le seguenti questioni emerse finora dall'analisi come esigenze relative a una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica.

(1) la necessità di individuare una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica che sia compatibile con una visione statica, ma anche con una visione dinamica di teoria, al fine di tenere conto delle diverse concezioni metateoriche in didattica della matematica;
(2) la necessità di tenere conto del rapporto di tale oggetto con gli oggetti matematici della matematica come disciplina, cioè con la matematica istituzionalmente riconosciuta dai matematici, al fine di poter rendere conto dell'aspetto epistemologico concettuale;
(3) la necessità di tenere conto degli aspetti specifici della didattica della matematica come disciplina, oltre che di quelli più prettamente concettuali matematici, al fine di poter tenere in considerazione gli aspetti epistemologici specifici della didattica della matematica.
A questi tre punti si aggiunge un altro aspetto emerso in precedenza, cioè il fatto che:
(4) una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica deve prescindere dalle condizioni imposte dagli approcci epistemologici nelle singole teorie in didattica della matematica, al fine di poter essere considerata una definizione effettivamente generale.

## 5. 2. Sintesi

Dall'analisi effettuata in questo capitolo emergono dunque i seguenti quattro criteri che una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica dovrebbe soddisfare.
Una tale definizione dovrebbe:

*(1) essere compatibile con una visione statica, ma anche con una visione dinamica di teoria in didattica della matematica;*
*(2) tenere conto del rapporto tra gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica come disciplina e gli oggetti matematici della matematica come disciplina, nella loro versione formale;*
*(3) tenere conto degli aspetti ontologici specifici della didattica della matematica come disciplina, oltre che di quelli più prettamente concettuali matematici;*
*(4) essere sufficientemente generale da poter astrarre dall'approccio epistemologico nelle diverse teorie specifiche in didattica della matematica.*

Le caratteristiche evidenziate nel paragrafo precedente hanno consentito di fornire una prima risposta parziale alla domanda di ricerca *D1*. I criteri individuati dovranno però essere precisati, ampliati e integrati sulla base di analisi e sintesi successive, che verranno svolte nei capitoli 6, 7, 8 e 9.

# 6. Alcuni esempi di oggetti matematici specifici della didattica della matematica

Nel presente capitolo forniremo alcuni esempi di oggetti didattici specifici della didattica della matematica, intesi come entità matematiche che si manifestano nell'ambito della didattica della matematica come oggetti di studio relativi alla prassi scientifica della disciplina, ma che non sono identici agli oggetti matematici con cui condividono di solito (almeno in parte) il nome.
Per inquadrare teoricamente il nostro modo di procedere nel presente capitolo, faremo soprattutto riferimento a Sfard (1991).
In Sfard (1991), l'Autrice mostra che sia nell'evoluzione storica delle nozioni matematiche astratte sia nella loro costruzione cognitiva da parte dell'individuo (aspetto che l'autrice chiama "psicologico") è possibile riconoscere una doppia natura: esse si presentano prima in una versione operativa, procedurale, e solo dopo in una versione strutturale, oggettivata.
Sfard caratterizza tre stadi consecutivi nella transizione dalla fase operativa a quella strutturale: *interiorizzazione* (interiorization), *condensazione* (condensation), *reificazione* (reification).
Seguendo Piaget, Sfard evidenzia il fatto che un processo è stato *interiorizzato* se può essere riprodotto in termini di rappresentazioni mentali; inoltre, "in order to be considered, analyzed and compared it needs no longer to be actually performed" (Sfard, 1991, p. 18).
Successivamente, durante la fase di *condensazione*, il soggetto diventa "more and more capable of thinking about a given process as a whole, without feeling an urge to go into details" (Sfard, 1991, p. 19).
L'ultimo stadio, cioè la *reificazione*, è diverso dai due precedenti per la modalità con cui si presenta. Mentre i primi due stadi, cioè l'interiorizzazione e la condensazione, richiedono un cambiamento graduale, quantitativo, la reificazione consiste in un salto qualitativo; essa è definita come "an ontological shift-a sudden ability to see something familiar in a totally new light (…) an instantaneous quantum leap: a process solidifies into object, into a static structure" (Sfard, 1991, pp. 19–20).
Il nostro obiettivo è quello di mostrare che, in analogia con quanto mostrato da Sfard per le nozioni matematiche, cioè per quelli che possiamo chiamare *oggetti matematici della disciplina matematica*, è possibile mostrare che anche in didattica della matematica come disciplina esistono degli *oggetti matematici specifici della didattica della matematica* che subiscono un processo simile, diventando a un certo punto oggetti di studio e di riferimento nella prassi di ricerca, dopo aver fatto parte della prasseologia d'aula o di ricerca.
Il nostro modo di procedere si baserà dunque sull'ipotesi di un'analogia tra la dualità delle nozioni matematiche astratte mostrata da Sfard (1991) in riferimento

alla loro evoluzione storico-epistemologica e una dualità analoga in didattica della matematica come disciplina specifica, autonoma. L'analogia da noi stabilita è dunque relativa alle due *discipline* matematica e didattica della matematica e non relativa agli aspetti epistemologico e cognitivo (o psicologico) delle nozioni matematiche. L'approccio di Sfard ci servirà anche per trarre un riferimento metodologico specifico per il lavoro del presente capitolo.
Prima di procedere con l'esposizione degli esempi, vogliamo esporre brevemente la motivazione che ci ha spinto a considerare l'analogia con l'approccio di Sfard (1991) e a trarre da esso un riferimento metodologico.
Premettiamo alcune riflessioni terminologiche relative al ricorso ai termini *oggettivazione* e *oggettificazione*.
Secondo la definizione fornita dal vocabolario on line *Treccani*, un oggetto è "ogni cosa che il soggetto percepisce come diversa da sé, quindi tutto ciò che è pensato, in quanto si distingue sia dal soggetto pensante sia dall'atto con cui è pensato" (Treccani, 2020), non necessariamente in una contrapposizione tra soggetto e oggetto, ma piuttosto in una complementarietà percettiva in senso hegeliano (Hegel, 1830).[22]
In didattica della matematica, il termine inglese *objectification* ha diversi significati. Per esempio, secondo Radford tale termine denota il processo di riconoscimento della conoscenza come qualcosa che non coincide con il soggetto stesso ma che gli si pone di fronte: "(K)knowledge appears as something that we encounter, wherein it *objects* (i.e. opposes) us. *Objectification* is precisely the process of recognition of that which objects us - system of ideas, cultural meaning, forms of thinking, etc." (Radford, 2013, p. 23). In questo contesto è fondamentale la componente sociale e culturale del processo di oggettivazione, in termini di creazione di conoscenza socialmente condivisa e quindi oggettiva. Sfard (2008) usa invece il termine "objectification" in un contesto puramente linguistico; infatti, secondo questa Autrice, esso denota un processo "in which a noun begins to be used as if it signified an extradiscursive, self-sustained entity (object), independent of human agency" (Sfard, 2008, p. 300).
In italiano è possibile distinguere tra *oggettivazione*, intesa nel senso di qualcosa che viene riconosciuto dal soggetto come separato da sé stesso, quindi in maniera analoga a come ciò avviene in Radford, e *oggettificazione*, intesa nel senso di privare qualcosa o qualcuno (per lo più in riferimento al corpo di un essere umano) della sua dimensione soggettiva e della sua dignità personale, rendendolo un oggetto che può essere usato secondo le proprie necessità.
Dato che nel presente lavoro ricorreremo a entrambi questi termini, puntualizziamo che useremo il termine *oggettivazione* in un senso simile a quello inteso da Radford, cioè per mettere in evidenza il fatto che un soggetto riconosce un contenuto concettuale come separato da sé stesso, ma soprattutto per esprimere il fatto che tale contenuto diventa un contenuto condivisibile o condiviso con altri.

[22] Sulla distinzione tra oggetto e concetto secondo Aristotele e Hegel torneremo con maggiori dettagli nel capitolo 7.

Il termine *oggettificazione* ci servirà invece per mettere in evidenza la componente soggettiva dell'oggettivazione, che può essere espressa per esempio attraverso il fatto che un verbo, un aggettivo etc. viene sostantivato nel discorso, rendendo così evidente quel passaggio dal processo all'oggetto, sul quale si basa l'idea di oggettificazione nel senso inteso da Sfard.
Tale distinzione ci sembra necessaria perché l'oggettivazione di un contenuto matematico, nel senso della sua percezione come qualcosa a cui si può pensare come a un'entità a sé stante, che si può denotare e comunicare e del quale si conoscono modalità e contesti d'uso, che in questo senso è quindi percepito come separato dall'individuo che ne parla, che lo denota, che lo comunica ad altri, che lo usa e per il quale riconosce un contesto appropriato d'uso, presuppone infatti un'oggettivazione individuale, cioè compiuta da parte di un soggetto. Ma tale oggettivazione, che chiamiamo appunto "oggettificazione", anche se compiuta dal soggetto in qualità di essere umano facente parte di una realtà socioculturale, è comunque un atto individuale.[23] D'altro canto però, dato che stiamo parlando di oggetti di una *disciplina scientifica*, la didattica della matematica, non possiamo trascurare l'importanza della dimensione sociale nell'oggettivazione della conoscenza, che si presenta come condizionata alla pubblicazione dei risultati in riviste o raccolte tematiche specializzate di tipo *peer reviewed* ed è quindi conoscenza non solo oggettificata, ma anche oggettivata.
Possiamo notare che, nelle considerazioni fatte da Sfard (1991), queste due dimensioni dell'oggettivazione (soggettiva e sociale) non sono chiaramente distinte e rimangono implicite anche nell'indagine *epistemologica*, cioè nell'indagine relativa alle concezioni delle nozioni matematiche nella loro evoluzione storico-epistemologica, oltre cha nella distinzione tra dimensione epistemologica e *psicologica*, cioè riferita all'analogo processo cognitivo del singolo studente.
Come già accennato, secondo Sfard è la reificazione a rappresentare il passaggio definitivo dalla prospettiva operazionale alla prospettiva strutturale, la quale si verifica quando "already accepted abstract objects have been converted into compact wholes, or reified (from the Latin word *res* – a thing), to become a new kind of self-contained static constructs" (Sfard, 1991, p. 42).
Dato che abbiamo ipotizzato che sussiste un'analogia tra l'oggettivazione, e dunque la reificazione, in matematica e in didattica della matematica, è necessario spiegare che cosa significhi "reificare" in didattica della matematica come disciplina. Per fare ciò dobbiamo prima di tutto chiarire come il concetto di reificazione viene usato da Sfard in riferimento all'evoluzione epistemologica in matematica, soprattutto in riferimento all'oggettivazione soggettiva (intesa come oggettificazione) e sociale. Questo ci sarà utile nel comprendere se e in quali

[23] Notiamo che quanto appena scritto non è in contraddizione con il ruolo dell'oggettivazione come processo socioculturale, come esso viene inteso per esempio nella TO (Radford, 2008a), in quanto noi non ci stiamo focalizzando sulle *condizioni* dell'oggettivazione, ma sull'*atto* oggettivante.

termini dall'analogia supposta tra le due discipline si possa trarre anche una metodologia specifica per le analisi compiute nel presente capitolo.

### 6. 1. Questioni metodologiche: l'approccio alla dualità processo-oggetto in Sfard (1991)

Nella sua indagine epistemologica, Sfard (1991) fa di frequente riferimento a nozioni reificate in senso generico, tramite la pratica matematica da parte dei matematici, senza che sia possibile individuare in tutti i casi un singolo soggetto (in uno specifico momento) che ha compiuto la reificazione di una data nozione, per così dire "per conto" di tutta la disciplina. Questo accade per esempio nel caso in cui si tratta di vedere l'evoluzione dei numeri come un processo che alterna concezioni operazionali a concezioni strutturali, durante il quale si giunge gradualmente all'ampliamento del concetto di numero, a partire dal conteggio di elementi in insiemi di oggetti concreti fino alla reificazione dei numeri complessi. In alcuni casi, Sfard individua invece un singolo soggetto nelle cui pubblicazioni è possibile trovare tracce della reificazione di una data nozione: una rappresentazione, un nome, una definizione etc. Un esempio in tale senso è la reificazione dei numeri complessi da parte di Argand attraverso il ricorso al piano complesso.
D'altra parte è anche vero che, come avviene di frequente in matematica, la stessa idea "nasce" in più contesti ed è esplicitata da parte di più matematici contemporaneamente, oppure senza che uno sia a conoscenza dei lavori dell'altro, e questo significa che non è possibile presupporre che il percorso evolutivo delle nozioni matematiche sia lineare. Infatti, il *piano di Argand* viene chiamato anche *piano di Argand-Gauss* perché Gauss fece uso di una rappresentazione simile dei numeri complessi in parallelo ad Argand. Inoltre, almeno nella storia più recente, sono frequenti le pubblicazioni collettive, a cui partecipano più autori, il che rappresenta già di per sé una sorta di oggettivazione sociale dei risultati di ricerca. Possiamo concludere che, dal punto di vista epistemologico in didattica della matematica, come anche in matematica, non è sempre possibile fare riferimento a un'unica persona o a un unico lavoro scientifico per sancire l'avvenuta reificazione di un oggetto. Inoltre, dato che l'obiettivo non è quello di studiare l'oggettificazione in termini di attività mentale compiuta da un singolo soggetto, ma l'oggettivazione sociale nella disciplina, anche se ci riferiamo a un singolo soggetto in qualità di autore di un articolo, ci stiamo in realtà riferendo non all'autore, ma al suo contributo scientifico inteso come strumento di oggettivazione dei suoi risultati di ricerca nella disciplina. In questo senso è indifferente se l'autore è un'unica persona o se l'articolo è scritto da un gruppo di persone.
Non possiamo però trascurare il fatto che la reificazione, vista come uno shift ontologico istantaneo, è una nozione di natura psicologica, necessariamente

riferibile all'attività mentale di un soggetto e non alla produzione scientifica di uno o più autori. Tuttavia, dato che non fa parte della prassi scientifica esplicitare tali shift ontologici nelle produzioni scientifiche, l'unico modo per risalire a essi è l'analisi dei testi pubblicati e la ricerca di indizi per la loro presenza, sulla base di opportuni criteri. Questa è d'altronde la modalità con cui anche Sfard (1991) ricorre al concetto di reificazione.

Concludiamo che le produzioni scientifiche pubblicate in riviste e raccolte tematiche specifiche del settore scientifico disciplinare della didattica della matematica, sottoposte a processo di peer review, possono essere considerate dei mezzi di oggettivazione sociale dei contenuti in esse presenti.

Non ci soffermiamo sulla reificazione dal punto di vista psicologico, cioè dal punto di vista del soggetto che apprende dato che, come sottolineato, per la nostra indagine non è importante l'analogia tra processo epistemologico e processo psicologico, ma quella tra processo epistemologico in matematica e processo epistemologico in didattica della matematica.

Torniamo ora alle caratteristiche della reificazione come strumento di oggettivazione.

In che cosa consiste il particolare carattere "oggettivante" della reificazione? In che senso essa è indice di un'avvenuta oggettivazione di un contenuto disciplinare?

Per gettare luce su questo aspetto procederemo mettendo a confronto due approcci simili alla dualità processo-oggetto in didattica della matematica: quello già introdotto di Sfard (1991) e quello di Dubinsky (1991) che introdurremo brevemente di seguito.

L'analisi che proponiamo qui delle differenze fra questi due approcci può essere vista come un caso particolare di applicazione del metodo *contrasting theories* (si veda il paragrafo 4.3.) nell'ambito del *networking* di teorie nella ricerca in didattica della matematica.

Come evidenziano (Prediger, Bikner Ahsbahs, & Arzarello, 2008): "comparing refers to similarities and differences in a more neutral way of perceiving theoretical components, contrasting is more focused on stressing differences. By contrasting, the specificity of theories and their possible connections can be made more visible (Prediger, Bikner Ahsbahs e Arzarello, 2008, p. 9).[24] Il *confronto* (comparison) tra teorie ha un importante ruolo di propulsore nell'incremento della conoscenza: "As the comparison often leads to make implicit assumptions and priorities in the core of the theories and in their empirical components explicit, the comparison contributes to a better understanding [of the theories]", anche se, secondo gli autori, tra *contrasting* e *comparing* ci sono solo differenze graduali e non di sostanza (Prediger, Bikner Ahsbahs e Arzarello, 2008, p. 9).

[24] Notiamo che in Scheiner (2016) si trova un'applicazione del metodo *comparing theories* al confronto tra gli approcci di Dubinsky (1991), Sfard (1991) e Gray e Tall (1994), finalizzato al rendere evidenti le analogie tra i tre approcci.

Nel caso da noi qui esaminato il *contrasting* ha in prima linea lo scopo di mettere in evidenza le caratteristiche di un approccio teorico (quello di Sfard), mentre quello di Dubinsky funge da una sorta di "cartina tornasole" o "mezzo di contrasto" per tale caratterizzazione, come mostreremo fra breve.

### 6. 1. 1. L'approccio alla dualità processo-oggetto in Dubinsky (1991)

Secondo Dubinsky la costruzione dei concetti matematici avviene tramite cinque forme caratteristiche dell'astrazione riflettente:[25]

> the construction of various concepts in advanced mathematics could be described in terms of the five forms of construction in reflective abstraction: interiorization, coordination, encapsulation, generalization, and reversal. We offer the conjecture that the construction of all mathematical concepts can be described in these terms. (Dubinsky, 1991, p. 105)

L'*interiorizzazione* (interiorization) consiste nella costruzione di processi come modalità per dare senso ai fenomeni percepiti; la *coordinazione* (coordination) consiste nella costruzione di nuovi processi a partire dalla composizione o coordinazione di due o più processi già costruiti; l'*incapsulamento* (encapsulation) è la conversione di un processo (dinamico) in un oggetto (statico); la *generalizzazione* (generalization) consiste nel riconoscimento dell'applicabilità di uno schema[26] a fenomeni diversi rispetto a quello in cui esso ha avuto origine; l'*inversione* (reversal) consiste nella capacità di costruire il processo inverso di un processo già interiorizzato (Dubinsky, 1991, pp. 100–101).[27]

---

[25] Dubinsky nota che, mentre le prime quattro forme che caratterizzano l'astrazione riflettente sono mutuate direttamente da Piaget, la quinta, cioè il *reversal*, è considerata solo implicitamente come tale da Piaget ed è aggiunta da Dubinsky stesso (Dubinsky, 1991, p. 100).

[26] Per Dubinsky uno *schema* è "a more or less coherent collection of objects and processes" (Dubinsky, 1991, p. 101) ed è simile a quello di *schème* usato da Piaget, per il quale rimandiamo al capitolo 6.

[27] Notiamo che l'articolo che stiamo esaminando, cioè Dubinsky (1991), è dedicato specificamente alla costruzione dei concetti matematici tramite l'astrazione riflettente piagetiana (anche su questo concetto si veda il capitolo 6), ma che tale lavoro si colloca come strumento base in una teoria più generale dell'apprendimento dei concetti matematici elaborata da Dubinsky e collaboratori; si tratta dell'APOS Theory. APOS sta per *Action-Process-Object-Schema* poiché, secondo tale teoria, il punto di partenza nella concettualizzazione è dato da una prima fase operativa, tramite la quale l'*azione* interiorizzata diventa un *processo* dinamico, la cui reiterazione culmina, tramite l'incapsulamento, con la formazione di un *oggetto* statico e con il consolidamento di uno nuovo *schema* (Dubinsky & McDonald, 2001).

### 6. 1. 2. Il *contrasting* tra gli approcci di Sfard e Dubinsky

Come possiamo notare, ci sono delle analogie tra l'approccio di Sfard e l'approccio di Dubinsky. Infatti, il tipo di *contrasting* che adotteremo qui è reso possibile proprio a causa delle forti analogie *strutturali* dei due approcci, evidenziate da Scheiner (2016). Tali analogie permettono di ridurre le variabili da tenere sotto controllo nel confronto solo con quelle che si desidera prendere in esame, nel caso specifico solo quelle relative alla natura dell'oggettivazione, caratterizzata attraverso il confronto tra i concetti di reificazione e incapsulamento e attraverso il confronto del ruolo delle rappresentazioni e della nominalizzazione nei due approcci.

### 6. 1. 3. La reificazione a confronto con l'incapsulamento

A nostro avviso è soprattutto il confronto tra reificazione e incapsulamento a segnare una differenza strutturale importante tra gli approcci di Dubinsky (1991) e Sfard (1991).
L'incapsulamento è una delle forme di astrazione riflettente individuate da Dubinsky; in essa un processo dinamico viene compattato in un oggetto statico, rendendo possibile il suo trattamento a un livello più alto di astrazione. L'incapsulamento non sembra però essere contrassegnato dalla repentinità che caratterizza la reificazione secondo Sfard. In effetti, l'incapsulamento si ottiene come risultato del coordinamento di più processi già costruiti e un tale coordinamento non sembra si possa considerare un'azione istantanea e repentina ma, al contrario, un processo graduale. Sfard esemplifica la reificazione attraverso il cambio di prospettiva necessario per scorgere nell'immagine sottostante (Figura 1) un cubo visto dall'alto, se si percepisce uno visto dal basso (o di fronte), e viceversa.

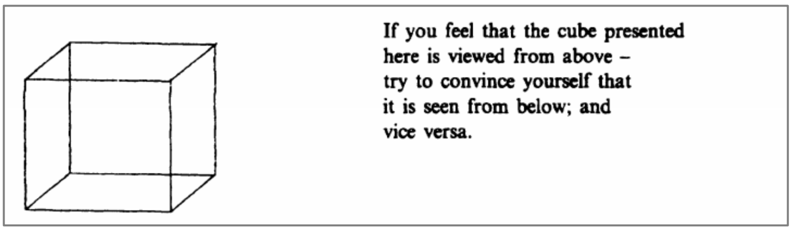



Figura 1. L'esperimento che Sfard propone ai lettori dell'articolo per esemplificare la natura della reificazione: "Se vi sembra che il cubo si veda dall'alto, cercate di convincervi che si veda dal basso; e viceversa" (Sfard, 1991, p. 33).

A confronto, un esempio di mancato incapsulamento secondo Dubinsky è quello che si ha se alla domanda sulla cardinalità dell'insieme

$$\left\{4,\left\{-3,2,-\frac{1}{7}\right\},\{\{17,5\}\}\right\}$$

si risponde che esso ha cardinalità 6, invece che 3, poiché questo vorrebbe dire che l'incapsulamento degli insiemi $\left\{-3,2,-\frac{1}{7}\right\}$, $\{17,5\}$ non è avvenuto (Dubinsky, 1991, p. 104).
Un esempio di avvenuto incapsulamento, invece, è dato dall'azione necessaria per poter considerare come un oggetto il processo di stima dell'area sottesa da una curva mediante somme e passaggio al limite, al fine di poter riconoscere come una funzione un integrale indefinito come il seguente (Dubinsky, 1991, p. 104):

$$log(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}, \quad x>0$$

In entrambi gli esempi non sembra che un cambio di prospettiva repentino possa produrre l'incapsulamento; esso sembra piuttosto il risultato di ciò che Sfard chiama *condensation*, secondo cui lo studente diventa appunto "more and more capable of thinking about a given process as a whole, without feeling an urge to go into details" (Sfard, 1991, p. 19).
Sembra dunque che la reificazione abbia un valore epistemico diverso rispetto a quello dell'incapsulamento e che la reificazione possa essere vista al più come un passaggio al limite di un incapsulamento.
Tuttavia, non è solo la repentinità della reificazione a spingerci a considerarla diversa dall'incapsulamento. Sfard descrive la reificazione anche come uno *shift ontologico*: "reification is an instantaneous quantum leap: a process solidifies into object, into a static structure" (Sfard, 1991, p. 20). Se consideriamo l'ontologia come lo studio dell'esistenza degli enti, allora uno shift ontologico è un atto che "chiama in essere" un'entità che prima non esisteva come un oggetto a sé stante. Dal punto di vista epistemico[28] il significato della reificazione è dunque molto diverso da quello dell'incapsulamento, poiché nel caso della reificazione si "chiamano in vita" delle entità di cui è possibile predicare qualcosa, in quanto esse possono assumere il ruolo di soggetto in una frase predicativa (Frege, 1891, 1892a), mentre questo non sembra essere un tratto distintivo dell'incapsulamento.[29]

---

[28] Con *epistemico* qui ci riferiamo alla caratteristica della conoscenza del singolo individuo; il termine è inteso come contrapposto a *epistemologico*, che invece intendiamo come riferito all'acquisizione e accettazione della conoscenza nelle discipline scientifiche come tali, compresi i loro metodi e i loro sistemi di razionalità di riferimento.

[29] Naturalmente con ciò non intendiamo affermare che la reificazione possa essere considerata un atto di "creazione" di oggetti ideali simili agli oggetti platonici. Infatti, la reificazione corrisponde a quella che Sfard (2009) chiama "la metafora oggettivante", secondo cui per motivi di efficienza

*Dunque, la reificazione chiama in causa una dimensione ontologica, oltre che epistemica, della conoscenza. Di contrasto, l'incapsulamento chiama in causa solo una dimensione epistemica della conoscenza.*

A nostro avviso l'analogia tra l'oggettivazione in matematica e l'oggettivazione in didattica della matematica può quindi essere considerata una strategia valida per l'individuazione di esempi di oggetti matematici specifici della didattica della matematica che possono essere visti come frutto di una reificazione.
Rimane tuttavia ancora da chiarire quali riteniamo che possano essere le caratteristiche di una reificazione, cioè sulla base di quali caratteristiche è possibile affermare che un dato contenuto matematico è oggettivato come un oggetto matematico specifico della didattica della matematica. A tale scopo esaminiamo il ruolo che hanno la nominalizzazione e le rappresentazioni in generale in riferimento alla reificazione.

### 6. 1. 4. Il ruolo delle rappresentazioni e della nominalizzazione nella reificazione e nella condensazione

Cerchiamo dunque di chiarire il ruolo che Sfard attribuisce alle rappresentazioni e alla nominalizzazione nel proprio approccio. A tale scopo applichiamo nuovamente il *contrasting theories* tra gli approcci di Sfard e Dubinsky, questa volta con l'obiettivo di chiarire il ruolo che ha la nominalizzazione nella reificazione, a differenza di quello che essa ha nell'incapsulamento.
Da un lato Dubinsky nota che:

> At this point we would like to suggest that, although the assigning of a name (…) to a process is closely connected with its encapsulation into an object, it is the encapsulation that is fundamental and gives 'meaning' to the name. To name processes without encapsulating them is the essence of jargon. (Dubinsky, 1991, p. 107)

Dall'altro lato, Sfard afferma, in riferimento alla condensazione e alla reificazione: "As in the case of computer procedures, a name might be given to this condensed whole. This is the point at which a new concept is 'officially' born" (Sfard, 1991, p. 19). E più avanti ancora:

> There is one thing, however, which is much too essential to be passed over in silence. It is the potential role of *names, symbols, graphs and other representations* in condensation and reification. Judging from the history, the importance of this factor can hardly be overestimated. For example, the introduction of the number line may

---

del linguaggio e per facilitare l'attività riflessiva senza sovraccaricare la memoria, noi tendiamo a oggettivare i contenuti del linguaggio che ci sono familiari. Un esempio in questo senso è la sostantivazione dei verbi o degli aggettivi.

> be viewed as a final trigger for the reification of negative numbers, and the invention of what is known today as Argand plane can be regarded as a decisive step in turning complex numbers into legitimate mathematical objects. It seems reasonable to expect that representations would play a similar role in individual learning. (Sfard, 1991, p. 21, enfasi nostra)

Sia Dubinsky sia Sfard riconoscono quindi il ruolo del "nome" (inteso almeno da Sfard in senso molto ampio come simbolo, notazione, rappresentazione, identificazione) per l'incapsulamento e per la condensazione, anche se Dubinsky richiama l'attenzione sul pericolo dell'introduzione precoce del simbolo, prima che sia avvenuto l'incapsulamento, a causa della possibile perdita di significato che potrebbe scaturire da un tale modo di procedere.
Per quanto riguarda la condensazione e la reificazione, invece, il ruolo che in esse riveste il nome o la rappresentazione specifica sembra essere di primaria importanza: senza di esso non è possibile riferirsi all'entità che emerge dalla reificazione. Anzi, sembra che sia proprio la sua comparsa a segnare il vero shift ontologico, almeno dal punto di vista epistemologico. Questo aspetto è sottolineato anche da Durand-Guerrier: "It is indeed a remarkable feature of mathematics that the process of conceptualization goes ahead along with a process of nominalization, such that properties at a given level are likely to become arguments at a more advanced level" (Durand-Guerrier, 2014, p. 362).
In questo senso una *definizione*, che presuppone la presenza di un'entità nominabile, potrebbe essere considerata come il prototipo di un'avvenuta reificazione nelle discipline scientifiche.
Le citazioni riportate in precedenza sembrano sottolineare ancora una volta il fatto che abbiamo già evidenziato nel paragrafo precedente, cioè che la reificazione non coincide con l'incapsulamento, ma che quest'ultimo corrisponde piuttosto alla condensazione, anche se in esso la dimensione ontologica non è esplicita. Questo fa sì che anche il ruolo del nome abbia importanza diversa nell'incapsulamento e nella reificazione e che nel secondo caso esso si possa considerare come costitutivo dell'oggetto.

*Dunque, il ricorso a un nome, a una rappresentazione in senso generale e, a maggior ragione, a una definizione, è utile nella fase di incapsulamento/condensazione, ma è indispensabile per lo shift ontologico della reificazione dei processi e delle procedure in matematica e anche in didattica della matematica.*

Abbiamo dunque così individuato una caratteristica alla quale possiamo fare riferimento nel presente lavoro per quanto concerne la caratterizzazione degli esempi di oggetti matematici specifici della didattica della matematica: la presenza di rappresentazioni (nomi, definizioni, rappresentazioni grafiche etc.) che sanciscono l'avvenuta oggettificazione di una nozione come risultato di una

condensazione o reificazione, presenti in produzioni scientifiche pubblicate che garantiscano la dimensione sociale dell'oggettivazione.
Facendo riferimento all'analogia tra l'evoluzione delle nozioni matematiche in matematica e le nozioni matematiche in didattica della matematica, è però necessario chiarire anche che cosa si intende per dualità operazionale/strutturale in didattica della matematica, dato che è il passaggio dalla fase operazionale a quella strutturale a determinare l'oggettivazione. Il ricorso a un nome, a una definizione etc. è un indizio importante, ma non è sufficiente per caratterizzare in maniera appropriata una metodologia.

### 6. 1. 5. La dualità operazionale/strutturale in didattica della matematica

Mentre la dimensione operazionale delle nozioni matematiche in matematica ha caratteristiche relativamente intuitive e non necessita di particolari esplicitazioni (è sufficiente pensare agli algoritmi, come per esempio l'algoritmo risolutivo di un'equazione ma anche il semplice procedimento di conteggio), nel caso della didattica della matematica come disciplina l'accezione con cui si può ricorrere a tale termine non sembra così immediata.
È vero che in didattica della matematica, non essendoci degli algoritmi di calcolo a cui fare riferimento, è più difficile individuare una dimensione operativa; tuttavia, se invece di "operativo" ricorriamo al termine "strumentale", possiamo individuare anche in didattica della matematica caratteristiche analoghe a quelle operative o algoritmiche in matematica.
Possiamo parlare di aspetto strumentale/operativo degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica per esempio nei casi in cui si ricorre a concetti matematici che hanno la loro origine direttamente in problematiche derivanti dal processo di insegnamento-apprendimento, cioè dalla prasseologia d'aula o dalla prassi di ricerca e a cui si ricorre:

- al fine di facilitare l'interpretazione dell'azione dello studente o dell'insegnante;
- al fine di rendere possibile la rappresentazione di uno specifico contenuto matematico o la comunicazione riguardo a esso nell'interazione in aula;
- al fine di facilitare l'analisi della produzione orale o scritta dello studente o dell'intervento dell'insegnante;
- …

L'elenco precedente non ha una pretesa di esaustività e può essere arricchito con altri aspetti strumentali che possono sorgere durante l'esame di casi specifici.
Esaminiamo ora il senso nel quale possiamo parlare di una caratteristica "strutturale" delle nozioni matematiche specifiche della didattica della matematica.

Il senso nel quale è possibile intendere questo termine in didattica della matematica è molto diverso rispetto a quello con cui esso viene considerato in matematica e dunque anche in Sfard (1991). Infatti, per Sfard la versione strutturale delle nozioni matematiche sembra essere legata primariamente alle definizioni insiemistiche in stile bourbakista; un tale riferimento non è invece possibile in didattica della matematica.
A nostro avviso il ruolo assunto dalla struttura formale nell'approccio di Sfard può essere sostituito nel caso della didattica della matematica da una struttura di carattere concettuale che potremmo chiamare un *complesso concettuale*. Un complesso concettuale può essere pensato come una struttura concettuale, nella quale due o più concetti sono collegati tra loro da un qualche genere di relazione semantica, per esempio di complementarietà o di inclusione o di parziale sovrapposizione.
Questo potrebbe essere per esempio il caso in cui la divisione, invece di essere considerata nella sua versione strutturale matematica (cioè come un insieme di triple), viene considerata da un punto di vista semantico-operazionale-analogico come "divisione per ripartizione" o "divisione per raggruppamento", forme tipiche di tale operazione alla scuola primaria, non solo italiana; in questo caso si ha una relazione di complementarietà tra le due accezioni del termine "divisione", intesa come oggetto matematico specifico della didattica della matematica. La sua specificità è evidenziata dal fatto che esso possiede caratteristiche (per esempio il riferimento ad aspetti spaziali e temporali legati alla disposizione fisica di oggetti concreti), che non trovano una corrispondenza nell'oggetto matematico con il quale questo complesso concettuale condivide (almeno in parte) il nome.
Un altro esempio potrebbe essere quello della dimostrazione. Come vedremo di seguito, essa è considerata da molti ricercatori in didattica della matematica come strettamente collegata all'argomentazione; tale relazione può essere una relazione di inclusione semantica, nel quale la dimostrazione è un caso particolare dell'argomentazione (Durrand-Guerrier, Boero, Douek, Epp, & Tanguay, 2012a), oppure una relazione di tipo complementare (Duval, 1991; 1992/1996[30]). Anche in questo caso sono presenti delle componenti che sono specifiche della dimostrazione in didattica della matematica, in quanto il suo studio in questo ambito disciplinare ha richiesto la considerazione della sua relazione con l'argomentazione, una produzione discorsiva che non è oggetto di studio né della matematica né dell'epistemologia o della filosofia della matematica.
In conclusione possiamo affermare che, in analogia con quanto mostrato per l'evoluzione epistemologica degli oggetti matematici da parte di Sfard (1991), in didattica della matematica è possibile parlare di condensazione o reificazione di oggetti matematici specifici della didattica della matematica se è possibile individuare dei complessi concettuali matematici specifici della disciplina che non hanno una corrispondenza completa negli oggetti matematici corrispondenti e se

[30] In seguito, i numeri di pagina forniti riguardo a questo articolo si riferiranno alla versione italiana di Duval (1992), pubblicata nel 1996.

tali complessi concettuali hanno nomi, definizioni o rappresentazioni proprie che sono oggetto di pubblicazioni condivise (in riviste o raccolte tematiche specializzate) dalla comunità scientifica. In questo senso la condivisione della comunità scientifica è dunque una condizione per lo shift ontologico anche in didattica della matematica. Come sottolinea Ernest: "Interpersonal social processes are required to turn an individual's subjective mathematical knowledge, after publication, into accepted objective mathematical knowledge" (Ernest, 1991/2004, p. 42).
Dato il ruolo che rivestono la nominalizzazione o la rappresentazione per lo shift ontologico, la presenza di nomi, definizioni e rappresentazioni tabellari o grafiche specifiche, che consentono di cogliere il concetto in questione come un'entità a sé stante, saranno considerate un indizio per un'avvenuta reificazione o quanto meno per una condensazione. Sottolineiamo che non siamo però interessati all'individuazione della *prima volta* in cui un complesso concettuale è stato reificato, in quanto riteniamo che questo sia più un compito per lo storico della didattica della matematica, ma che siamo interessati all'individuazione di una sua presenza nelle produzioni scientifiche. Ribadiamo infatti che il nostro obiettivo in questo capitolo è fornire *esempi* di tali oggetti. Trattandosi di esempi, essi non hanno alcuna pretesa di generalità.
Nei prossimi paragrafi proporremo dunque alcuni esempi di oggetti matematici che a nostro avviso possono essere considerati come dei complessi concettuali che costituiscono degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica, sulla base delle caratteristiche precedentemente individuate.

## 6. 2. Esempi di oggetti matematici specifici della didattica della matematica

### 6. 2. 1. Divisione per ripartizione e per raggruppamento

In Fischbein, Deri, Nello e Merino (1985) gli autori indagano il ruolo dei modelli taciti attivati dagli studenti della scuola primaria nel momento in cui sono impegnati nella risoluzione di problemi che coinvolgono una sola operazione aritmetica, nel caso specifico un'operazione di moltiplicazione o divisione. Notiamo che gli autori parlano di "modelli taciti", cioè intuitivi o impliciti, in quanto il soggetto di solito non è cosciente della loro esistenza, anche se essi influenzano fortemente il suo modo di agire.
I modelli intuitivi sono strettamente collegati alle immagini mentali. D'Amore (1999) definisce l'immagine mentale come "il risultato figurale o proposizionale o misto prodotto da una sollecitazione (interna o esterna)" (D'Amore, 1999, p. 151); in questo senso le immagini mentali sono provvisorie e non stabili. Un modello mentale di un concetto è invece, secondo questo Autore, l'insieme delle immagini mentali provvisorie relative a un dato concetto (versione statica del

modello mentale) oppure una sorta di successione di immagini mentali che evolve verso un limite rappresentato dal modello mentale (versione dinamica del modello mentale).
Fischbein, Deri, Nello e Merino (1985) fanno notare che l'idea base dei modelli in termini di schemi d'azione è già presente in Piaget, ma che loro avanzano l'ipotesi che tali modelli non sono presenti solo durante la prima fase di approccio alle operazioni, cioè quando la loro interiorizzazione richiede che siano associate a un'azione, ma che essi permangono anche successivamente, presentandosi sempre in situazioni analoghe. Possiamo dunque affermare che esse diventano delle immagini mentali stabilizzate, nel senso evidenziato da D'Amore.
Per quanto riguarda la divisione, Fischbein e coautori scrivono quanto segue:

> Division
>
> Out of the several interpretations that might be given to division, we hypothesized that two serve from childhood on to influence the evocation and the use of the operation when a problem situation seems to call for division (…). The structure of the problem determines which model is activated.
>
> *Partitive division*. The first model, which might also be termed sharing division, an object or collection of objects is divided into a number of equal fragments or subcollections. The dividend must be larger than the divisor; the divisor (operator) must be a whole number; the quotient must be smaller than the dividend (operand).
>
> *Quotative division*. In the second model, which might also be termed measurement division, one seeks to determine how many times a given quantity is contained in a larger quantity. In this case, the only constraint is that the dividend must be larger than the divisor. If the quotient is a whole number, the model can be seen as repeated substruction. (Fischbein, Deri, Nello, & Merino, 1985, p. 7)

Dalla citazione riportata, possiamo notare che gli autori forniscono una definizione di due tipologie di modello intuitivo di divisione, della quale si servono per descrivere e interpretare le azioni dei giovani allievi coinvolti nell'attività di risoluzione di problemi. Si tratta dunque di un chiaro ricorso alla terminologia *partitive division* (divisione per ripartizione) (Figura 2) e *quotative division* (divisione per raggruppamento) (Figura 3) in senso operativo, come evidenziato da noi in precedenza. Si tratta di due modi alternativi ma complementari tramite i quali la divisione viene introdotta alla scuola primaria in molte parti del mondo e il modo in cui essi vengono presentati in aula e nei libri di testo e nei manuali per docenti è simile a quello mostrato nelle immagini (Figura 2 e Figura 3).


Figura 2. Esempio di rappresentazione di una divisione per ripartizione in un libro di testo (Pungioni & Branda, 2018).


Figura 3. Esempio di rappresentazione di divisione per raggruppamento in un libro di testo (Pungioni & Branda, 2018).

Le caratteristiche evidenziate dell'una e dell'altra tipologia di modello intuitivo di divisione, per esempio il ricorso alla descrizione di una rappresentazione figurale che coinvolge una *disposizione spaziale* degli *oggetti*, il fatto che in entrambi i casi il *dividendo deve essere maggiore del divisore*, non hanno chiaramente una controparte nell'oggetto "divisione" in matematica, dato che la definizione di divisione dal punto di vista matematico astrae dalle caratteristiche di spazialità ed è definita su un insieme, rispetto al quale essa è un'operazione binaria chiusa, definita come operazione inversa della moltiplicazione, a sua volta definita come operazione binaria chiusa rispetto a tale insieme. In questo senso la divisione è definita dal punto di vista matematico solo su insiemi numerici in cui ogni elemento ha un inverso moltiplicativo, quindi non in $\mathbb{N}$, ma solo a partire da $\mathbb{Q}_0^+$, per il quale non è possibile fornire una caratterizzazione della divisione in termini di ripartizione o raggruppamento, dato che né il divisore né il dividendo

corrispondono necessariamente a numeri interi positivi che possono essere associati a numeri naturali.[31]
Questo tipo di divisione "didattica" è però diffusa non solo nella prassi didattica e sui libri di testo, data la necessità di adattare gli oggetti matematici all'età degli studenti, ma ricorre anche nelle produzioni scientifiche dei ricercatori in didattica della matematica e non solo in una forma strumentale, cioè come strumento utile alla descrizione dei fenomeni d'aula.
In Downton (2008) leggiamo infatti quanto segue:

> Fischbein, Deri, Nello, and Merino (1985) proposed two aspects of division: partitive and quotitive.[32] In partition division (commonly referred to as the sharing aspect) the number of subsets is known and the size of the subset is unknown, whereas in quotation division (otherwise known as measurement division), the size of the subset is known and the number of subsets is unknown. Partition division has traditionally been taught before quotation (or measurement) division because the sharing aspect was considered to relate much more to a child's everyday life (Bryant, 1997; Haylock & Cockburn, 1997). (Downton, 2008, p. 171)

Possiamo notare che l'Autore della citazione non parla più di modelli usati per interpretare le azioni degli studenti, ma parla di due *aspetti* della divisione: "ripartitivo" e "raggruppativo". Inoltre possiamo notare che i termini *partitive* e *quotitive* a cui si fa ricorso nella prima frase della citazione vengono sostantivati nel seguito della citazione, facendo sì che essi non accompagnino più il termine "divisione" caratterizzandolo come aggettivi, ma creano due tipologie distinte di divisione: *partition division* e *quotation division*, cioè divisione-ripartizione e divisione-raggruppamento.
Possiamo dunque notare che in una disciplina come la didattica della matematica, il cui linguaggio è prevalentemente discorsivo, la sostantivazione acquisisce un ruolo importante nell'oggettificazione delle nozioni matematiche. Il suo ruolo è dunque da tenere in considerazione come indice di avvenuta condensazione o reificazione, accanto al ruolo delle rappresentazioni.
Infatti, il ricorso a un sostantivo, oltre che a un nome, per denotare qualcosa che prima era considerato in senso strumentale è, a nostro avviso, indice della sua avvenuta oggettificazione. Nel presente caso sono presenti sia il ricorso a nomi specifici (*partitive division* e *quotitive division*) sia una sostantivazione dei termini specifici (*partition division* e *quotation division*). Possiamo dunque concludere che, mentre nella citazione di Fischbein e coautori è possibile parlare di fase strumentale, dove la nozione è ancora un modello mentale usato per descrivere e analizzare il comportamento dei soggetti apprendenti, nel senso evidenziato da D'Amore (1999), nel caso dell'articolo di Downton (2008) ci sembra che si possa

---

[31] Anche se in $\mathbb{N}$ è definita la divisione con resto, essa non va considerata come un'*operazione* di divisione definita in $\mathbb{N}$, dato che il suo risultato non è *un* numero naturale, ma una *coppia* di numeri naturali: il quoziente e il resto.
[32] Notiamo che in alcuni degli articoli esaminati si usa il termine *quotative*, in altri invece il termine *quotitive* per caratterizzare la divisione per raggruppamento.

parlare di un'oggettivazione che soddisfa i requisiti della reificazione da noi evidenziati in precedenza.
Roche e Clarke (2009, 2013) inquadrano i concetti di divisione per ripartizione/per raggruppamento in termini di *PCK* (pedagogical content knowledge) (Schulman, 1987),[33] confermando che la divisione in questo senso costituisce un oggetto di studio a sé stante in didattica della matematica, indipendentemente dall'oggetto matematico "divisione" e oltre al suo uso prasseologico in aula o strumentale nella ricerca in didattica della matematica. Questo è dunque un ulteriore indizio di una avvenuta reificazione di un oggetto matematico "divisione" specifico della didattica della matematica.
In Ma e Kessel (2018) troviamo la seguente definizione di divisione nell'aritmetica della scuola primaria:

> *Definition 13 To find an unknown multiplicand is called partitive division*. For example, 12 apples are equally shared among 3 children. How many does each child get? (Partition 12 into three pieces. How many in each piece?) *To find an unknown multiplier is quotitive division*. For example, there are 12 apples. Give each child 4 apples. How many children can get apples? (How many 4s are there in 12? 12 is how many times as many as 4?) *To find an unknown factor is neither quotitive nor partitive division*. For example, the area and length of a rectangle are known. Find the width. We may say, 'For example, the product of two factors is 15. One factor is 5, what is the other factor?' (Ma & Kessel, 2018, p. 455)

Notiamo che in questa definizione viene evidenziata la relazione fra le due tipologie di divisione, per ripartizione e per raggruppamento, con la divisione in senso più strettamente matematico: si definiscono le due tipologie di divisione a partire dalla moltiplicazione, evidenziando che esse si ottengono se si distingue tra moltiplicatore e moltiplicando, mentre se si parla in generale di due fattori allora si ha la divisione che potremmo chiamare più prettamente "matematica". L'esempio fornito per quest'ultimo tipo di divisione (l'area e la lunghezza di un rettangolo sono note; si trovi la larghezza) lascia intuire che la divisione che "non è né per ripartizione né per raggruppamento" si presenta nel momento in cui immaginare che uno dei fattori venga ripetuto un certo numero di volte non è di supporto alla costruzione di un modello mentale dell'operazione.
Anche nella rappresentazione grafica che accompagna la definizione di moltiplicazione e, a partire da essa, di divisione, viene presentata la relazione tra le due tipologie di divisione da un lato e la definizione di prodotto dall'altro (Figura 4).

[33] Riguardo al concetto di PCK si veda il paragrafo 5. 1. 2. del capitolo 5.

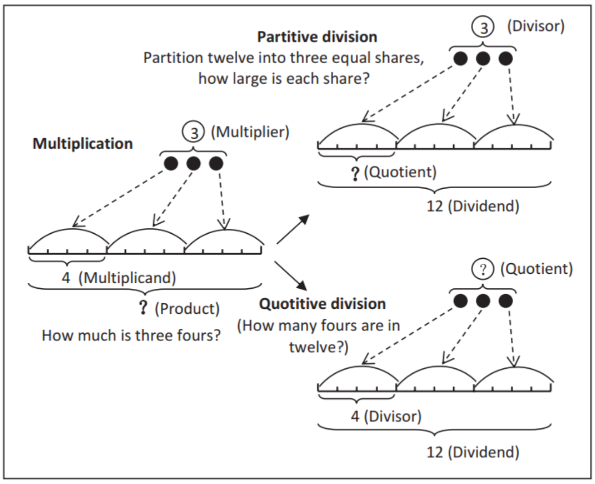



Figura 4. Rappresentazione dell'operazione di divisione, distinta in divisione per ripartizione e divisione per raggruppamento, in cui viene messa in evidenza la relazione di entrambe con la moltiplicazione (tratto da Ma e Kessel, 2018, p. 457).

Nella definizione di divisione che abbiamo esaminato ora, abbiamo visto che gli autori mettono in evidenza la relazione della divisione "didattica" con la moltiplicazione, cioè la caratterizzano in termini di operazione inversa della moltiplicazione, ma che nel fare ciò sono costretti a caratterizzare anche la moltiplicazione come oggetto matematico specifico della didattica della matematica, parlando di moltiplicatore e moltiplicando, distinzione che non ha una controparte nell'oggetto matematico moltiplicazione definito in $\mathbb{N}$, dove la moltiplicazione è commutativa.[34]
Notiamo dunque come l'ultima definizione citata non è solo una vera e propria definizione di un oggetto matematico "divisione" che è specifico della didattica della matematica, ma che in esso è presente anche un tentativo di chiarire il suo legame con l'oggetto matematico divisione, nel quale la divisione è definita a partire dalla moltiplicazione.
L'oggetto matematico divisione specifico della didattica della matematica da noi caratterizzato si presenta sotto forma di un complesso concettuale nel quale tra i

[34] Un esempio di moltiplicazione non commutativa che lo studente potrebbe incontrare durante il proprio percorso scolastico preuniversitario è quello della moltiplicazione tra matrici quadrate, ma questo non avviene di certo alla scuola primaria. In ogni caso, in questo contesto ci stiamo riferendo alla moltiplicazione tra numeri e negli insiemi numerici che lo studente di scuola primaria, secondaria di I e II grado incontra durante il proprio percorso scolastico ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) la moltiplicazione è sempre commutativa.

due aspetti della divisione (per partizione e per raggruppamento) sussiste una relazione semantica di complementarietà (Figura 5).

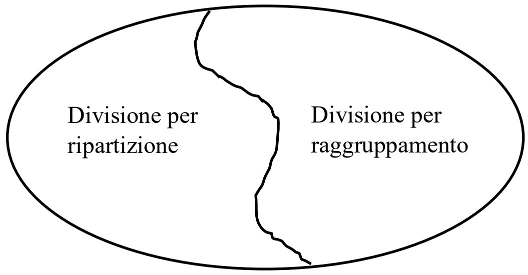



Figura 5. Rappresentazione del complesso semantico che caratterizza l'oggetto matematico "divisione" specifico della didattica della matematica.

### 6. 2. 2. La teoria didattica dell'aritmetica

La rappresentazione della divisione nella sua versione didattica nella scuola primaria con la quale abbiamo chiuso il paragrafo precedente ha una caratteristica particolare alla quale non abbiamo ancora accennato: essa appartiene a quella che gli autori dell'articolo dal quale tale rappresentazione è tratta chiamano "la teoria didattica dell'aritmetica" dei numeri naturali (Ma & Kessel, 2018, p. 439).[35] Di seguito caratterizzeremo brevemente tale teoria in modo tale da chiarire la sua importanza per l'argomento trattato in questo capitolo.
I due autori dell'articolo a cui stiamo facendo riferimento (Ma & Kessel, 2018), entrambi ricercatori in didattica della matematica, uno di nazionalità cinese, l'altro di nazionalità statunitense, mettono in evidenza due modalità di considerare l'aritmetica dei numeri naturali[36] nella scuola primaria: la prima di carattere computazionale (o operazionale), la seconda di carattere relazionale (o strutturale). Sebbene queste due modalità siano presentate come attualmente tipiche per l'una o per l'altra cultura (la versione computazionale per quella statunitense attuale, la versione strutturale per quella cinese attuale e per quella statunitense della seconda metà del XIX secolo), è anche vero che le due culture sono in realtà scelte come poli contrapposti che rappresentano due visioni complementari dell'aritmetica dal punto di vista didattico e i due approcci non sono riferibili esclusivamente a questi due paesi, come evidenziato anche nell'articolo citato.

[35] Nel testo si parla di "whole numbers", quindi letteralmente "numeri interi", ma in realtà si intendono i numeri naturali escluso lo zero.
[36] Nel testo viene usato sempre il termine "whole number"; per evitare equivoci noi tradurremo sempre "whole number" con "numero naturale", sottolineando però che per gli autori zero non appartiene ai numeri naturali riferiti all'aritmetica scolastica.

Gli autori descrivono come segue le due prospettive che individuano come contrapposte nell'approccio all'aritmetica dei numeri naturali alla scuola primaria:

> There are at least two different perspectives on whole number arithmetic in primary school. In the USA, the tendency is to consider it as only learning to compute the four basic operations with whole numbers (e.g. asking students 1 + 1 = ?). In China, however, whole number arithmetic involves much more. For example, it is expected that students explore the quantitative relationships among the operations (e.g. given that 1 + 1 = 2, then 2 – 1 = ?) and represent these (sometimes quite sophisticated) relationships with (sometimes quite complicated) numerical equations. (Ma & Kessel, 2018, p. 439)

Il passaggio da una modalità computazionale a una relazionale nell'aritmetica scolastica è testimoniato, secondo gli autori, in alcuni tra i più diffusi libri di testo negli Stati Uniti durante la seconda metà del XIX e l'inizio del XX secolo. In essi è possibile rilevare che nel corso di tale periodo si è verificata un'evoluzione nel modo di considerare l'aritmetica dal punto di vista didattico: alle iniziali nozioni elementari relative alla notazione dei numeri naturali e alle frazioni nonché alle operazioni con essi, presenti nei manuali d'istruzione ad uso soprattutto dei commercianti, si aggiunge una interessante modifica della notazione delle espressioni aritmetiche: da una notazione "in colonna" si passa a una notazione "in riga".[37]
D'altro canto, è ben noto che nella cultura cinese sono molto usati i cosiddetti "problemi con variazione" (Sun, 2011), cioè problemi che a partire dalla stessa situazione problematica consentono di individuare e categorizzare problemi tipici. In riferimento al rimodellamento del concetto di *problemi con variazione* sulla base delle caratteristiche del contesto italiano si veda per esempio Bartolini Bussi, Sun e Ramploud (2013), dove gli autori sottolineano il fatto che tali problemi mirano a sviluppare "the ability to identify the category of word problems (…) discern the invariant elements from the variant elements between problems and recognize the "class" every problem belongs to" (Bartolini Bussi, Sun, & Ramploud, 2013, p. 550). Ci sembra indubbio che il contesto dei problemi con variazione favorisca un approccio relazione piuttosto che computazionale in aritmetica.
Tornando al testo di Ma e Kessel (2018), gli autori notano che nel periodo citato in precedenza in riferimento al contesto statunitense, cioè tra la seconda metà del XIX e l'inizio del XX secolo, compare quello che loro chiamano "un sistema di definizioni e assiomi modellati sulla base degli *Elementi* di Euclide", ma riferito all'aritmetica: "mathematical scholars began to forge an academic subject more closely connected to the rest of mathematics" (Ma & Kessel, 2018, p. 440).

[37] Riteniamo importante evidenziare che la nostra non è un'indagine storica su questo argomento e che quindi non intendiamo affermare che tale modalità di notazione sia comparsa per la prima volta in quel contesto. Ciò che stiamo esaminando è la modalità (o una modalità) con cui ci si riferisce a tali notazioni in una produzione scientifica in didattica della matematica.

Gli autori riassumono come segue i due aspetti più innovativi della teoria nel periodo in cui fu elaborata:

> They [gli ideatori della teoria] introduced two important new features:
>
> Horizontal expressions. These allowed significantly more sophisticated quantitative relationships to be expressed than did the vertical columns used for the calculations of commercial arithmetic.
>
> A system of definitions and axioms modelled on that of Euclid's *Elements*. These included the definition of a number as a collection of units. Most included 'rules of likeness' such as the rule that 'only like numbers can be added'. Some included compensation principles or the commutative, associative and distributive properties, but not necessarily both. (Ma & Kessel, 2018, p. 440)

Riguardo al primo aspetto, possiamo affermare che la modalità di notazione orizzontale delle espressioni aritmetiche può essere vista come indicatore della reificazione del loro aspetto relazionale. Infatti, essa consente di cogliere "a simultaneous view of all elements (…) to hold them together, to make a whole of them (…); to achieve synthesis (…); and give the concept its physiognomy" (Hadamard, 1949, p. 77, citato in Sfard, 1991, p. 7). Nella scrittura verticale delle espressioni aritmetiche, di solito il simbolo di uguaglianza è affiancato, o addirittura sostituito, da una riga orizzontale che non ha un significato matematico; essa ha più che altro il ruolo di "invito" a eseguire l'operazione e non quello di mettere in evidenza le relazioni tra i termini dell'espressione.[38]

Una scrittura orizzontale appare come una rappresentazione in cui l'interpretazione relazionale del simbolo di uguaglianza è più evidente; notiamo infatti che la notazione orizzontale è anche quella tipica delle equazioni, dove il significato relazionale dell'uguaglianza è fondamentale. Possiamo dunque affermare che i due diversi approcci all'aritmetica evidenziati all'inizio del paragrafo producono due diverse modalità di rappresentazione delle operazioni aritmetiche: una strumentale, l'altra relazionale.

Per quanto riguarda il secondo aspetto innovativo riscontrato nei libri di testo esaminati, notiamo invece che Ma e Kessel parlano di una vera e propria *teoria* dell'aritmetica scolastica, elaborata dai matematici, anche se con il supporto di insegnanti di scuola primaria. Si tratta dunque di una teoria che è un oggetto di studio accademico e non il frutto della descrizione di una prasseologia. Almeno per quanto riguarda le radici di questa teoria non possiamo parlare di una *teoria didattica* vera e propria in quanto la didattica della matematica non esisteva ancora come disciplina nel XIX secolo. Tuttavia non si deve pensare a tale teoria come a un corpo unico presente nei libri di testo esaminati dagli autori. Infatti, essa può essere vista come un corpo di conoscenze in evoluzione che Ma e Kessel hanno organizzato estraendo definizioni e regole dai libri di testo statunitensi della

---

[38] Notiamo che la riga orizzontale in Italia serviva anche a separare i termini dell'operazione dai calcoli intermedi e poi dal risultato.

seconda metà del XIX secolo e dai libri di testo cinesi moderni, evidenziando come le radici poste negli Stati Uniti, dove questo modo di vedere l'aritmetica cadde in disuso verso la fine del XIX secolo, sia poi stata ulteriormente sviluppata in Cina.[39]
Ciò che hanno fatto Ma e Kessel è stato riconoscere l'organizzazione delle conoscenze coinvolte in una forma simile a quella con cui sono organizzati gli *Elementi* di Euclide. In questo senso, essendo la lente tramite la quale tale teoria è stata "estratta" dai libri di testo e organizzata come tale, una lente propria della didattica della matematica, possiamo considerarla in realtà come una teoria *didattica* dell'aritmetica, anche se le sue radici non affondano nella didattica della matematica come disciplina.
L'obiettivo dell'impresa compiuta nel tempo da parte di coloro che hanno lavorato a questa impresa nel corso dei decenni è quello di riuscire a collegare l'aritmetica "scolastica", cioè una versione didattica dell'aritmetica, con l'aritmetica accademica, intesa come teoria facente parte della matematica come disciplina. La costruzione di una teoria specifica dell'aritmetica scolastica ha inoltre un importante vantaggio: fornire un riferimento teorico coerente alle nozioni matematiche dell'aritmetica scolastica che spesso non hanno una controparte nelle nozioni matematiche con le quali condividono il nome e appaiono dunque infondate dal punto di vista teorico. Un esempio in questo senso è quello dell'oggetto "divisione", da noi discusso nel paragrafo precedente.
Ma e Kessel descrivono come segue il sistema di definizioni e assiomi in questione:

> Like the *Elements*, the theory has definitions, postulates and theorems. It presents a small number of fundamental definitions and shows how other definitions can be derived from those in order to avoid circularity. Its analogue to the postulates of the *Elements* is 'basic rules and basic laws'. Its analogue for theorems is rationales for computational algorithms. The theory differs from the *Elements* in not giving explicit analogues to Euclid's 'common notions' (…) the common notions were implicitly assumed and used. (Ma & Kessel, 2018, p. 441)

La prima definizione fornita è quella di unità, in termini di "cosa singola", sulla base della quale si definiscono i numeri come collezioni di unità. Successivamente si forniscono le definizioni di numero astratto e di numero concreto. Quest'ultima distinzione è fondamentale per collegare l'aritmetica scolastica all'aritmetica accademica. Per *numero concreto* si intende un numero le cui unità concrete di riferimento oggettuale sono "nominate" [*are named* (Ma & Kessel, 2018, p. 443)] (per esempio *6 amici*), mentre per *numero astratto* si intende un numero per il quale ciò non accade (per esempio *6*).
Successivamente viene definito il concetto di numeri simili (*like numbers*), a partire dal concetto di numero concreto: due numeri concreti sono simili se le loro

[39] In realtà in questa direzione si è lavorato anche nell'Unione Sovietica, come mostrano immagini tratte da libri di testo sovietici, riportate da Ma e Kessel (2018) ed è possibile che stimoli in questo senso siano arrivati in Cina attraverso tali libri di testo piuttosto che direttamente dai libri di testo statunitensi della fine XIX secolo.

unità portano lo stesso nome (per esempio *3 gatti* e *2 gatti* sono due numeri concreti simili).
Di seguito viene introdotto il sistema posizionale decimale, definendo i concetti di cifra e numerale, di posizione e di valore posizionale, dove allo zero viene attribuito uno status particolare come "cifra non significativa". Successivamente vengono introdotte le operazioni.
L'addizione viene definita a partire dalla definizione di somma tra due numeri, entrambi diversi da zero, dato che zero non è considerato un numero nella teoria didattica dell'aritmetica: la somma è un terzo numero che ha tante unità come i primi due numeri presi insieme e l'addizione è l'operazione tramite la quale si trova la somma. Notiamo dunque che l'operazione di addizione ha poco in comune con l'oggetto matematico "addizione" inteso in senso strutturale come tripla ordinata di numeri, anche se la sua caratteristica di operazione binaria è evidenziata tramite la definizione di somma.
Successivamente vengono definiti i termini dell'addizione, cioè gli addendi, come due numeri che vengono addizionati; il concetto di numeri simili viene poi usato per sottolineare che solo numeri simili possono essere addizionati.
Dopo l'addizione viene introdotta la sottrazione come l'operazione che serve per trovare un addendo quando sono noti la somma e l'altro addendo; il minuendo è di conseguenza "la somma nota", il sottraendo è "l'addendo noto" e la differenza è "l'addendo non noto" nonché il risultato dell'operazione di sottrazione.
La "somma di due numeri" è la relazione quantitativa di base per le operazioni di addizione e sottrazione; a partire da essa vengono introdotti i vari casi che si possono presentare: due addendi sono noti, si cerca la loro somma; la somma e il secondo addendo sono noti, si cerca il primo addendo; la somma e il primo addendo sono noti, si cerca il secondo addendo. Il concetto di "relazione quantitativa" è legato al fatto che l'addizione è definita a partire dalla somma, la quale a sua volta è un numero che si ottiene aggregando le unità dei due addendi.[40]
Per definire la moltiplicazione si introduce prima il concetto di prodotto come seconda relazione quantitativa fondamentale dell'aritmetica didattica. Il prodotto di due numeri è un terzo numero che contiene tante unità quanto espresso da uno dei due numeri, prese tante volte quanto espresso dall'altro numero. La moltiplicazione è l'operazione che serve per trovare il prodotto, quando sono dati i due numeri che vengono moltiplicati; successivamente si definiscono i concetti di moltiplicatore e moltiplicando che hanno un ruolo quando si lavora con i numeri concreti; in questi casi il moltiplicatore è un numero astratto, mentre il moltiplicando e il prodotto sono numeri concreti; se si lavora solo con numeri astratti, non si distingue tra moltiplicatore e moltiplicando e si parla di fattori.
La divisione è definita come l'operazione che serve per trovare il moltiplicando quando sono noti il prodotto e il moltiplicatore (in questo caso si ha la divisione per ripartizione) o per trovare il moltiplicatore quando sono noti il prodotto e il

[40] Notiamo la forte analogia con il concetto pitagorico di numero, dove "l'unità" è la monade pitagorica.

moltiplicatore (in questo caso si ha la divisione per raggruppamento). Di seguito si definiscono i concetti di dividendo, divisore, quoziente e resto. Viene richiamata l'attenzione sul fatto che nella divisione per ripartizione il dividendo e il quoziente sono numeri simili e che nella divisione per raggruppamento il dividendo e il divisore sono numeri simili; il concetto di numero simile aiuta secondo gli autori a riconoscere delle relazioni quantitative.
Seguono considerazioni analoghe a quelle fatte per l'addizione e la sottrazione in riferimento ai casi che si possono presentare sulla base dei termini dati e di quello cercato e in riferimento al ruolo dei numeri simili.
Infine vengono introdotte le leggi che corrispondono ai postulati della teoria, nell'analogia stabilità da Ma e Kessel (2018) con gli *Elementi* di Euclide:

- l'addizione e la moltiplicazione sono commutative, ma valgono anche leggi "simili" per la sottrazione e per la divisione; esse vengono esemplificate come segue:
  - dato che $5 + 3 = 8$ si ha anche che $8 - 3 = 5$ e $8 - 5 = 3$; cioè è lecito, dal punto di vista operativo, scambiare tra loro sottraendo e differenza, dato che il loro ruolo è riconducibile al ruolo di addendi in un'addizione;
  - dato che $2 \cdot 5 = 10$ si ha anche che $10 : 2 = 5$ e $10 : 5 = 2$; cioè è lecito scambiare, dal punto di vista operativo, tra loro divisore e quoziente, dato che il loro ruolo è riconducibile a quello di fattori in una moltiplicazione;
- l'addizione e la moltiplicazione sono associative, ma valgono leggi "simili" anche per la sottrazione e per la divisione; esse vengono esemplificate come segue:
  - $15 - (3 + 4) = 15 - 3 - 4$; cioè sottrare la somma di due numeri da un terzo numero equivale a sottrarne prima uno e poi l'altro;
  - $50 : (5 \cdot 2) = (50 : 5) : 2$; cioè dividere un numero per un prodotto di due numeri equivale al dividerlo prima per uno e poi per l'altro numero;
- la moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione; non esiste una proprietà simile per la divisione;
- valgono delle proprietà che vengono chiamate "compensative" per l'addizione e per la moltiplicazione, così come leggi simili per la sottrazione e per la divisione:
  - *legge compensativa dell'addizione*: se a uno dei due addendi si addiziona un dato numero mentre dall'altro addendo si sottrae lo stesso numero, la somma non cambia;
    - *legge corrispondente per la sottrazione*: se dal minuendo e dal sottraendo si addiziona o si sottrae lo stesso numero, la differenza non cambia;
  - *legge compensativa della moltiplicazione*: se uno dei due fattori viene moltiplicato per lo stesso numero per il quale viene diviso l'altro, il prodotto con cambia;
    - *legge corrispondente per la divisione*: se il dividendo e il divisore vengono divisi o moltiplicati per lo stesso numero, il quoziente non cambia.

La teoria didattica dell'aritmetica che Ma e Kessel affermano di aver "distillato" dall'analisi di alcuni libri di testo statunitensi del XIX secolo e di libri di testo cinesi attuali può essere estesa all'aritmetica dei numeri razionali positivi, attraverso l'introduzione delle frazioni (Ma & Kessel, 2018).
Gli autori notano che la teoria è "meno precisa" (*less precise*) degli approcci moderni all'aritmetica, così come risultano esserlo gli *Elementi* rispetto all'assiomatizzazione della geometria proposta da Hilbert (1899/1903).
A nostro avviso è soprattutto il ruolo dello zero solo come cifra non significativa del sistema posizionale decimale ma non come numero a sé stante a essere un aspetto teoricamente discutibile della teoria, pur considerando che si tratta dell'aritmetica alla scuola primaria.
Gli autori notano inoltre che la teoria risulta ridondante dal punto di vista puramente matematico: "(…) the theory is not intended to be entirely parsimonious. It is parsimonious in giving a small number of fundamental definitions; however, some of the basic laws are redundant. In particular, the laws of compensation can be derived from other basic laws" (Ma & Kessel, 2018, p. 441).
Ci fermiamo qui con l'esposizione di questa teoria didattica dell'aritmetica, rimandando per approfondimenti a Ma e Kessel (2018) e alla bibliografia presente in tale lavoro. Facciamo solo notare, in conclusione a questa esposizione, che molti degli elementi della teoria sono effettivamente presenti nella pratica didattica e nei libri di testo e anche nelle ricerche in didattica della matematica in tutto il mondo (si pensi al caso emblematico della divisione), ma che non è usuale una considerazione di tali elementi in una teoria unitaria.
Per la nostra trattazione è stato importante esporre le caratteristiche di questa teoria per evidenziare che essa stessa possa essere intesa come un oggetto, o meglio come un metaoggetto matematico specifico della didattica della matematica. Al suo interno si possono individuare vari oggetti matematici specifici della didattica della matematica, come per esempio la divisione, in riferimento alla quale abbiamo mostrato nel paragrafo precedente che il complesso concettuale *divisione per ripartizione/divisione per raggruppamento* costituisce la base per un corrispondente oggetto matematico specifico della didattica della matematica (Figura 6).

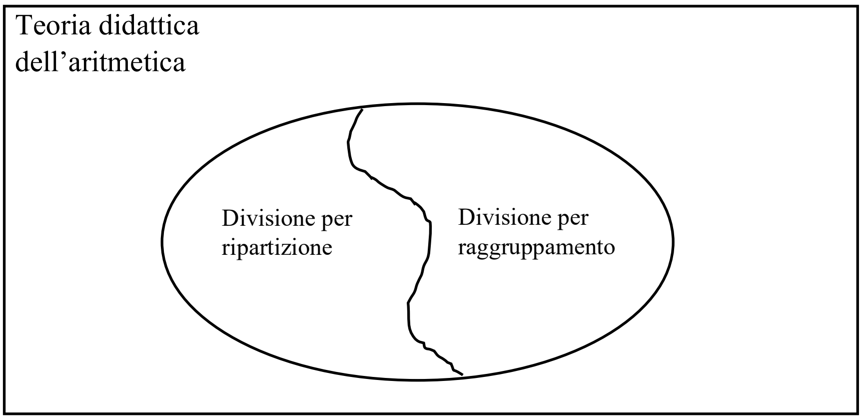



Figura 6. Rappresentazione del complesso semantico che caratterizza l'oggetto matematico "divisione" specifico della didattica della matematica all'interno della teoria didattica dell'aritmetica.

Altri esempi in questo senso sono le altre tre operazioni razionali, riguardo alle cui definizioni è possibile fare considerazioni simili a quelle fatte riguardo alla divisione. In questi casi i nomi delle operazioni sono quasi sempre quelli delle operazioni matematiche usuali, senza aggiunte o modifiche, se non nel caso dei nomi dei termini della moltiplicazione, quando si distingue tra moltiplicatore e moltiplicando, invece di parlare solo di fattori. Un altro esempio ancora, sul quale vogliamo soffermarci più in dettaglio è quello dello zero, anche se la sua natura di oggetto matematico specifico della didattica della matematica non può essere inquadrata nella teoria in questione, ma richiede un'estensione delle considerazioni, come mostreremo di seguito.

### 6. 2. 3. Lo zero come oggetto didattico

Nell'ambito della teoria didattica dell'aritmetica esposta nel paragrafo precedente, riguardo allo zero gli autori scrivono quanto segue: "The symbol 0 has two features: as a digit in the notation system and as a number. As a digit, it plays an important role in the notation system. But, as a number, 0 is not part of the arena of school arithmetic" (Ma & Kessel, 2018, p. 443).
Dunque, nella teoria didattica dell'aritmetica lo zero non è considerato un numero alla pari degli altri. Esso ha un ruolo importante come *cifra* nella notazione posizionale del sistema numerico, ma *non è un numero*, il che significa che non può figurare come termine di un'operazione.

La considerazione dello zero come numero nell'aritmetica della scuola primaria è una questione controversa, evidenziano gli autori, e citano a tale proposito Whitehead:

> The point about zero is that we do not need to use it in the operations of daily life. No one goes out to buy zero fish. It is in a way the most civilized of all the cardinals, and its use is only forced on us by the needs of cultivated modes of thought. (Whitehead, 1948, p. 43, citato in Ma e Kessel, 2018, p. 443)

Le questioni epistemologiche legate all'accettazione dello zero nel corso della storia della matematica sono ben note (D'Amore, 2007, Israel, 2009; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2019) e anche varie ricerche in didattica della matematica (si vedano per esempio Anthony & Walshaw, 2004 e Russell & Chernoff, 2011) hanno mostrato che non solo gli studenti di giovane età, ma anche gli insegnanti di scuola primaria incontrano grandi difficoltà nella concettualizzazione dello zero.
Questi risultati possono essere visti però come una conferma del fatto che il conflitto con lo zero nasce prevalentemente a scuola, dove esso diventa ostacolo didattico, oltre che epistemologico (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2019). Infatti, come mostrano questi autori, lo zero non è un argomento fuori dalla portata di studenti molto giovani e anzi, anche bambini di età prescolare possiedono il concetto di zero, ma per scelte didattiche inopportune esso si trasforma spesso da ostacolo epistemologico a ostacolo didattico:

> Il giovane studente è consapevole della doppia natura di zero, come cardinale e come cifra (lo abbiamo visto nelle interviste). In altre parole, sa bene che zero ha questa doppia funzione: se è il cardinale di una raccolta indica che essa è vuota; se è usato come cifra, con essa facilmente si possono scrivere numeri grandi. In questa ambiguità, che andrebbe accolta, cognitivamente sfruttata ed evidenziata, accettando entrambe le funzioni spontanee di zero, interviene invece pesantemente la scelta dell'insegnante che talvolta, a fronte dell'uso di zero come cifra nella scrittura posizionale, insiste sul fatto che zero è nulla, che non ha valore, che indica il vuoto. Il bambino, dopo aver tentato di far convivere le due anime entrambe corrette di zero, rinuncia per contratto didattico (…). (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2019, p. 94)

Dal punto di vista didattico non ci sembra dunque opportuno e tanto meno necessario eliminare lo zero dai numeri dall'aritmetica della scuola primaria. E nemmeno appare convincente l'argomento dell'inutilità pratica dello zero, in quanto oggetto intellettuale sofisticato non usato nella vita quotidiana, come sostenuto da Whitehead nella citazione riportata in precedenza. Infatti, se si vuole acquistare del pesce al mercato avendo sei euro in tasca e si acquista del pesce per l'importo di sei euro, si tornerà a casa con zero euro; l'operazione che corrisponde a questa azione della vita quotidiana è un'operazione nella quale zero figura come risultato e dunque come numero. Anche D'Amore e Fandiño Pinilla (2019) evidenziano diversi contesti della vita quotidiana, come per esempio la lettura dell'ora mostrata da un orologio digitale allo scoccare della mezzanotte (00:00) o

la lettura della temperatura nel termometro (0°), in cui lo zero è presente come numero.
Nel parlare dello zero dal punto di vista matematico è necessario distinguere, in quanto numero naturale, tra il suo aspetto cardinale e il suo aspetto ordinale, e tenere conto del suo ruolo come cifra nel sistema posizionale:

> In quali modi, per quali strade un apprendente si costruisce l'oggetto "zero"? Qui bisogna distinguere subito fra tre grandi categorie di oggetti matematici: zero come ordinale; zero come cardinale; zero come cifra. Sono tre oggetti matematici concettualmente distinti che, una volta maturata un'opportuna competenza, possono anche coincidere; tutti e tre dovrebbero arrivare a contribuire, ciascuno per conto suo, a far costruire il concetto generale di 'zero'. (D'Amore, 2007, p. 428)

Per quanto riguarda il punto di vista puramente matematico, non esiste una posizione condivisa tra i matematici sul considerare o meno zero come numero naturale ed entrambe le posizioni possono essere sostenute.[41] Dunque, dal punto di vista matematico la posizione sostenuta degli ideatori della teoria didattica dell'aritmetica riguardo lo zero non è così fuori dal comune e non è possibile affermare che essa non abbia una controparte in matematica.
Tuttavia, come dimostrano le interviste condotte da D'Amore (2007) con bambini di età prescolare (dai 3 ai 6 anni), molti di loro riconoscono, almeno a livello intuitivo, il ruolo dello zero come numero cardinale e come cifra.
In altre ricerche in didattica della matematica, che coinvolgono sia gli studenti (Wheeler, 1987, D'Amore, 2007; Cockburn & Littler, 2008; Wilcox, 2008;) sia gli insegnanti (Wheeler & Feghali, 1983; Crespo & Nicol, 2006; Russell & Chernoff, 2011), di solito lo zero, anche se è oggetto di studio specifico, non è studiato come oggetto didattico a sé stante, ma come oggetto matematico rispetto al quale emergono delle misconcezioni,[42] sia da parte degli studenti sia da parte degli insegnanti.
Inoltre, l'interesse principale per lo zero alla scuola primaria è rivolto allo zero come cifra nel sistema posizionale e quasi mai allo zero come numero. Infatti, nel volume dell'ICMI Study numero 23 *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades*, pubblicato nel 2018, dove l'argomento centrale è costituito proprio dai numeri "naturali" nella scuola primaria, si può notare che il termine

---

[41] Infatti, così come si "toglie" per esempio lo zero da $\mathbb{Q}$ quando si vuole mettere in evidenza la struttura di anello che è definibile su tale insieme, così è possibile "aggiungere" lo zero all'occorrenza. Anche il sistema assiomatico di Peano, interpretato di solito come un sistema che consente di costruire $\mathbb{N}$ a partire da 0 e 1, in realtà può essere pensato sia che si consideri 0 sia che si consideri 1 come primo numero naturale. D'altra parte è però anche vero che mentre esistono notazioni in cui lo zero viene tralasciato nelle considerazioni sugli insiemi numerici (per esempio "$\mathbb{Q}\setminus\{0\}$"), non sono diffuse notazioni specifiche per insiemi numerici senza lo zero, se non si considerano le notazioni con asterisco, come $\mathbb{N}^*$, che però sono comunque notazioni che "aggiungono" qualcosa a un simbolo già in uso.
[42] Notiamo che il termine "misconcezione" non va inteso in senso assolutamente negativo, in quanto spesso si riferisce a passaggi evolutivi, a volte indispensabili, di conoscenze in via di sistemazione (D'Amore & Sbaragli, 2005).

“zero” compare 28 volte in 548 pagine, di cui 16 volte in riferimento ad aspetti storico epistemologici e culturali, 6 volte in riferimento alle difficoltà relative all’apprendimento del sistema posizionale, 4 volte in riferimento a zero come numero e 2 volte come termine presente nelle fonti bibliografiche. Notiamo che le quattro volte in cui zero viene menzionato come numero sono tutte riferite all’articolo sulla teoria didattica dell’aritmetica esposta in precedenza (Ma & Kessel, 2018): esso compare tre volte nella citazione di Whitehead riportata dagli autori e una volta in una nota a piè di pagina che puntualizza che zero non fa parte dei numeri naturali.

Questa brevissima indagine statistica evidenzia soprattutto due aspetti: (1) che nelle ricerche in didattica della matematica, almeno per quanto riguarda l’aritmetica della scuola primaria, lo zero è preso in considerazione quasi esclusivamente come cifra, al fine di mettere in evidenza le difficoltà che emergono nell’apprendimento del sistema posizionale; (2) la questione dello zero come numero a sé stante sembra emergere se si tenta di collegare l’aritmetica della scuola primaria con l’aritmetica “adulta”, cioè l’aritmetica intesa come branca della matematica.

Un argomento a cui sono dedicate alcune ricerche in didattica della matematica riguarda la divisione per zero (si vedano per esempio Crespo e Nicol, 2006, Quinn, Lamberg e Perrin, 2008); in questo contesto zero è dunque considerato un numero, ma anche in questi casi l’interesse degli autori è rivolto primariamente all’individuazione di misconcezioni.

Da quanto esposto si evince a nostro avviso che l’interesse per lo zero nella ricerca in didattica della matematica è prevalentemente strumentale e da essa non emerge la possibilità di una caratterizzazione dello zero come complesso concettuale.

In D’Amore (2007), l’Autore distingue invece, come già evidenziato, tre componenti dell’oggetto *matematico* zero: cardinale, ordinale, cifra. Nell’analisi dei testi delle interviste condotte con bambini di età prescolare, egli premette a ciascuna intervista riportata nell’articolo “il ‘tipo’ di zero che appare citato spontaneamente” (D’Amore, 2007, p. 438) dai bambini intervistati, distinguendo appunto tra zero come cardinale, zero come cifra e zero come ordinale.

Questo modo di caratterizzare lo zero ci sembra un importante indizio di condensazione, se non di una vera e propria reificazione, di un oggetto matematico “zero” specifico della didattica della matematica. Tra i tre “tipi” di zero ai quali è possibile fare riferimento in didattica della matematica sembra che solo due siano spontanei nei bambini piccoli: lo zero-cardinale e lo zero-cifra, mentre è assente lo zero-ordinale.

Riteniamo che in tale contesto anche lo zero possa essere visto come un esempio di oggetto matematico specifico della didattica della matematica, costituito da un complesso concettuale formato da “zero come numero cardinale” e “zero come cifra”, tra i quali sussiste una relazione di inclusione semantica, in quanto il concetto di zero come cifra è incluso semanticamente nel concetto di zero come numero cardinale. Infatti, zero è una delle dieci cifre del sistema numerico

decimale, ma è anche il cardinale più piccolo che è possibile scrivere ricorrendo alle cifre del sistema decimale; in generale possiamo affermare che una cifra di un sistema numerico è anche un numero ma un numero non è una cifra, quindi la cifra è semanticamente un caso particolare di numero.
Zero come oggetto matematico specifico della didattica della matematica non può trovare un'adeguata collocazione nella teoria didattica dell'aritmetica esposta in precedenza, dal cui "campo d'azione" esso è escluso: "Together, the two sets of numbers, natural numbers[43] and positive rational numbers, form the arena of school arithmetic" (Ma & Kessel, 2018, p. 443) (Figura 7).

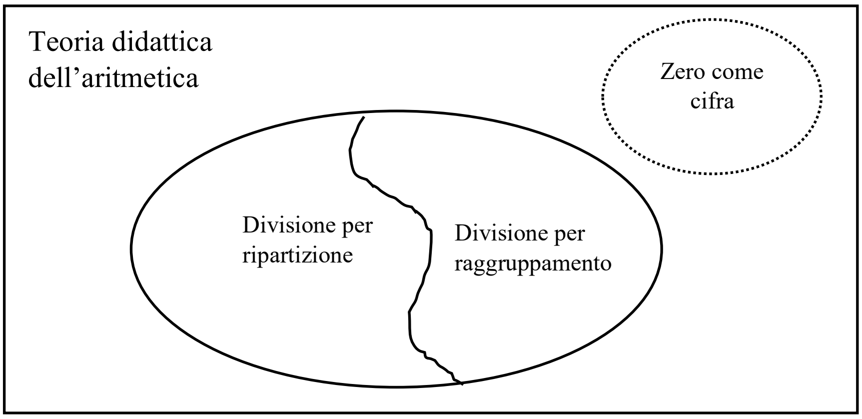



Figura 7. Rappresentazione del complesso semantico che caratterizza l'oggetto matematico "divisione" specifico della didattica della matematica e della componente zero-cifra dell'oggetto matematico "zero" specifico della didattica della matematica.

L'oggetto matematico "zero" specifico della didattica della matematica caratterizzato in D'Amore (2007) può essere visto come una prima versione di tale oggetto, la quale potrebbe evolvere verso un'altra versione che includa anche lo zero-ordinale. Dal punto di vista didattico lo zero-ordinale compare al più tardi nel momento in cui si pone la questione dell'ordinamento in $\mathbb{Z}$, dove 0 appare come elemento separatore tra i numeri positivi e i numeri negativi.
Un tale complesso concettuale sarebbe costituito da una relazione di complementarietà tra zero-ordinale e zero-cardinale e da una relazione di inclusione tra zero-cifra e zero-cardinale (Figura 8).

[43] Ricordiamo che per gli autori zero non appartiene all'insieme dei numeri naturali.

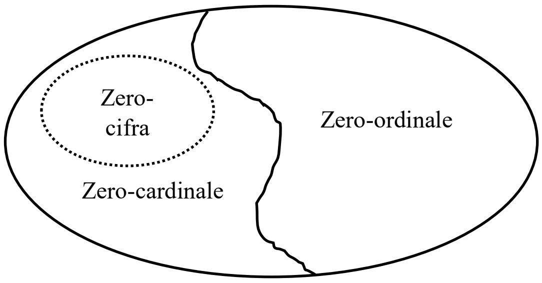



Figura 8. Rappresentazione del complesso semantico che caratterizza l'oggetto matematico "zero" specifico della didattica della matematica.

### 6. 2. 4. Concezioni "algebrico-grafica" e "curvo-algebrica" di funzione

Nel presente paragrafo esamineremo un altro caso di complesso concettuale che a nostro avviso costituisce un oggetto matematico specifico della didattica della matematica; esso si riferisce all'oggetto matematico "funzione".
Balacheff e Gaudin (2009) analizzano i principali studi sull'argomento "funzione" in didattica della matematica e mettono in evidenza il fatto che Vinner (1992) individua la presenza delle seguenti concezioni negli studenti di scuola superiore (età 15-19 anni):

- "The correspondence which constitutes the function should be systematic, should be established by a rule and the rule itself should have its own regularities";
- "A function must be an algebraic term";
- "A function is identified with one of its graphical or symbolic representations";
- "A function should be given by one rule";
- "A Function can have different rules of correspondence for disjoint domains provided that these domains are regular domains (like half lines or intervals);
- "A rule of correspondence which is not an algebraic rule is a function only if the mathematical community officially announced it as a function";
- "The graph of a function should be regular and systematic";
- "A function is a one-to-one correspondence". (Vinner, 1992, p. 200, citato in Balcheff & Gaudin, 2009, p. 24)

Prendendo come un primo riferimento il lavoro di Vinner, Balacheff e Gaudin (2009) inquadrano la propria ricerca sulle concezioni degli studenti di scuola superiore riguardo all'oggetto "funzione" all'interno del modello *cK¢* (Balcheff, 1995, 2017) ottenendo risultati diversi che consentono di trattare il problema da un punto di vista più generale.
Sul modello *cK¢* torneremo in maniera estesa nel capitolo 7, quando ci occuperemo dei diversi approcci ai concetti in didattica della matematica. Qui

diamo di esso solo una brevissima caratterizzazione, sufficiente per inquadrare l'argomento trattato. Sottolineiamo in prima linea che esso si colloca all'interno della teoria delle situazioni didattiche (Brousseau, 1986) e si fonda sull'idea di campo concettuale (Vergnaud, 1990), ma rielabora l'idea di concetto e concezione in maniera tale da evitare riferimenti più prettamente psicologici. Infatti, tale modello non deve essere inteso come un modello mentale delle concezioni degli studenti, ma come un costrutto che "characterize and represent states of the student<>milieu system" (Balacheff, 2017, p. 7).[44]

Nel modello *cK¢* una concezione è una quadrupla $(P, R, L, \Sigma)$, dove $P$ rappresenta un insieme di problemi tipo la cui soluzione fa emergere la concezione; $R$ rappresenta un insieme di operatori (algoritmici, teorici etc.) che possono essere usati per agire nei contesti di soluzione di tali problemi; $L$ rappresenta uno o più sistemi di rappresentazione a cui si fa ricorso in tali contesti; $\Sigma$ rappresenta un sistema di controllo che permette di decidere quali azioni sono lecite e se le soluzioni possono essere considerate effettivamente tali.

A partire da un'indagine storico-epistemologica e dalle categorie individuate empiricamente da Vinner, Balacheff e Gaudin caratterizzano per via teorica le seguenti quattro possibili concezioni in riferimento al concetto di funzione in matematica:

- Table conception: $C_T = (P_T, R_T, Table, \Sigma_T)$,
- Curve conception: $C_C = (P_C, R_C, Curve, \Sigma_C)$,
- Analytic conception: $C_A = (P_A, R_A, Algebra, \Sigma_A)$,
- Relation conception: $C_R = (P_R, R_R, L_R, \Sigma_R)$. (Balacheff & Gaudin, 2009, p. 20)

I pedici $T$, $C$, $A$, $R$ indicano rispettivamente *Tabella* (Table), *Curva* (Curve), *Analitica/o* (Analytic), *Relazione* (Relation).

Riportiamo di seguito la caratterizzazione che gli autori forniscono di queste quattro concezioni, le quali consentono di inquadrare anche le categorie messe in evidenza da Vinner.

La *concezione tabulare* (Table conception):

> has essentially empirical foundations; the validity of a table depends on the precision of measurement and of the related computations against the requirements of a given experimental context. In the case of the Table conception, (…) the validity must be evaluated against the quality of the interpolations and predictions (…). Therefore, the corresponding control structure $\Sigma_T$ was fundamentally of an empirical nature. (Balcheff & Gaudin, 2009, p. 21)

La *concezione* relativa alla funzione come *curva* (Curve conception):

> whose corresponding sphere of practice ($P_C$) —in the beginning of the 18th century— was constituted by the important problem of long distance navigation where coasts

[44] Il termine *milieu* è tratto dalla teoria delle situazioni didattiche di Brousseau; esso costituisce il sistema antagonista del soggetto nel processo di apprendimento, rispetto al quale il soggetto mette in atto strategie di adattamento (Brousseau, 1986).

> were out of sight. (…) A curve was not yet the graphical representation that we acknowledge nowadays as being the graph of a function considered as a relationship between entities (numbers or even quantities). (Balacheff & Gaudin, 2009, p. 22)

La *concezione analitica* (Analytic conception):

> introduces a rupture in the epistemology of functions. A function defined by an analytical expression does not need to refer to an experimental field (either of natural phenomena or of mechanical drawings). It can be studied for itself, as Euler did by presenting functions as the object of study—what was called Analysis (*Introductio in analysin infinitorum*). (…) A purpose of the Analysis of the 18th Century (and of the 19th and 20th Centuries) was the solution of functional equations (…) and the developments into infinite series, which played a central role as operators (…) in those solutions. (…) Computation of symbolic expressions and mathematical proof are the key tools to decide whether a statement is valid or not. (Balacheff & Gaudin, 2009, pp. 23–24)

La *concezione* di funzione come *relazione* (Relation conception) nasce dalla ricerca della soluzione delle equazioni alle derivate parziali emergenti dalla modellizzazione del problema della corda vibrante, il quale:

> induced Euler to consider arbitrary functions that did not necessarily have an analytic representation. The existence of such arbitrary functions was controlled by physical arguments and was related to the various possible initial forms of the string. The emergence of a Relation conception (…) of function then required the development of new modes of representation (…) and new control structures (…) in order to define what such functions could be and in order to work with them without any reference to an analytical representation. These developments took two centuries. (Balacheff & Gaudin, 2009, p. 23)

Le caratterizzazioni delle concezioni di funzione che abbiamo esposto evidenziano la presenza di una rottura epistemologica importante nell'evoluzione del concetto di funzione che si ripercuote in maniera significativa anche sul modo di trattare tale argomento nel percorso scolastico: da un lato un approccio empirico, in cui la funzione o è implicitamente presente come legame tra i dati tabulati oppure è una curva che rappresenta, per esempio, il movimento di un corpo; dall'altro un approccio teorico, in cui una funzione acquisisce per la prima volta "la dignità" di oggetto matematico astratto, nel momento in cui si presenta come soluzione di un'equazione differenziale.[45] Questo cambio di prospettiva è segnato da un importante cambio del sistema di controllo sulla base del quale è possibile decidere se un oggetto matematico è una funzione o meno: da un contesto di verifica empirica, sperimentale, si passa a un contesto puramente teorico.

[45] Dunque, anche in questo caso, così come nel caso dei numeri negativi e dei numeri complessi, il concetto di funzione viene oggettificato attraverso l'accettazione del suo ruolo di soluzione di un'equazione, in questo caso un'equazione differenziale.

Balacheff e Gaudin notano che, sebbene la concezione tabulare (o numerica) delle funzioni sia la prima a essere comparsa nella storia attraverso le tavole dell'*Almagesto* di Tolomeo e poi in maniera incisiva nel lavoro di determinazione delle orbite dei pianeti nelle opere di Kepler (su questi aspetti si veda anche Ponte, 1992), essa in realtà non è quasi mai presa in considerazione nel percorso scolastico:

> It is also striking that tables play a very limited role if at all in situations involving functions: if they are present it is in relation to concrete situations in which the aim is less one of analyzing a function than one of analyzing the data (the function "disappears" behind its use as a tool for data analysis). (Balacheff & Gaudin, 2009, p. 32)

Questo aspetto trova conferma per esempio anche nelle Indicazioni Nazionali italiane per il primo ciclo d'istruzione (MIUR, 2012), dove l'analisi delle relazioni tra collezioni di dati empirici cade nell'ambito tematico *Dati e Previsioni* e non in quello *Relazioni e Funzioni*. Si può affermare che in questo caso la funzione è presente a un livello intuitivo, in cui la sua natura non viene problematizzata. Inoltre è vero anche che gli studenti incontrano nel proprio percorso scolastico di solito prima esempi dei grafici di funzioni che suggeriscono implicitamente una continuità nel senso di una curva tracciabile "senza staccare la matita dal foglio", mentre le funzioni empiriche hanno raramente questa caratteristica. In generale le funzioni discrete ricevono poca attenzione durante il percorso scolastico e appaiono più come delle "soluzioni di emergenza" per i casi in cui non è possibile formulare una legge esprimibile in linguaggio simbolico, piuttosto che come funzioni con un'identità propria. Infine, funzioni di cui non è possibile tracciare un grafico non vengono quasi mai trattate e se di esse viene fornito un esempio, è solo per sottolineare l'eccezionalità del loro status in confronto alle funzioni "usuali".[46] Dunque gli studenti vengono in realtà confrontati solo con una tipologia molto ristretta di funzioni che non hanno comportamenti "patologici". Questo modo di procedere si riscontra anche all'università, dove l'analisi numerica segue di solito quella classica nel curriculo. Da questa prospettiva non possiamo che concordare con quanto affermano Balacheff e Gaudin: "Students' *spheres of practice are radically different from the ones of the mathematicians that historians consider*. The didactical system has first introduced students to "good" functions, mainly playing with two different settings: algebraic and graphical" (Balacheff & Gaudin, 2009, p. 33, enfasi nostra).

Quanto appena esposto mostra che c'è una differenza epistemologica tra l'oggetto matematico "funzione" e la sua controparte didattica. Inoltre, come sottolineano

[46] Si pensi per esempio al classico esempio della funzione di Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 1 \; se \; x \; è \; un \; numero \; razionale \\ 0 \; se \; x \; è \; un \; numero \; irrazionale \end{cases}$, il cui grafico non può essere tracciato e che ha avuto storicamente il ruolo di mettere in evidenza il fatto che il concetto di funzione è indipendente da quello di grafico.

Balacheff e Gaudin, anche l'oggetto matematico "funzione" in realtà non può essere visto come un unico oggetto nel corso della storia della matematica:

> The conceptions of function we have modeled differ from each other in an essential way. The conception of curves as trajectories of a point, ascribed to Newton by Kline (1972, p. 339) is fundamentally different from the Dirichlet conception of a subset of the Cartesian product of two sets satisfying given constraints (which guarantees a unique image for each element of the source set). *The crucial point here is that "function" does not refer to the same object in the two cases but to objects that are different in essence*, despite the fact that in modern terms we could mathematically interpret them in the same framework. (Balacheff & Gaduin, 2009, p. 24, enfasi nostra)

Notiamo che la suddivisione dell'oggetto matematico "funzione" in due diversi oggetti non coincide con la distinzione che viene messa in evidenza da Sfard (1991), basata sulla contrapposizione tra una concezione operazionale e una concezione strutturale delle nozioni matematiche astratte, anche se tra le due ci sono molte analogie. Per Balacheff e Gaudin nell'evoluzione storico-epistemologica ci sono *oggetti* matematici essenzialmente diversi che caratterizzano le diverse concezioni come sistemi concettuali autonomi completamente determinati in termini dei quattro elementi che secondo il modello *cK¢* determinano una concezione: un insieme di problemi che la fanno emergere, un insieme di operatori che consentono di agire in tali contesti problematici, un sistema di rappresentazioni, un sistema di controllo. D'altra parte però, le concezioni relative alla funzione come oggetto empirico possono essere viste come aventi caratteristiche operative, procedurali, mentre le concezioni relative alla funzione come oggetto di studio a sé stante possono essere viste come aventi caratteristiche strutturali nel senso di Sfard (1991).
Dato che la concezione tabulare non rappresenta di solito il contesto d'ingresso all'argomento "funzione" a scuola, gli autori non la includono nella seguente classificazione delle concezioni degli studenti di scuola superiore, articolata intorno ai sistemi di rappresentazione:

- Function is a correspondence "law" (a function expresses the correspondence between two sets, an element of the first set being associated with a unique element of the second set);
- Function is a symbolic expression (a formula);
- Function is a graphical object. (Balacheff & Gaudin, 2009, pp. 17–18)[47]

Sulla base di una situazione problematica progettata in maniera tale da far emergere le risorse effettive degli studenti, in termini di operatori, sistemi di rappresentazioni e di controllo, gli autori individuano due concezioni di funzione

---

[47] Gli autori sottolineano anche che le tre categorie corrispondono ai tre principali sistemi di rappresentazione: verbale, algebrico, grafico (Balacheff & Gaudin, 2009, p. 18).

che ritengono significative per studenti delle scuole superiori, cioè della fascia d'età 15-19 anni.
La situazione problematica è la seguente (gli studenti lavorano in coppie con il sistema di software dinamico *Cabri*): dato il grafico di una parabola in un sistema di coordinate cartesiane e la possibilità di manipolarlo spostando l'asse di simmetria della parabola, determinare l'equazione della retta tangente alla parabola in un dato punto e tracciare tale retta. Agli studenti è chiesto prima di affrontare il problema senza che vi siano vincoli di movimento per la parabola e poi con un vincolo imposto dal sistema, secondo cui non è possibile ruotare la parabola in maniera tale che il suo asse sia parallelo all'asse delle ordinate.
Dall'esame dei protocolli degli studenti, Balacheff e Gaudin (2009) ricavano due diverse concezioni di funzione che loro chiamano *curvo-algebraica* (Curve-Algebraic) e *algebrico-grafica* (Algebraic-Graph). Le due concezioni si basano sulla stretta interazione tra le concezioni $C_C$ e $C_A$ precedentemente evidenziate nell'ambito della geometria analitica.[48]
Nella concezione *curvo-algebrica* il diagramma che rappresenta la funzione sulla quale verte il problema da risolvere (nel caso particolare la parabola) è visto come un oggetto geometrico, collocato in un sistema di riferimento; il controllo sulla correttezza delle azioni e sull'appropriatezza delle soluzioni è delegato al registro algebrico; vi è un legame per così dire "rigido" tra la curva (parabola) e la sua equazione, in quanto non viene stabilita una relazione con il resto degli elementi del sistema di riferimento; non vi è in questo caso un coordinamento vero tra registro grafico e registro algebrico. L'uso degli strumenti matematici appartenenti all'analisi infinitesimale nella risoluzione del problema è ridotto in questo caso a mera manipolazione simbolica.
Nella concezione *algebrico-grafica* il diagramma è un oggetto del sistema di riferimento e il sistema di rappresentazione grafico è considerato in stretto coordinamento con quello algebrico; la funzione è, contemporaneamente, sia l'equazione sia il suo grafico e il piano cartesiano è il luogo in cui tale legame viene evidenziato.
Notiamo che la concezione *curvo-algebrica* è un ponte tra una concezione sintetica e una analitica della geometria, mentre la concezione *algebrico-grafica* è un ponte tra la geometria analitica e l'analisi infinitesimale.
In Balacheff (2017), l'Autore propone un'ulteriore riflessione sulle concezioni dell'oggetto matematico funzione all'interno del modello *cK¢*, in questo caso in riferimento a docenti in formazione iniziale.[49] Tale riflessione è basata su una sperimentazione simile a quella condotta nell'ambiente di geometria dinamica *Cabri*, esposta in precedenza. In questo caso l'ambiente dinamico di riferimento

[48] Notiamo che, oltre alla concezione tabulare, anche la concezione relazionale non è presa in considerazione in questa modellizzazione, ma secondo gli autori gli studenti di scuola superiore non sviluppano una vera e propria concezione in questo senso, la quale diventa invece importante nei corsi universitari di matematica.
[49] La sperimentazione è stata svolta nell'ambito della tesi di dottorato di N. Gaudin (2005).

non è *Cabri*, ma *Maple*, e la situazione problematica è data dalla richiesta di determinare quale di cinque possibili approssimazioni in un punto di una funzione polinomiale di terzo grado, della quale sono note le coordinate di 20 punti, con un range di errore del 10 %, ma non i coefficienti, è la migliore approssimazione della funzione in un dato intervallo.
In questo caso la situazione problematica è riferita alla concezione tabulare di funzione, ma la sfera di pratiche è molto diversa rispetto a quella in cui tale concezione si presenta storicamente per la prima volta, in quanto i soggetti coinvolti dispongono già di una conoscenza approfondita del concetto di funzione in termini curvo-algebrici e in termini algebrico-grafici e perché l'ambiente di geometria dinamica porta con sé la possibilità di impiego di strumenti e di sistemi di controllo diversi rispetto a quelli disponibili storicamente per i matematici. Dalla sperimentazione emerge che il lavoro in questione consente di far emergere una concezione di *funzione-come-oggetto* che unisce in sé entrambe le concezioni, quella *curvo-algebrica* e quella *algebrico-grafica*.
Nella tabella sottostante (Tabella 1) sono riassunte le caratterizzazioni di queste tre concezioni in riferimento al sistema di controllo, sia in termini di referenza, sia in termini di controllo strumentale, sia in riferimento al sistema di rappresentazioni. Nell'esempio tali concezioni emergono durante la risoluzione del problema di approssimazione dell'equazione di una funzione polinomiale della quale sono note le coordinate di alcuni punti $(x_i,y_i)$, $i = 1,\dots, 10$, con un margine di errore noto, e cinque approssimazioni $f_j(x)$, $j = 1,\dots, 5$ in un punto.

| | **Concezione Curva-algebra** (*Curve-algebra conception*) | **Concezione Algebra-grafico** (*Algebra-graph conception*) | **Concezione di funzione-come-oggetto** (*Function-as-object-conception*) |
|---|---|---|---|
| **Controllo di referenza** | Forma globale della curva approssimante<br>Vicinanza visiva della curva approssimante ai valori $(x_i, y_i)$ | Vicinanza tra i valori $f_j(x_i)$ e $y_i$ o i punti $(x_i, f_j(x_i))$ e $(x_i, y_i)$ | Forma globale della curva approssimante e la vicinanza tra i valori $f_j(x_i)$ e i $y_i$ o i punti $(x_i, f_j(x_i))$ e $(x_i, y_i)$ |
| **Controllo strumentale** | Legato all'uso di *Maple* per tracciare il grafico delle funzioni | Scegliendo la formula $[f_j(x_i)-y_i]^2$<br>Legato all'uso di *Maple* per i calcoli | Integrazione dei registri algebrico e grafico<br>Uso pieno di *Maple* come strumento per il calcolo infinitesimale |
| **Sistemi di rappresentazione** | Disegni di Maple e funzionalità associate | Analitico e grafico | Analitico e grafico |

Tabella 1. Le concezioni curvo-algebrica, algebrico-grafica e funzione-come-oggetto attivate nella risoluzione di un problema di approssimazione dell'equazione di una funzione polinomiale (tratto da Balacheff, 2017, p. 17).

Come evidenzia Balacheff, il ruolo delle componenti di controllo è quello di guidare la soluzione del problema all'interno del sistema di rappresentazione in questione, dove il controllo di referenza chiama in causa proprietà espresse dalla definizione di approssimazione e permette così di anticipare una strategia e di formulare criteri per una soluzione accettabile, mentre il controllo strumentale consiste nella scelta degli operatori disponibili (per esempio le formule per il calcolo del quadrato dell'errore di scostamento), in accordo con le azioni richieste sulla base del controllo di referenza (Balacheff, 2017). La tabella mostra come sia gli aspetti relativi al controllo di referenza, sia quelli legati al controllo strumentale, sia quelli legati al sistema di rappresentazione delle concezioni *curvo-algebrica* e *algebrico-grafica,* sono presenti nella concezione di *funzione-come-oggetto*, rendendo possibili degli shift tra le prime due concezioni all'interno della terza, in riferimento ai rispettivi sistemi di rappresentazione e di controllo.
La concezione della funzione-come-oggetto rappresenta dunque una concezione più completa di funzione, all'interno della quale le altre due concezioni interagiscono creando quello che abbiamo chiamato un "complesso concettuale". In questo caso gli elementi di tale complesso sono organizzati secondo una

relazione semantica più complessa, che comprende sia una relazione di complementarietà (tra concezione curvo-algebrica e concezione algebrico-grafica) sia una relazione di inclusione semantica tra il complesso creato da quest'ultime e la concezione di funzione-come-oggetto (Figura 9).
Se confrontiamo la classificazione di Vinner (1992) esposta all'inizio del paragrafo, dalla quale prendono spunto Balacheff e Gaudin (2009) per la loro successiva modellizzazione delle concezioni degli studenti di scuola superiore riguardo all'oggetto matematico "funzione", con quella fornita da Balacheff e

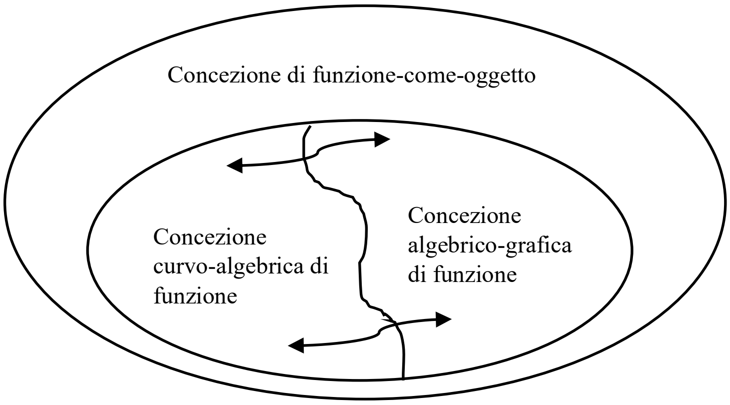



Figura 9. Rappresentazione del complesso semantico che caratterizza l'oggetto matematico "funzione" specifico della didattica della matematica.

Gaudin (2009) e Balacheff (2017), possiamo notare che le caratteristiche delle concezioni messe in evidenza da Vinner hanno una funzione *strumentale*, in quanto forniscono una gamma di categorie utili per descrivere le concezioni emerse da un'indagine empirica.
D'altra parte, la caratterizzazione della concezione di funzione-come-oggetto fornita da Balacheff (2017) (Tabella 1 e Figura 9) può essere vista a nostro avviso come una reificazione di un oggetto matematico "funzione" specifico della didattica della matematica, per il quale gli studi di Gaudin (2005) e Balacheff e Gaudin (2009) rappresentano la fase di condensazione.
L'ipotesi che in Balacheff (2017) sia presente una reificazione di un oggetto matematico "funzione" specifico della didattica della matematica ci sembra confermata sia dalla schematicità della rappresentazione che facilita il riferimento alle diverse concezioni mettendo in evidenza le loro caratteristiche, sia dalla sostantivazione nelle locuzioni che denotano le diverse concezioni. Infatti, mentre in Balacheff e Gaudin (2009) si usa ancora parlare di *Curve-Algebraic conception* e *Algebraic-Graph conception*, in Balacheff (2017) si parla invece di *Curve-algebra conception*, *Algebra-graph conception* e *Function-as-object conception* e

quindi i termini che determinano il sostantivo ‘concezione’ sono sostantivati, mentre nel caso precedente sono degli aggettivi.
Inoltre, l’analisi di Balacheff e Gaudin mostra come il riferimento storico-epistemologico in matematica non sempre è appropriato per la modellizzazione delle concezioni degli studenti, dato che tali concezioni sono fortemente dipendenti dal contesto o da quello che essi chiamano “le sfere di pratiche”, le quali possono essere del tutto diverse da quelle storiche, come per esempio quelle che nascono in riferimento al ricorso a un software di geometria dinamica. In questo senso è quindi necessario tenere conto del fatto che “the historical analysis could delineate the notion from the mathematical point of view, [but] from the epistemic point of view we must be prepared to see things in a rather different way” (Balacheff, 2017, p. 21).
Quest’ultima affermazione è un indice del fatto che non solo gli strumenti e gli obiettivi diversi con cui si studiano gli oggetti matematici in didattica della matematica producono oggetti matematici specifici di questa disciplina, ma che anche la diversità delle sfere di pratiche in cui si trovano immersi gli studenti rispetto a quelle nelle quali erano immersi i matematici storicamente producono oggetti matematici differenti.
Riteniamo importante sottolineare che non stiamo sostenendo che le concezioni di funzione che Balacheff e Gaudin hanno messo in evidenza, e che a nostro avviso hanno assunto un ruolo oggettuale nelle loro ricerche, sono le uniche possibili e che il metodo usato dagli autori per farle emergere sia l’unico possibile e tanto meno che esso sia “quello giusto”. Ricordiamo però ancora una volta che il nostro scopo non è quello di fornire dimostrazioni di unicità degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica presentati, ma quello di fornire per così dire “una prova di esistenza” per essi attraverso alcuni esempi, evidenziando le loro caratteristiche.
Nel prossimo paragrafo presenteremo un altro esempio di oggetto matematico specifico della didattica della matematica, riferito all’oggetto matematico “dimostrazione”.

### 6. 2. 5. Dimostrazione e argomentazione

L’argomento “dimostrazione” è forse uno dei più studiati in didattica della matematica; questo si evince per esempio dalla numerosità dei contributi nell’ultimo ICMI-Study dedicato al tema “Argumentation and Proof” (Hanna & de Villiers, 2012), ma anche dalla diversità di approcci con cui l’argomento viene affrontato nelle ricerche (si veda a tale proposito il numero 5 del 2019 della rivista ZDM–Mathematics Education, dedicato all’argomento “Evidence and argument”. La difficoltà degli studenti di produrre, o anche solo riprodurre, dimostrazioni in aula (si veda p. e. Duval, 1992/1996; Stylianides e Stylianides, 2017) ha spinto nel

passato le ricerche in questo ambito verso lo studio di forme di ragionamento che hanno alcuni tratti in comune con la dimostrazione, sia con l'obiettivo di caratterizzare i possibili ostacoli che possono derivare dalla mancata consapevolezza di tali differenze (Balacheff, 1987, 1988; Duval, 1991, 1992/1996, 2007), sia con l'obiettivo di individuare forme discorsive che possano essere propedeutiche alla dimostrazione, evidenziando la possibilità di un'unità cognitiva tra l'argomentazione condotta nella fase di formulazione di un'ipotesi e la dimostrazione di quest'ultima (Boero, Garuti, & Mariotti, 1996; Garuti, Boero, Lemut, & Mariotti, 1996; Garuti, Boero, & Lemut, 1998; Pedemonte, 2007; Boero, 2017).
Alla fine degli anni '80 del XX secolo, Balacheff (1987) evidenziava alcuni concetti che hanno un ruolo importante nella caratterizzazione delle interazioni che si presentano durante la risoluzione di problemi matematici in lavori di gruppo;[50] si tratta dei concetti di *spiegazione* (explication), *prova* (preuve), *dimostrazione* (démonstration) e *ragionamento* (raisonnement). Caratterizziamo brevemente tali concetti facendo riferimento a Balacheff (1987).
La *spiegazione* è un discorso il cui obiettivo è quello di rendere comprensibile il carattere di verità acquisito da chi fornisce la spiegazione riguardo a un enunciato o a un fatto; le ragioni sulle quali si basa la spiegazione possono essere discusse, accettate o rifiutate.
La *prova* è una spiegazione relativa a un argomento dibattuto che mira a creare un sistema di validazione comune a un gruppo di interlocutori. Se tale gruppo di interlocutori è composto da matematici può essere accettata come prova solo una spiegazione che rispetti certe regole: "un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien déduit de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensamble de règles bien défini [un enunciato è riconosciuto come vero oppure è dedotto da quelli che lo precedono per mezzo di una regola di deduzione presa da un insieme di regole ben definite]" (Balacheff, 1987, p. 148).[51] Quest'ultimo tipo di prove prendono il nome di *dimostrazioni*.
Infine, il *ragionamento* è un'attività intellettuale, il più delle volte non esplicitata, tramite la quale si producono, per mezzo di un'opportuna manipolazione di informazioni, nuove informazioni a partire da informazioni già date.
Balacheff sottolinea la dimensione sociale della dimostrazione, dato che essa non è altro che un particolare tipo di prova, la quale viene esibita con una richiesta di accettazione nei confronti di una comunità. In altre parole: una prova viene prodotta per convincere qualcuno; se la dimostrazione è una prova, allora anche la

[50] Notiamo che il lavoro di Balacheff (1987) è inquadrato nel quasi-empirismo di Lakatos (1976/1979, si veda a tale proposito il capitolo 9), secondo il quale le dimostrazioni procedono per prove e controprove, il che significa che le dimostrazioni non sono mai definitive, ma sempre provvisorie, in quanto vengono riesaminate ogni volta che viene individuato un controesempio che mette in discussione la generalità delle affermazioni fatte. In questo senso la ricerca di una dimostrazione diventa molto simile a un'attività di risoluzione di problemi.
[51] Nel seguito del testo verranno riportate le citazioni in lingua originale; per le citazioni in una lingua diversa dall'italiano o dall'inglese verrà fornita anche la traduzione.

dimostrazione deve convincere, cioè creare consenso all'interno di una comunità, nel caso specifico la comunità dei matematici.
Dal punto di vista cognitivo Balacheff (1988) distingue tra *prove pragmatiche* e *prove intellettuali*, mettendo in evidenza l'importanza del linguaggio specifico della matematica nel passaggio dalle prime alle seconde:

> We call pragmatic proofs those proofs which rely upon action, and we call intellectual proofs those which use verbalizations of the properties of objects and of their relationships. This step towards intellectual proof does not consist in a mere translation of action into words; it requires a genuine construction of language means as an operative tool. The problem-solver must be able to use language and symbols as means to compute on statements and relations. (Balacheff, 1988, p. 286)

Inoltre, Balacheff mette in evidenza un aspetto importante che verrà successivamente approfondito e chiarito da Duval: "the teaching of proof is associated to what could be described as a cognitive break in the student activity, related to the didactical break represented by new requirement for mathematical proofs" (Balacheff, 1988, p. 296).
Nelle proprie ricerche sulla dimostrazione, Duval si chiede come sia possibile "far sì che una dimostrazione funzioni come una prova per la maggior parte degli allievi" (Duval, 1992/1996, p. 130). Dunque, in riferimento alle definizioni fornite da Balacheff, Duval si chiede quali sono le condizioni, da un punto di vista cognitivo, affinché una dimostrazione matematica sia accettata dagli studenti come prova valida.
Il punto di partenza delle indagini dell'Autore è dato dalla constatazione dell'esistenza "di una forma di ragionamento irriducibile agli schemi proposizionali o al calcolo dei predicati sviluppato nella logica matematica" (Duval, 1992/1996, p. 130) che ha avuto un'importante evoluzione a partire dagli anni '60 del XX secolo, soprattutto ad opera di Perelman e Toulmin. Duval mette in evidenza che nell'ambito dell'insegnamento[52] della matematica si è iniziato a prendere in considerazione tale tipologia di produzione discorsiva, che ha preso il nome di *argomentazione*, a causa soprattutto della constatazione delle enormi difficoltà che gli studenti incontrano nell'ambito della comprensione della natura della dimostrazione in matematica, difficoltà diffuse e persistenti. Altri motivi che secondo Duval hanno indirizzato l'attenzione di chi si occupa di didattica della matematica verso l'argomentazione sono legati all'apprendimento della geometria, dove la mancata comprensione del ragionamento tipico della matematica può diventare una barriera insormontabile, nonché al crescente ricorso ai lavori di gruppo e in generale alla crescente organizzazione del lavoro in classe con modalità che favoriscono le interazioni tra gli studenti.

[52] Notiamo che Duval non usa i termini "insegnamento" e "apprendimento" nel modo in cui lo si fa di solito oggi, dove i due termini compaiono generalmente in coppia, cioè come "insegnamento-apprendimento", soprattutto in seguito alla diffusione dei lavori di Vygotskij, in cui viene messa in evidenza l'importanza degli aspetti storico-culturali per l'apprendimento e del ruolo dell'insegnante come mediatore nel processo di insegnamento-apprendimento.

Il problema che si pone Duval è quello di indagare le possibilità e le condizioni:

> di un passaggio dall'argomentazione al ragionamento in matematica e, più in particolare alla dimostrazione. Non soltanto a motivo delle obiezioni che possono venire da un punto di vista strettamente matematico, ma anche a motivo della complessità stessa dell'argomentazione (Grize, 1983, p. 184) e delle dinamiche psicologiche possibili a seconda delle situazioni di discussione: nell'ambito di una conversazione, nell'ambito di un gruppo, o nell'ambito di un uditorio (…). (Duval, 1992/1996, p. 130)

Secondo Duval è necessario dunque analizzare e confrontare il funzionamento delle due tipologie di produzione discorsiva, argomentazione e dimostrazione, al fine di comprendere se tra esse ci sia continuità o discontinuità dal punto di vista *cognitivo*. Notiamo dunque che l'ipotesi formulata da Balacheff (1988) di una rottura cognitiva che si verifica nel momento in cui lo studente viene confrontato per la prima volta con richieste di fornire dimostrazioni matematiche, si concretizza nelle ricerche di Duval in termini di relazione tra due produzioni discorsive: argomentazione e dimostrazione.
Nel caratterizzare la differenza tra argomentazione e dimostrazione, Duval compie tre passaggi: (1) distingue tra loro spiegazione e ragionamento; (2) mostra che argomentazione e dimostrazione sono entrambe forme di ragionamento; (3) mostra in che cosa si distinguono queste due forme di ragionamento.
Di seguito presentiamo brevemente i vari passaggi seguendo Duval (1992/1996).
In prima istanza, Duval sottolinea che sia la spiegazione sia il ragionamento sono produzioni discorsive che presentano argomenti e che essi hanno quindi una radice comune. Allo stesso tempo, però, la spiegazione ha il compito di descrivere, di presentare un sistema di relazioni tra gli argomenti, mentre il ragionamento ha il compito di cambiare il valore epistemico (possibile, probabile, impossibile, evidente, assurdo, verosimile etc.) attribuito da un interlocutore (che può coincidere con colui che sta ragionando) a un'affermazione che viene messa in discussione. Ciò di cui necessita il ragionamento per poter compiere la propria funzione di cambio di valore epistemico di un'affermazione è quello che Duval chiama "la forza degli argomenti" (Duval, 1992/1996), esso deve quindi soprattutto *convincere*.
La spiegazione ha invece come obiettivo primario quello di *far comprendere*, attraverso la messa in evidenza delle relazioni tra gli argomenti, prima che quello di convincere.
Naturalmente anche il ragionamento può essere usato per far comprendere, afferma Duval, ma la sua funzione primaria è quella del convincimento, mentre la funzione esplicativa è secondaria e può anche non essere assolta. Infatti, si può convincere un interlocutore anche senza che egli abbia compreso bene il nostro ragionamento, per esempio perché il ragionamento gli è sembrato particolarmente ben organizzato o perché ha colto alcuni argomenti che sono vicini al suo ambito di esperienza. In poche parole: l'interlocutore può dirsi convinto della tesi sostenuta (o ritenerla più probabile etc.). senza aver compreso necessariamente il

ragionamento sul quale si basa la sua difesa; la finalità del ragionamento sarebbe comunque soddisfatta. Viceversa, nel caso di una spiegazione, se l'interlocutore non comprende le relazioni che sono state stabilite tra gli argomenti, non può comprenderla e anche se dovesse convincersi per altri motivi che in generale sia una buona spiegazione, essa avrà fallito il proprio obiettivo.
Dopo aver distinto la spiegazione dal ragionamento, Duval (1992/1996) mette in evidenza che sia l'argomentazione sia la dimostrazione sono forme di ragionamento, in quanto entrambe hanno l'obiettivo di convincere, producendo un cambio di valore epistemico dell'affermazione da parte dell'interlocutore (probabile, assurdo, convincente etc., nel caso dell'argomentazione) o provocando la presa di coscienza del valore logico dell'enunciato (vero, falso, indecidibile, nel caso della dimostrazione). La dimostrazione mira a sostituire il valore epistemico con il valore logico a causa dell'indiscutibile autorevolezza che in essa possiede il "termine terzo" che giustifica il passaggio dalle premesse alla conclusione. L'indiscutibile autorevolezza del termine terzo deriva dal suo status teorico, in quanto esso è o un assioma, o un teorema o una definizione.
Successivamente, Duval (1992/1996) procede con l'analisi delle differenze tra argomentazione e dimostrazione.
Un'*argomentazione* è un ragionamento che non è soggetto a vincoli di validità o rilevanza; l'argomentazione deve essere *plausibile, convincente*; la sua logica è quella di un tipico discorso "ben strutturato" nel linguaggio naturale; il suo obiettivo è quello di convincere attraverso il cambio del valore epistemico dell'enunciato a favore o contro il quale si sta argomentando.
Una *dimostrazione* è invece un ragionamento *valido*; esso è finalizzato a stabilire il valore logico di un enunciato (vero, falso, indecidibile); la logica della dimostrazione è quella di un sistema logico formale.
Il prototipo della dimostrazione è un ragionamento che ha come schema di base uno schema ternario organizzato secondo l'inferenza del *modus ponens*[53] (Figura 10).

[53] La regola di inferenza del *modus ponens* si può esprimere con la seguente formula: $[(p \to q) \wedge p] \to q]$.

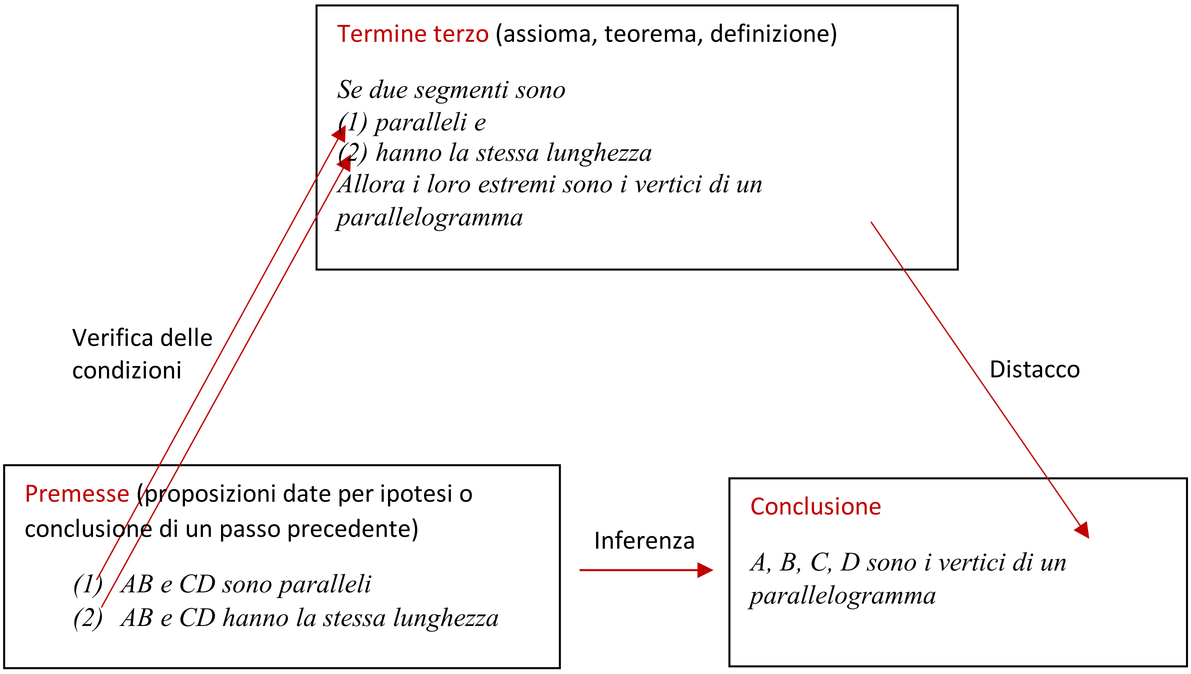



Figura 10. Lo schema ternario deduttivo di base in una dimostrazione secondo Duval (adattato da Duval, 1992/1996, p. 136).

Ogni passo deduttivo è organizzato in accordo con lo status operativo delle proposizioni (premessa, termine terzo, conclusione). Le regole di inferenza sono esplicite e sono regole di una teoria locale. La relazione tra premesse e termine terzo consiste nella verifica del fatto che le premesse soddisfano effettivamente le condizioni del termine terzo. Tale relazione è formale, in quanto si basa in prima istanza sullo status operativo degli enunciati coinvolti, cioè sul fatto che la premessa è un'ipotesi o la conclusione di un teorema precedentemente dimostrato, mentre il termine terzo è un assioma o un teorema o una definizione.
Il passaggio dal termine terzo alla conclusione è caratterizzato da un distacco derivante dall'applicazione della regola del *modus ponens* e può essere percepito come ridondante in un discorso argomentativo nel linguaggio naturale. Per produrre una dimostrazione di solito vengono concatenati più schemi base, in maniera tale che la conclusione del passo precedente venga "riciclata", cioè diventi la premessa in quello successivo. Inoltre, la considerazione dello status teorico delle proposizioni permette anche di connettere tra loro dimostrazioni diverse, formando sistemi più complessi, ottenendo così delle teorie.
L'argomentazione è, come già evidenziato, un ragionamento che non obbedisce a vincoli di validità ma a vincoli di rilevanza; essa mira al convincimento tramite la plausibilità e la forza degli argomenti; la sua logica è quella di un tipico discorso

ben strutturato condotto nel linguaggio naturale. Anche l'argomentazione può essere organizzata in schemi ternari simili a quello esposto,[54] ma in realtà non è la struttura di per sé che permette o impedisce che un'argomentazione possa essere trasformata in una dimostrazione.

Infatti, in questo senso Duval distingue tra *argomentazioni retoriche* e *argomentazioni euristiche* (Duval, 1992/1996). Nelle prime la relazione tra premesse e termine terzo è basata *necessariamente* sul contenuto (è quindi di natura semantica) e non sullo status operativo degli enunciati. Le argomentazioni euristiche si conducono invece di solito in ambito scientifico durante la ricerca di soluzione di problemi. Esse si distinguono da quelle retoriche per il fatto che si svolgono all'interno di una *teoria*, dove gli enunciati hanno uno status teorico, fatto che consente di assegnare loro uno status operativo e permette una eventuale riorganizzazione in accordo con la struttura di una dimostrazione. Nelle argomentazioni euristiche le relazioni semantiche, centrate sul contenuto, possono essere trasformate in relazioni sintattiche; nelle argomentazioni retoriche ciò non è possibile. L'organizzazione classica di un'argomentazione (retorica) è, sottolinea Duval (1992/1996), non quella di uno schema ternario ma quella in cui gli argomenti si raccolgono per accumulazione.

Nell'argomentazione l'espansione discorsiva è assicurata, prosegue l'Autore, da connettivi argomentativi ("ma", "anche se", "perché", "comunque" etc.), mentre nella dimostrazione i connettivi non sono necessari e se sono presenti sono di tipo organizzativo ("quindi", "di conseguenza" etc.). Inoltre, a causa delle relazioni semantiche tra gli elementi del passo argomentativo, non è possibile organizzare tali passi in argomentazioni "definitive" simili alle dimostrazioni, ma solo in discorsi più o meno convincenti.

Sulla base delle caratteristiche evidenziate dei due tipi di ragionamento, argomentazione e dimostrazione, Duval conclude che alla vicinanza discorsiva tra argomentazione e dimostrazione corrisponde una distanza cognitiva, dovuta al fatto che per passare dal funzionamento della prima a quello della seconda è necessario da un lato compiere un decentramento riguardo al contenuto e dall'altro prendere coscienza dell'esistenza di una diversa tipologia di valore epistemico (Duval & Egret, 1993). Questo significa che da un lato è necessario comprendere che le relazioni tra gli enunciati in una dimostrazione si basano su regole di natura sintattica, le quali si riferiscono allo status teorico degli enunciati, e dall'altro è necessario comprendere che esistono due diverse tipologie di "valore epistemico" degli enunciati: uno che si basa su considerazioni di plausibilità, l'altro invece sulla necessità dei valori di verità in logica.

---

[54] Un esempio in tale senso potrebbe essere lo schema argomentativo di base del modello di Toulmin (1958), il quale si compone di tre elementi: *i dati* (le informazioni che si possiedono), *la conclusione* che si trae e *il warrant* (dal quale viene tratta la garanzia per la validità della conclusione). Duval non fa però riferimento al modello di Toulmin. Egli mette solo in evidenza la differenza tra argomentazioni euristiche e argomentazioni retoriche.

Questa constatazione porta Duval alla conclusione che l'argomentazione si presenta come un ostacolo all'apprendimento della dimostrazione piuttosto che come propedeutica a essa. In altre parole: è necessario che lo studente prenda coscienza delle differenze strutturali ed epistemiche tra argomentazione e dimostrazione, altrimenti egli corre il rischio di confonderle e di non comprendere in che cosa la dimostrazione in matematica sia diversa dall'argomentazione nella vita quotidiana; questo non toglie nulla all'importanza formativa dell'argomentazione, ma evidenzia un ostacolo da superare per prendere consapevolezza della natura della dimostrazione. Questa posizione è nota in bibliografia come una posizione che sostiene la presenza di una *discontinuità* tra argomentazione e dimostrazione.

Se confrontiamo le due analisi terminologiche fatte da Balacheff (1987, 1988) e Duval (1991, 1992/1996), possiamo notare che esse sono simili nella scelta dei termini da definire ma che sono anche diverse per almeno due motivi.

In prima linea, Balacheff basa la classificazione dei termini che servono per caratterizzare le produzioni discorsive durante le attività di soluzione di problemi in lavori di gruppo su categorie derivanti dalla filosofia della matematica, più precisamente dal quasi-empirismo di Lakatos (1979/1976), in cui è fondamentale la dimensione sociale delle pratiche di validazione. La posizione quasi-empirista è una posizione fallibilista riguardo alle verità matematiche, la quale sposta l'attenzione sul ruolo del processo sociale di *validazione*. Notiamo anche che Balacheff colloca la propria ricerca nell'ambito del *problem solving*, in accordo con il quasi-empirismo, e non nell'ambito di una didattica specifica della dimostrazione. L'Autore nota che vi è una rottura cognitiva quando lo studente si trova per la prima volta di fronte a una richiesta di produrre dimostrazioni in matematica, ma non attribuisce un ruolo particolare in questa problematica all'argomentazione o ad altre produzioni discorsive. La dimostrazione non ha in questo contesto ancora una conformazione prettamente didattica; si tratta di un tentativo di trasposizione dell'oggetto matematico dimostrazione, di cui non esistono "forme didattiche" specifiche, ma solo una tipologia di prova (la prova pragmatica) che deve essere caratterizzata al fine di comprendere come sia possibile superarla, facendo giungere lo studente alla "vera" dimostrazione matematica (la prova intellettuale). Balacheff non individua quindi alcuna produzione discorsiva che possa essere considerata come propedeutica alla, o come antagonista della, dimostrazione.

D'altra parte, Duval basa la propria classificazione su aspetti che hanno le loro radici nella psicologia cognitiva. In essa la dimensione sociale non è indispensabile, in quanto il dialogo tra gli interlocutori che viene supposto comunque esserci nel caso sia della spiegazione sia del ragionamento, può avere luogo anche tra il sé e sé di un singolo soggetto. Duval introduce l'argomentazione come controparte della dimostrazione, mettendo in evidenza le differenze strutturali ed epistemiche delle due produzioni discorsive. A differenza della classificazione di Balacheff, quella di Duval evidenzia chiaramente un approccio

cognitivo specifico dell'apprendimento, con risultati che non hanno una controparte in matematica o in filosofia della matematica, dato che tali discipline non si occupano degli aspetti più prettamente cognitivi.
Come già accennato all'inizio del presente paragrafo, la relazione tra argomentazione e dimostrazione ha una storia molto lunga in didattica della matematica. Infatti, a partire dalla seconda metà degli anni '90 del XX secolo alcuni ricercatori (si veda a tale proposito Boero, Garuti, & Mariotti, 1996; Garuti, Boero, Lemut, & Mariotti, 1996; Garuti, Boero, & Lemut, 1998; Pedemonte, 2007, 2008; Boero, 2017) misero in luce il ruolo che ha la produzione di congetture nell'ambito di attività di *problem solving* per la costituzione di un'unità cognitiva tra congettura e teorema, facendo risalire tale unità cognitiva a una relazione di continuità tra argomentazione e dimostrazione. Infatti, le ricerche citate hanno mostrato che se gli studenti vengono indotti a formulare delle congetture durante una fase esplorativa e di argomentare a favore di esse, questo facilita il passaggio verso una prova più formale che veniva giudicata come una dimostrazione accettabile da parte del docente o del ricercatore.
Negli articoli citati veniva dunque messa in evidenza la necessità di una radicale riconsiderazione della didattica della dimostrazione, la quale doveva basarsi non sulla riproduzione di dimostrazioni ma sulla loro costruzione *ad hoc*, a partire dalla formulazione della congettura. In questa chiave di lettura la produzione discorsiva che accompagna la fase della formulazione e valutazione della plausibilità della congettura viene identificata con l'argomentazione e diventa dunque in un certo senso propedeutica alla dimostrazione.
Per le analisi delle produzioni discorsive argomentative si ricorre di solito al modello di Toulmin, al quale abbiamo fatto già cenno in precedenza e il cui passo base consiste in uno schema ternario costituito dai *dati* (Data) che si hanno a disposizione e dalla *conclusione* (Claim) che da essi si trae sulla base della *giustificazione* (Warrant) che garantisce la plausibilità dell'implicazione (Figura 11).

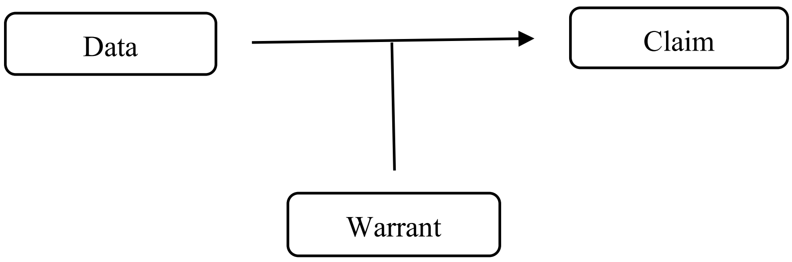



Figura 11. Schema base del modello argomentativo di Toulmin.

Ciò che costituisce particolare interesse per la nostra trattazione non sono tuttavia le ricerche successive in questa direzione, ma il fatto che la prospettiva prodotta da quella che potremmo chiamare "la corrente che sostiene una *continuità* tra argomentazione e dimostrazione" rende l'argomentazione parte integrante della dimostrazione come oggetto specifico della didattica della matematica. Infatti, in tale prospettiva la dimostrazione come oggetto didattico non è separabile dall'argomentazione che l'ha prodotta. La coppia argomentazione-dimostrazione diventa esplicitamente oggetto di studio unico in didattica della matematica, dunque ciò che viene studiato non è più solo la relazione tra le due, al fine di distinguere l'una dall'altra nella descrizione e interpretazione delle produzioni discorsive degli studenti, ma un'entità formata da entrambe che rappresenta un genere di dimostrazione che trae le sue caratteristiche dal contesto specifico della didattica della matematica.
La discontinuità tra argomentazione e dimostrazione scompare all'apparenza se si fornisce una definizione di dimostrazione come un caso specifico di argomentazione, cioè se l'argomentazione è intesa come: "any written or oral discourse conducted according to shared rules, and aiming at a mutually acceptable conclusion about a statement, the content or the truth of which is under debate. It thus includes proof as a special case" (Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp, & Tanguay, 2012a, p. 348).
La definizione di argomentazione che vede come suo caso particolare la dimostrazione è a nostro avviso un caso emblematico di complesso concettuale che mostra la reificazione della dimostrazione come oggetto matematico specifico della didattica della matematica. Anche se nella definizione non vi è alcun richiamo a una dimensione didattica delle due produzioni discorsive, si tratta di una definizione che nasce da considerazioni esclusivamente di natura didattica. In questo senso, in essa la dimostrazione è un oggetto matematico specifico della didattica della matematica. Infatti, è solo a partire da esigenze didattiche che nasce la necessità di studiare il passaggio alla dimostrazione a partire da un'altra produzione discorsiva, l'argomentazione. La relazione reciproca tra queste due produzioni discorsive non è infatti di particolare interesse in matematica, dato che il matematico di solito non ha dubbi su che cosa sia una dimostrazione valida nel proprio settore di ricerca; infatti, una tale consapevolezza è di per sé condizione necessaria per poter far parte della comunità scientifica dei matematici. Dunque, il problema della sua distinzione dall'argomentazione o del passaggio da una all'altra non si pone se non da un punto di vista cognitivo.[55]

[55] Con quanto qui esposto non intendiamo affermare che il matematico professionista non argomenti prima di dimostrare; significa solo che questo aspetto della sua attività professionale non è d'interesse per la caratterizzazione della dimostrazione in matematica e non è oggetto di studio né della matematica né dell'epistemologia, né della filosofia della matematica. Infatti, anche nel quasi-empirismo di Lakatos (1979/1976), dove si fornisce una descrizione dei passaggi che compie il matematico durante la produzione di una dimostrazione, non vi un interesse per la tipologia di produzione discorsiva che si può associare a una fase o all'altra di tale percorso, in quanto è dato per scontato che il matematico *sappia* che cosa sia una dimostrazione e non debba

Prima di chiudere il paragrafo, evidenziamo in che senso l'esempio fornito soddisfa i criteri da noi evidenziati in precedenza per gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica.
In primo luogo possiamo notare che le ricerche riguardo alla dimostrazione in una prospettiva didattica nascono con l'obiettivo di poter inquadrare e descrivere le produzioni discorsive degli studenti occupati in attività dimostrative in matematica; questa può essere vista a nostro avviso come una fase *strumentale* delle ricerche, in cui la distinzione tra le diverse tipologie di produzioni discorsive (spiegazione, argomentazione, dimostrazione) sono effettuate per interpretare le risposte degli studenti alle richieste di produrre o riprodurre delle dimostrazioni. Questo avviene sia in Balacheff (1987, 1988), sia nei primi testi nei quali l'argomentazione è usata per caratterizzare una possibile continuità cognitiva tra argomentazione e dimostrazione, come quelli già citati in precedenza (Boero, Garuti, & Mariotti, 1996; Garuti, Boero, Lemut, & Mariotti, 1996; Garuti, Boero, & Lemut, 1998), ma anche in Duval (1991, 1992/1996) seppure, per così dire, "in negativo", dato che l'Autore si serve del confronto tra argomentazione e dimostrazione per inquadrare le caratteristiche specifiche della dimostrazione dal punto di vista cognitivo.
In ogni caso, le due produzioni discorsive sono viste in tali lavori come in interazione tra loro, sia che una sia vista come un ostacolo cognitivo da superare per apprendere l'altra, sia che una sia vista come propedeutica all'altra. In entrambi i casi la dimostrazione è vista dunque come didatticamente strettamente collegata all'argomentazione, il che fa sì che le due produzioni discorsive formano un unico oggetto di studio nell'ambito dell'approccio alla dimostrazione.[56]
La definizione fornita da Durrand-Guerrier, Boero, Douek, Epp e Tanguay (2012a) può essere considerata come una reificazione dell'aspetto strutturale della dimostrazione come oggetto didattico tramite la costituzione di un complesso concettuale tra argomentazione e dimostrazione. In esso i due poli, argomentazione e dimostrazione, stanno in una relazione di inclusione semantica. La dimostrazione è definita come un caso particolare dell'argomentazione (Figura 12).

prima apprenderlo. Invece è proprio la problematica cognitiva che ha fatto nascere il dibattito sulla continuità o discontinuità tra argomentazione e dimostrazione, dal quale è sorta anche la definizione di argomentazione e dimostrazione fornita da Durand-Guerrier Boero, Douek, Epp e Tanguay (2012a) da noi citata.

[56] Evidenziamo che l'analisi qui proposta non ha pretese di esclusività, in quanto esistono approcci alla dimostrazione in didattica della matematica che non fanno riferimento all'argomentazione (p.e. Stylianides, 2008), ma questo non contraddice l'esistenza di un oggetto matematico specifico della didattica della matematica in cui la dimostrazione è strettamente legata all'argomentazione.

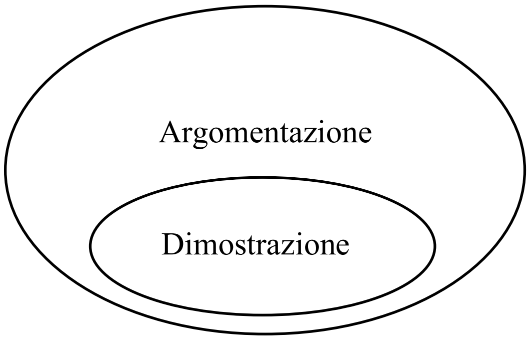



Figura 12. Rappresentazione del complesso semantico che caratterizza l'oggetto matematico "dimostrazione" specifico della didattica della matematica in una prospettiva di "continuità" tra argomentazione e dimostrazione.

Possiamo notare che in questo caso non vi è un nome particolare per l'oggetto matematico dimostrazione specifico della didattica della matematica. Vi è però una definizione che mette chiaramente in evidenza le relazioni tra gli elementi del complesso concettuale che lo caratterizza.
Dunque, se da un lato l'ipotesi di una continuità, o quanto meno compatibilità cognitiva, tra argomentazione e dimostrazione conduce a una vera e propria reificazione di un oggetto matematico dimostrazione specifico della didattica della matematica, d'altro lato nella contrapposizione evidenziata da Duval tra argomentazione e dimostrazione l'indagine si arricchisce di ulteriori elementi che servono per chiarire le differenze al fine di poter riconoscere eventuali ostacoli e misconcezioni e si consolida in quello che Duval chiama "il funzionamento del ragionamento deduttivo" (Duval, 2007). In questo caso si ha dunque un altro oggetto matematico "dimostrazione" specifico della didattica della matematica, nel quale i due poli nel complesso concettuale sono gli stessi, ma la relazione semantica è di complementarietà e non di inclusione (Figura 13). Il fatto che l'argomentazione possa anche in questo caso essere considerata come parte integrante della dimostrazione, anche se contrapposta a essa, è dovuto al fatto che le caratteristiche della dimostrazione diventano davvero evidenti solo nel suo confronto con l'argomentazione.

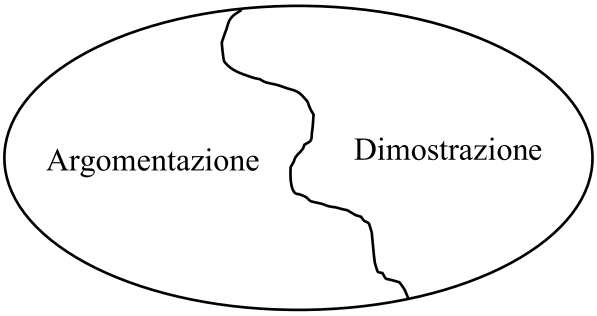



Figura 13. Rappresentazione del complesso semantico che caratterizza l'oggetto matematico "dimostrazione" specifico della didattica della matematica in una prospettiva di "discontinuità" tra argomentazione e dimostrazione.

Un aspetto sul quale non ci siamo soffermati nel presente paragrafo, me che è strettamente collegato all'argomento trattato in esso, è quello relativo alla logica collegata alla dimostrazione in didattica della matematica. Nel prossimo paragrafo ci occuperemo di questo aspetto.

### 6. 2. 6. La logica della dimostrazione in didattica della matematica

Secondo la definizione fornita da Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp e Tanguay, riportata anche nell'*Encyclopedy of Mathematics Education*, la logica è: "the discipline that deals with both the semantic and syntactic aspects of the organization of mathematical discourse with the aim of deducing results that follow necessarily from a set of premises" (Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp, & Tanguay, 2012b, p. 370).

Il fatto che la definizione metta in evidenza che la logica coinvolge sia gli aspetti sintattici sia quelli semantici è indotto dal contesto specifico in cui tale definizione nasce: mentre in un sistema logico-formale in logica matematica è "naturale" che entrambe le componenti abbiano un ruolo, questo non è infatti scontato in didattica della matematica.

Come sottolinea Durand-Guerrier, il ruolo della logica nella formazione matematica sembra non avere più un fondamento se si considera solo l'aspetto sintattico, dato che le ricerche sul ragionamento in psicologia hanno mostrato che la logica formale non influisce sul ragionamento umano (Durand-Guerrier,

2014).[57] Mettere in evidenza il fatto che la logica si occupa *anche* degli aspetti semantici del ragionamento diventa dunque particolarmente importante dal punto di vista didattico mentre non ha ragione d'essere in logica matematica.
Durand-Guerrier (2014) distingue tra due diversi compiti che la logica svolge nell'ambito della didattica della matematica: (1) quello di strumento di studio della struttura e della formalizzazione del linguaggio matematico, con un importante compito di disambiguazione nei confronti del linguaggio naturale; (2) quello di strumento nell'ambito dell'argomentazione, della dimostrazione e del ragionamento in generale.
Nel secondo caso è fondamentale, secondo Durand-Guerrier, la considerazione della definizione semantica di verità per i linguaggi formalizzati fornita da Tarsky, sulla base della quale in Durand-Guerrier (2008) si mette in evidenza l'importanza della dualità semantico-sintattica, cioè della dualità verità vs. validità non solo in logica, ma anche in didattica della matematica, con la messa in rilievo dell'importanza del saper distinguere inferenze valide da inferenze non valide. In questo senso, sottolinea Durand-Guerrier (2014), ha un ruolo di rilievo la deduzione naturale (Durand-Guerrier, 2005), ma in contesto dialogico di validazione di congetture si sono dimostrate utili anche logiche di tipo dialogico, basate su aspetti semantici e pragmatici derivanti dalla teoria semantica dei giochi di (Barrier, 2011; Hintikka & Sandu, 1997, citato in Durrand-Guerrier, 2014; inoltre, in riferimento al ricorso alla *logic of inquiry* e alla teoria semantica dei giochi nella progettazione di software e attività didattiche in un'ottica dialogica si veda per esempio Arzarello & Soldano, 2019).
Quanto finora esposto consente di notare come la ricerca in didattica della matematica abbia prodotto conoscenza logica specifica in didattica della matematica, e che tale specificità è dettata dalle esigenze interne alla disciplina, legate ad aspetti cognitivi, epistemici e didattici piuttosto che ad aspetti puramente

[57] Qui l'Autrice fa riferimento soprattutto al ben noto *compito di selezione di Wason*, in cui si hanno quattro carte delle quali è noto che su una facciata riportano un numero pari o dispari e sull'altra un colore. La situazione di partenza è data da quattro carte messe in fila; due di esse sono voltate con la facciata che riporta il numero verso l'alto (i due numeri che sono mostrati sono uno pari e l'altro dispari, per esempio la prima 8 e la seconda 3) e le altre due che sono voltati con la facciata del colore verso l'alto (i loro colori sono diversi: una è rossa, l'altra è marrone). Il compito consiste nell'individuare la carta, o le carte, che è necessario voltare per verificare la validità della proposizione "Se una carta riporta un numero pari su una faccia allora la sua faccia opposta è rossa". La risposta corretta si basa sulla corretta applicazione di due regole di inferenza fondamentali della logica classica: il *modus ponens* e il *modus tollens*, le quali si basano sull'interpretazione dell'implicazione "se… allora…" in termini di implicazione materiale della logica classica: l'implicazione materiale è vera per qualsiasi valore di verità dell'antecedente e del conseguente, tranne nel caso in cui l'antecedente è vero e il conseguente falso. L'esperimento originale, condotto nel 1966 da Peter Wason, mostrò che meno del 10% dei soggetti coinvolti applica correttamente le regole di inferenza, fornendo la risposta corretta: si devono voltare due carte, quella che riporta il numero pari e quella che riporta il colore marrone. La ricerca è considerata come una conferma del fatto che l'implicazione materiale della logica classica non viene usata nel contesto del ragionamento informale.

epistemologici della logica matematica. Anche se non si può parlare di un'elaborazione di una logica cognitiva specifica, creata in didattica della matematica, si può parlare di applicazioni specifiche della logica nella disciplina didattica della matematica.

Anche la continuità o discontinuità tra argomentazione e dimostrazione discussa nel paragrafo precedente ha prodotto ricerche logiche specifiche. Barrier, Mathé e Durand-Guerrier (2009) mostrano per esempio che se si considera come riferimento non la logica proposizionale ma la logica dei predicati del primo ordine, cioè se si introduce la possibilità di quantificazione sulle variabili, la distanza tra la logica soggiacente alle due produzioni discorsive dimostrazione e argomentazione diminuisce, anche perché la quantificazione facilità la percezione dell'insieme a cui appartengono le costanti del linguaggio come un insieme di oggetti matematici manipolabili; sul ruolo dei quantificatori nell'analisi delle produzioni discorsive in ambito argomentativo e dimostrativo si vedano anche Durand-Guerrier e Arsac (2003) e Blossier, Barrier e Durand-Guerrier (2009).

D'altro canto, il ruolo della deduzione naturale in questo contesto è evidenziata da Ferrari (2010); l'Autore mostra come lo schema ternario del modello duvaliano, che si basa sulla regola del *modus ponens*, non può essere considerato come uno schema universalmente valido, dato che nella deduzione naturale, la quale rispecchia più fedelmente la pratica matematica, è usuale applicare regole di introduzione ed eliminazione di connettivi e quantificatori che non alterano il valore di verità degli enunciati così ottenuti, ma che non sono riconducibili allo schema base del *modus ponens*.[58]

Nonostante tutti gli approcci finora esaminati siano approcci della logica specifici della didattica della matematica, possiamo notare che essi sono riconducibili a quella che viene di solito considerata la "logica classica", tramite la quale si formalizza la matematica, cioè la logica dei predicati del primo ordine. Infatti, anche la logica della teoria semantica dei giochi di Hintikka, che potrebbe sembrare alternativa a quella classica, risulta in realtà equivalente a essa nell'ambito della definizione di verità semantica per i linguaggi formali alla Tarski (Arzarello & Soldano, 2019). Quindi, in tutto ciò il quadro logico comune rimane comunque la logica classica intesa come calcolo delle proposizioni o, al più, come calcolo dei predicati del primo ordine.

La problematica relativa alla dimostrazione come oggetto matematico specifico della didattica della matematica coinvolge non solo la questione relativa alla logica alla quale si dovrebbero conformare in ultima istanza le produzioni discorsive in matematica, ma anche la problematica legata alla logica che si suppone stia alla base delle produzioni discorsive degli studenti e che *non è necessariamente riconducibile a quella classica*.

In questo senso ci sembra emblematico lo studio proposto in D'Amore (2005c), in cui l'Autore mette in evidenza come le produzioni discorsive degli studenti di 15-

[58] Sul ricorso alla deduzione naturale nell'approccio logico in didattica della matematica si veda anche Durand-Guerrier e Arsac (2005).

16 anni che vengono confrontati con richieste di produzione di dimostrazioni di enunciati in geometria euclidea sono spesso compatibili con un ragionamento che non si basa sulla logica aristotelica, ma che sembra più vicino a un tipo di logica pragmatica, la *nyaya*,[59] elaborata in seno all'omonima scuola filosofica indiana attiva durante il I secolo d. C.
D'Amore scrive a tale proposito:

> Over a long period of time, I have been observing students involved in demonstrating theorems. The demonstrations were intended to be individual activity, but were carried out within a classroom setting and were therefore able to be considered as social activity. I noticed that, although there were many typologies of more or less spontaneous behaviour presented to satisfy the teacher's request (i.e., a pattern more or less bound to Aristotelian or Megarian-Stoic logic), some students' demonstrative modality could have been thought about in a different way from the one expected by the teacher. This modality brought clearly to mind quite a different kind of logic, highlighting certain factors such as the use of examples or the preliminary enunciation of the thesis. (D'Amore, 2005c, p. 26)

La *nyaya* è strettamente legata alla concezione etica e religiosa dell'omonima corrente filosofica; tuttavia, essa ha prodotto una vera e propria struttura logica di quello che veniva considerato "il retto ragionare"; quindi rappresenta un vero e proprio trattato di logica. Esponiamo brevemente questo modello argomentativo, mettendo in evidenza i suoi strumenti e il suo schema di ragionamento, come esso viene descritto in D'Amore (2005c).
Nella *nyaya* sono riconosciuti i seguenti quattro "mezzi di conoscenza": la testimonianza, l'analogia, la percezione e l'inferenza.
La testimonianza comprende tutto ciò che è considerato degno di fede, come per esempio la rivelazione divina, la storia tramandata etc. L'analogia è un modo di ragionare che consente di definire un oggetto in base alla sua somiglianza con altri. Nella logica aristotelica l'analogia corrisponde alla definizione per genere prossimo e differenza specifica oppure alle definizioni tramite il passaggio al quoziente. La percezione è la relazione tra l'oggetto (sensibile) e l'immagine che si ha di esso.
Dato che la *nyaya* ha un'impronta pratica ed empirista, essa attribuisce molta importanza alla percezione. Si deve però tenere presente che per questa dottrina anche l'intelletto rappresenta un senso ed è dunque un mezzo di percezione.
L'inferenza è infine ciò che può essere considerato "il sillogismo" *nyaya* ed ha la seguente struttura: (1) l'asserzione (non dimostrata); è l'enunciazione di ciò che si vuole dimostrare; (2) la ragione; (3) la proposizione generale o enunciato, seguita da un esempio; (4) l'applicazione, detta anche seconda asserzione; (5) la conclusione (D'Amore, 2005c, pp. 26–27).
Non ci soffermiamo sui protocolli delle interviste esaminate dall'Autore, per i quali rimandiamo a D'Amore (2005c).

[59] "Nyaya" significa letteralmente *logica*.

Ciò che è particolarmente interessante per noi è la seguente conclusione che l'Autore trae dall'indagine:

> This investigation shows (…) that the adherence to Aristotelian logic as a model for natural proof cannot be taken for granted and anyway is not unique. My purpose here is in no way to substitute one logical model for another – I want to open the analysis of learning how to prove to other possible schemes. (…) Instead of establishing a specific logical method as a model for human thinking, it is preferable to analyse socio-cultural activities and observe how thinking takes shape as a reflection of what individuals do during such activities. (D'Amore, 2005c, p. 31)

Infatti, D'Amore mostra che, anche se il ragionamento seguito dagli studenti negli esempi riportati può essere formalizzato nella logica dei predicati del primo ordine, lo schema che essi seguono, più o meno fedelmente, non corrisponde allo schema deduttivo della logica aristotelica, nella quale esso appare incoerente, per esempio anche a causa del ricorso sistematico a esempi, mentre appare coerente in riferimento a un sistema logico pragmatico come quello *nyaya*.
Ciò che diventa evidente è quindi che:

> Any didactic analysis presupposes, in one way or another, a frame of reference: it is possible to use several logical frames to account for the students' deductive behaviour. Each interpretation of deduction presupposes a logical frame of reference, and deviant behaviour is judged only relative to the particular frame of reference considered. (D'Amore, 2005c, p. 26)

Riteniamo che in questo caso siamo di fronte a una manifestazione di un esempio di un potenziale oggetto matematico "dimostrazione" specifico della didattica della matematica dal punto di vista logico. La dimostrazione è qui studiata in un contesto di una logica specifica della didattica della matematica, nel quale essa si conforma come un'argomentazione che segue regole molto diverse da quelle della logica aristotelica classica. Questo mette in discussione anche il fatto, finora dato per scontato, che la logica soggiacente alle produzioni discorsive degli studenti sia unica e che i ragionamenti che non vi si conformano siano incoerenti, anche perché non è chiaro su quali basi si possano giudicare tali.
Possiamo affermare che le ricerche citate in precedenza in riferimento alla logica in didattica della matematica appartengano a una fase *strumentale*, in cui la logica (classica o comunque una logica a essa riconducibile) viene usata per descrivere e analizzare le produzioni argomentative degli studenti o per individuare quali elementi della logica formale dovrebbero essere introdotti e studiati durante il percorso scolastico.
L'ultima ricerca citata, invece, ha la caratteristica di mettere in evidenza un oggetto dimostrazione specifico della didattica della matematica che non ha una controparte in logica matematica. Ciononostante si tratta di un oggetto matematico, in quanto oggetto di studio in didattica della matematica.
In generale non ci sembra possibile affermare che in didattica della matematica si possa parlare di una reificazione di un *metaoggetto* matematico "logica" specifico

della didattica della matematica, anche se in essa si producono applicazioni specifiche della logica classica e la definizione da noi citata all'inizio del paragrafo è già, come messo in evidenza, una definizione specifica della didattica della matematica. Tuttavia possiamo affermare che l'ultimo articolo citato (D'Amore, 2005c) è un esempio di una condensazione di un metaoggetto "logica" specifico della didattica della matematica. Affinché esso possa essere considerato come un complesso concettuale sarebbe necessario chiarire le relazioni semantiche che intercorrono tra la *nyaya* e la logica classica, studiando la possibilità di passare da una all'altra. Questo equivale, a nostro avviso, allo studiare le condizioni di transito tra una logica "argomentativa" e una logica "dimostrativa". Per caratterizzare un metaoggetto "logica" specifico della didattica della matematica è necessario, a nostro avviso, "uscire" dalla logica classica ed esaminare le condizioni per un "rientro" in essa. Nonostante non sia possibile determinare bene la relazione semantica tra gli elementi del complesso concettuale che potrebbe caratterizzare un metaoggetto come quello appena descritto, è possibile individuare i suoi due poli: la logica classica e una logica argomentativa caratterizzata da leggi meno restrittive, che per ora non sappiamo caratterizzare, ma che potrebbe avere tratti comuni con la *nyaya*, ed ipotizzare una relazione di parziale sovrapposizione semantica tra essi (Figura 14).

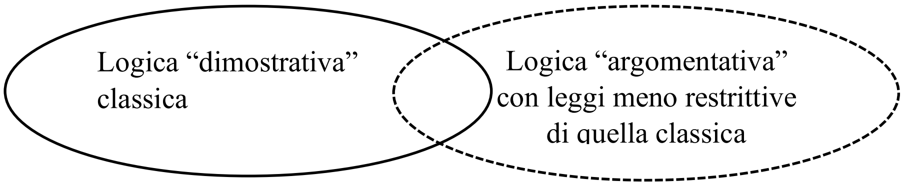



Figura 14. Rappresentazione di un ipotetico complesso semantico che potrebbe caratterizzare un metaoggetto "logica" specifico della didattica della matematica.

## 6. 3. Analisi

In questo capitolo abbiamo mostrato alcuni esempi di oggetti matematici specifici della didattica della matematica, fornendo così anche una prova "pragmatica" della loro esistenza.
Nel fare ciò abbiamo trasposto la metodologia di ricerca implicitamente usata da Sfard (1991) per mettere in evidenza la doppia natura, operazionale e strutturale, delle nozioni matematiche. Tale trasposizione ha richiesto una ricontestualizzazione degli stessi concetti "operazionale" e "strutturale" in didattica della matematica. Abbiamo dunque evidenziato che il termine

"operazionale" può essere inteso come "strumentale", cioè riferito alla descrizione o interpretazione delle produzioni scritte o orali degli studenti o dei docenti, mentre il termine "strutturale" può essere interpretato come "relazionale", cioè riferito alla costituzione di complessi concettuali formati da due o più componenti legate da relazioni semantiche. È dunque la presenza esplicita di tali complessi concettuali che può essere intesa come indice di una condensazione di oggetti matematici specifici della didattica della matematica, mentre le loro rappresentazioni compatte (in tabelle, schemi etc.) e la nominalizzazione o definizione possono essere considerate come indici di un'avvenuta reificazione.
Il fatto che si possa individuare un complesso concettuale di questo genere e la conclusione di un'avvenuta oggettivazione di un oggetto matematico specifico della didattica della matematica non significa però che la natura strumentale delle nozioni in questione scompaia e venga sostituita da quella relazionale. Infatti, in analogia con quanto mostrato da Sfard (1991), tali nozioni hanno una doppia natura, cioè: una volta avvenuta la reificazione, l'aspetto strumentale e quello relazionale coesistono e si presentano come complementari. In questo senso si continuerà a fare ricorso alla natura strumentale delle nozioni matematiche specifiche della didattica della matematica nei contesti in cui si descrivono o interpretano le attività d'aula, ma dall'altra parte ci si potrà riferire alla loro natura relazionale nel momento in cui essi verranno studiati come oggetti a sé stanti, inserendoli in reti concettuali più ampie.
Gli esempi che abbiamo riportato mostrano che anche in didattica della matematica, così come in matematica, nel corso della sua evoluzione storico-epistemologica, accanto a singoli oggetti matematici specifici della didattica della matematica (lo zero, la funzione, la dimostrazione), sono presenti anche esempi di reti più ampie di oggetti che possono essere considerate delle teorie (la teoria didattica dell'aritmetica) e in cui è possibile contestualizzare tali oggetti (la divisione nella teoria didattica dell'aritmetica), ma anche dei veri e propri metaoggetti (la logica "didattica").
Abbiamo però anche notato che ci sono delle nozioni che non formano dei complessi concettuali, come per esempio lo zero come cifra all'interno della teoria didattica dell'aritmetica, che non può essere considerato come complesso concettuale, se non "uscendo" da quella teoria, nella quale non è possibile considerare le componenti zero-come-cardinale e zero-come-ordinale e costituire così un complesso concettuale. In questo senso, lo zero come cifra è una concezione, ma non può essere inteso come un oggetto matematico specifico della didattica della matematica, in quanto un tale tipo di oggetto deve essere per così dire "molecolare", cioè mettere in evidenza delle relazioni, e non di tipo "atomico", cioè costituito da un solo elemento. Questo non significa naturalmente che una concezione "atomica" in un dato contesto non possa essere trasformata in una relazione "molecolare", ma a tale scopo sarebbe necessario individuare ed esplicitare delle relazioni interne alla concezione (per esempio all'interno della

concezione zero come cifra), nel caso in cui ciò fosse ritenuto utile per una migliore comprensione dell'insegnamento-apprendimento.
Quanto fin qui esposto ci induce ad affermare che in didattica della matematica come disciplina, in riferimento ai contenuti matematici, non sembra opportuno considerare teorie "assiomatiche" chiuse in sé stesse, ma piuttosto reti teoriche che crescono e si ampliano attraverso la costituzione di relazioni semantiche, in una modalità simile a quanto avviene nelle reti neuronali, dove sono le relazioni stabilite tra i neuroni ad ampliare la rete.
Essendo le relazioni nelle teorie didattiche di natura semantica, esse necessitano di un'interpretazione; tali relazioni non possono quindi avere pretese di *unicità*. Tuttavia, come anche nelle reti neuronali, le relazioni tra i neuroni possono essere stabilite solo perché nel sistema "cervello" la possibilità di connessione è prevista *potenzialmente* (se non vi fossero gli assoni, le sinapsi e i dendriti, gli impulsi elettrici tra i neuroni non potrebbero venire trasmessi); così anche le reti teoriche in didattica della matematica possono essere stabilite solo se si dà per scontata la possibilità che sia possibile creare relazioni di un qualche genere.
Negli esempi che abbiamo mostrato in questo capitolo, tali relazioni sono classificate in alcune categorie: relazioni semantiche di inclusione, complementarietà o parziale sovrapposizione, ma tale elenco può essere esteso all'occorrenza aggiungendo opportune relazioni di altro genere.
Quanto appena esposto ci porta a riconoscere che in realtà sono le relazioni a determinare in generale la costituzione dei complessi concettuali e non gli elementi che vengono messi in relazione. Nel senso che è in prima linea la presenza di una relazione semantica di un certo tipo tra due o più elementi a far sì che si possa parlare di complesso concettuale e quindi di oggetto matematico specifico della didattica della matematica, e non gli elementi che essa congiunge. Questi ultimi sono determinanti per individuare *uno specifico* complesso concettuale e quindi un particolare oggetto matematico specifico della didattica della matematica ma non sono determinanti per una *definizione* di tali oggetti.
In questo senso sottolineiamo che le rappresentazioni dei complessi concettuali fornite nel presente capitolo attraverso il ricorso ai diagrammi nelle figure 5-9, 12, 13, 14, non tengono conto in maniera appropriata della loro caratteristica come entità determinate prima di tutto dalle relazioni semantiche che le costituiscono. Tali diagrammi sono quindi da considerarsi solo come delle rappresentazioni schematiche degli elementi coinvolti, tenendo però conto che non rappresentano la loro vera dimensione relazionale.
Notiamo inoltre che questo aspetto è emerso solo nel momento in cui abbiamo riflettuto sugli oggetti matematici specifici della didattica della matematica in sé e sul modo in cui essi si possono collegare in reti più ampie, mentre rimaneva celato nel momento in cui abbiamo discusso i singoli esempi.

## 6. 4. Sintesi

Dal punto di vista euristico, attraverso gli esempi riportati nel presente capitolo, siamo giunti alla conclusione che una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica deve tenere conto del fatto che per la costituzione dei complessi concettuali sono fondanti le relazioni, dato che tali complessi si costituiscono partendo da una relazione semantica di un qualche genere che, dal punto di vista strutturale, è primaria rispetto ai poli che essa collega.
Dunque, da un lato la definizione che stiamo cercando deve tenere conto dei criteri individuati per via teorica nel capitolo 5; dall'altro lato essa deve essere in grado di accogliere i casi particolari di oggetti matematici specifici della didattica della matematica come quelli esemplificati nel presente capitolo, tenendo conto di questa loro caratteristica relazionale, emersa dalla metariflessione sugli esempi qui riportati.
Ai criteri (1)-(4) evidenziati nel capitolo 5 si aggiunge quindi un ulteriore criterio, emerso dall'indagine svolta in questo capitolo. In questo senso la definizione cercata deve:

*(5) essere in grado di inquadrare tecnicamente la modalità relazionale con la quale si formano i complessi concettuali che costituiscono gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica.*

Dato che la didattica della matematica si occupa dell'apprendimento della matematica, in essa sembra più naturale parlare di *concetti* piuttosto che di *oggetti* e quindi sorge spontanea l'idea che quelli che noi abbiamo chiamato *complessi concettuali* non possano essere inquadrati in maniera opportuna in termini di concetti o concezioni di oggetti matematici.

# 7. Concetti

## 7. 1. Riflessioni preliminari

Come si evince dalla letteratura di riferimento, gli studi sui concetti sono stati e continuano a essere centrali in molte ricerche in didattica della matematica. A tale proposito citiamo per esempio Confrey, 1981, Tall e Vinner, 1981; Vergnaud, 1990; Sfard, 1991, Gray e Tall, 1994; Balacheff, 1995; D'Amore, 2000; 2001a, b; Tall, 2013; Scheiner, 2016; Simon, 2017. L'importanza che rivestono le ricerche in questo ambito nel panorama della disciplina non sorprende se si tiene presente che in generale, seppure con diverse sfumature, il concetto è visto come l'anello di congiunzione tra l'esperienza e la conoscenza dello studente. Questo fa comprendere anche perché in didattica della matematica si tenda a parlare più di frequente di concetti che non di oggetti e che quindi la ricerca di una definizione di oggetto matematico della didattica della matematica debba passare necessariamente da una discussione relativa alla concettualizzazione.

## 7. 2. Questioni metodologiche

Lo scopo del presente capitolo è duplice: da un lato intendiamo fornire un'analisi di alcuni dei più importanti approcci ai concetti sia dal punto di vista filosofico sia dal punto di vista della didattica della matematica; dall'altro intendiamo esaminare le caratteristiche di tali approcci al fine di verificare se e in quale misura sono adatti ad accogliere dal punto di vista teorico i criteri di una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica finora evidenziati.
Inoltre, proporremo una approfondita trattazione dell'approccio di Frege (1892a, b) ai concetti, la quale ci servirà per esaminare in dettaglio uno degli approcci ai concetti in didattica della matematica discussi in questo capitolo (Scheiner, 2017), nel quale l'Autore tenta una conciliazione tra i concetti intesi in senso fregeano e i concetti intesi in senso costruttivista. La posizione fregeana rappresenta inoltre un raro esempio di approccio logico ai concetti.
Durante la trattazione ricorreremo a diversi metodi di networking di teorie tra quelli esposti nel paragrafo 4.3. Più precisamente applicheremo, in supporto all'indagine con i consueti metodi tratti dalla filosofia della didattica della matematica (paragrafo 4.2.), i metodi *combinare* e *sintetizzare* e i metodi *comprendere* e *comparare*.
In particolare, i metodi *combinare* e *sintetizzare* troveranno applicazione nel momento in cui, dopo una trattazione generale dell'argomento in filosofia, proporremo una classificazione dei concetti in tale contesto che risulta come

sintesi tra due classificazioni già esistenti in letteratura, ma la cui combinazione consente di individuare delle categorie per inquadrare meglio gli approcci ai concetti in didattica della matematica. Questo modo di procedere ci è sembrato utile per organizzare l'esposizione degli approcci ai concetti in didattica della matematica.
Nei paragrafi 7.3.2. e nella sintesi del paragrafo 7.4. verranno invece applicati principalmente i metodi *comparare* e *comprendere*, in quanto l'obiettivo in questo caso è esplorativo: si mira a comprendere le caratteristiche di fondo degli approcci ai concetti, al fine di verificare la loro corrispondenza con i criteri individuati finora e, se possibile, di circoscrivere meglio quest'ultimi.
In particolare, nel paragrafo 7.4. esamineremo in quali termini gli approcci ai concetti esaminati tengono conto dei criteri finora individuati per una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica.
Ai criteri (1)-(4) individuati nel paragrafo 5.2. del capitolo 5, si aggiunge il criterio (5) individuato nel capitolo 6.
Una definizione di oggetto matematico specifica della didattica della matematica deve:

*(1) essere compatibile con una visione statica, ma anche con una visione dinamica di teoria in didattica della matematica;*
*(2) tenere conto del rapporto tra gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica come disciplina e gli oggetti matematici della matematica come disciplina, nella loro versione formale;*
*(3) tenere conto degli aspetti ontologici specifici della didattica della matematica come disciplina, oltre che di quelli più prettamente concettuali matematici;*
*(4) essere sufficientemente generale da poter astrarre dall'approccio epistemologico nelle diverse teorie in didattica della matematica;*
*(5) essere in grado di inquadrare tecnicamente la modalità relazionale con la quale si formano i complessi concettuali che costituiscono gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica.*

## 7. 3. Concetti in filosofia

### 7. 3. 1. Natura e funzione dei concetti in ambito filosofico[60]

Aristotele fa risalire le prime interrogazioni filosofiche sui concetti a Socrate anzi, secondo un'interpretazione diffusa in filosofia, Socrate è considerato addirittura l'inventore del concetto di concetto (Losacco, 1922; Giannantoni, 1993).

[60] Sottolineiamo il fatto che questa breve trattazione non intende essere un'analisi esaustiva dell'idea di concetto in filosofia, il che esulerebbe dallo scopo della tesi. In essa viene fatto solo un breve cenno ad alcune delle più importanti prospettive filosofiche sull'argomento, in funzione al tema trattato nella tesi.

In questo senso per Aristotele il metodo maieutico di Socrate è il procedimento per la ricerca della verità, intesa nel senso della caratteristica universale delle cose, della loro essenza, la base della loro stessa definizione. Per Aristotele sono gli *universali* a essere gli oggetti primi della conoscenza e sono proprio essi a coincidere con l'idea aristotelica di concetto (Aristotele, 2017). Concetti sono per esempio le categorie aristoteliche (sostanza, qualità, quantità, dove, quando, relazione, agire, subire, avere, giacere), così come i generi e le specie, anche se la prima categoria, cioè la sostanza (o essenza) è considerata la "categoria prima" da Aristotele, in quanto è attraverso essa che si conoscono realmente le altre categorie:

> essa è prima per la nozione, perché nella nozione di ciascuna categoria è necessariamente inclusa la nozione di sostanza (…). Infine, riteniamo di conoscere ciascuna cosa soprattutto quando conosciamo, per esempio, l'essenza dell'uomo o l'essenza del fuoco, piuttosto che quando conosciamo o la qualità o la quantità o il luogo (…). (Aristotele, 2017, p. 289)[61]

Seguendo questa prospettiva per così dire fondazionale sui concetti, è possibile affermare che una loro caratteristica fondamentale sia quella di svolgere un compito importante nella generazione e organizzazione della conoscenza, per via del loro ruolo classificatorio e definitorio.
Classicamente le definizioni di concetto nelle enciclopedie filosofiche sono in effetti per lo più di stampo aristotelico e richiamano questa visione classica dei concetti. Per esempio, secondo Abbagnano, i concetti sono "quei procedimenti che rendono possibile la descrizione, la classificazione e la previsione degli oggetti conoscibili" (Abbagnano, 1971, p. 146, citato in D'Amore, 2001a). In questo senso un concetto è qualcosa di universale, quindi intersoggettivo.
Un altro punto di vista è invece quello secondo cui i concetti sono delle rappresentazioni mentali. Per esempio, secondo Margolis e Laurence (2019), il ruolo primario dei concetti è quello di fungere da "mattoni del pensiero", oltre ad avere un ruolo organizzativo e generativo della conoscenza: "Concepts are the building blocks of thought. Consequently, they are crucial to such psychological processes as categorization, inference, memory, learning, and decision-making" (Margolis & Laurence, 2019, p. 1). In questo caso siamo di fronte a una interpretazione più psicologica dei concetti; torneremo più avanti su queste due modalità di intendere il termine "concetto".
Riassumendo quanto detto finora, possiamo riconoscere che parlando di concetti: (i) si sta considerando più un processo, un "fare qualcosa" (p.e. "conoscere"), che un prodotto; (ii) si può avere un concetto sia di oggetti concreti che astratti; (iii) il concetto non coincide con il nome dell'oggetto conoscibile a cui si riferisce (D'Amore, Fandiño Pinilla, & Sbaragli, 2017).

---

[61] Notiamo che per Platone il concetto è la conoscenza dell'Idea di una cosa, cioè la conoscenza della "causa prima" della cosa conosciuta. In questo senso sia per Platone sia per Aristotele la conoscenza è la conoscenza delle cause.

A partire dal XVII secolo, le speculazioni filosofiche sui concetti si moltiplicano e sono molti i filosofi che dedicano attenzione all'argomento. La distinzione più importante del periodo potrebbe essere identificata come quella tra empiristi e razionalisti, o meglio tra coloro che sostengono che i concetti (o *idee*) hanno origine sensibile e coloro che sostengono che le idee sono puramente intellettuali. Tra i primi possiamo annoverare gli empiristi inglesi Locke e Hume, mentre tra i secondi Descartes e Leibniz (Reuter, 2014, pp. 293–294).
Per esempio, per Locke tutte le idee sono derivate dalla percezione sensibile o comunque dalla percezione della mente delle sue stesse operazioni (Reuter, 2014, p. 294), mentre per Leibniz le idee intellettuali, che sono la base delle verità necessarie, non hanno origine nei sensi, anche se "the senses do participate by activating our attention and making us think of these ideas" (Leibniz, citato in Reuter, 2014, p. 294).
Descartes nega inoltre esplicitamente che le idee possano essere identificate con immagini mentali poiché la mente umana è essenzialmente immateriale. Seguendo Reuter (2014), in Descartes le idee possono essere suddivise in tre categorie: (1) idee percepite dai sensi; (2) idee percepite dall'immaginazione; (3) idee percepite dalla ragione. Tutte e tre le categorie di idee rappresentano dei modi di pensare e quindi non hanno un'estensione, ma "the two former categories of ideas depend on bodily functions (senses, brain) whereas ideas conceived by the pure understanding belong entirely to the immaterial mind" (Reuter, 2014, p. 282). Come nota inoltre Reuter, un filosofo che contribuì in maniera significativa al dibattito sui concetti fu Wolff, che tentò una sintesi tra la visione empirista e razionalista sussumendole sotto un'unica *facoltà del conoscere*, ma chiamando le idee derivanti dalla realtà empirica *sensazioni* e quelle derivanti dall'attività intellettuale *concetti* (Reuter, 2014, p. 283). Vediamo dunque come in questa contrapposizione si presenta di nuovo la dualità precedentemente evidenziata dei concetti come rappresentazioni mentali del soggetto e come categorie degli universali intersoggettivi.
Fu proprio tale tentativo di unificazione proposto da Wolff a indurre Kant a ribadire nella sua opera "Kritik der reinen Vernunft" (Kant, 1781/1998) che per comprendere la cognizione è necessario distinguere tra le due facoltà mentali della comprensione, l'intelletto e la sensitività, giungendo a distinguere tra "the logical form of a concept and its particular content, which is given in sensible intuition" (Reuter, 2014, p. 284).
Kant elabora inoltre la ben nota classificazione dei concetti che ha influenzato molto l'idea di oggetto matematico come qualcosa di preesistente e immutabile e ha supportato l'idea di una sua possibile concettualizzazione oggettiva; si tratta della classificazione dei giudizi in *analitici a-priori* e *sintetici a-priori* o *a-posteriori* (Kant, 1781/1998). In questo contesto i concetti matematici vengono classificati come sintetici a priori: sintetici perché estensivi della conoscenza e a-priori perché universali, necessari e indipendenti dall'esperienza sensibile (Kant, 1781/1998).

Per quanto riguarda la relazione tra oggetto e concetto, notiamo a margine che, nelle prospettive finora messe in evidenza, emerge almeno implicitamente una distinzione tra l'oggetto come qualcosa di preesistente (almeno all'atto del conoscere dell'individuo) e il concetto come una possibile azione sull'oggetto o in riferimento a esso.
Mentre Kant considera i concetti (Begriffe) al plurale e ammette tanti concetti quante sono le loro possibili funzioni, per Hegel *il Concetto* (der Begriff) è il cardine della sua filosofia:

> The Concept is thus considered to be a figure of knowledge: it is the absolutely simple and pure element in which truth has its existence (…) and only its deployment, also called "the work of the concept" (Arbeit des Begriffs), provides access to "scientific understanding" (wissenschaftliche Einsicht). (Hegel, citato in Büttgen, Crépon, & Laugier, 2014, pp. 90–91)

Il Concetto è dunque per Hegel non semplicemente un mezzo per la conoscenza, ma *la conoscenza scientifica stessa*, che nel suo agire produce sé stessa. Il Concetto è sia conoscenza sia strumento del conoscere, in linea con una prospettiva fenomenologica, in cui l'oggetto della conoscenza e la conoscenza stessa sono una cosa sola:

> Der Begriff ist vielmehr das wahrhaft Erste, und die Dinge sind das, was sie sind durch die Tätigkeit des innewohnenden und in ihnen sich offenbarenden Begriffs" [Il Concetto è piuttosto ciò che precede veramente tutto e le cose sono come sono attraverso l'attività del Concetto che in esse vive e in esse si manifesta]. (Hegel, 1830, § 163, traduzione nostra)

In generale, come evidenzia D'Amore (2001), la distinzione tra concetti a-priori e a-posteriori, tipica della filosofia di area francese e tedesca, è segnata da un approccio che pone l'accento più sulla formazione dei concetti che sulla loro natura o funzionalità.
Notiamo che già Ockham aveva identificato *gli atti* di comprensione come dei concetti: "(…) he [Ockham] found it superfluous to postulate either intelligible species preceding such acts or some end-products terminating them" (Holopainen, 2014, p. 279). Dunque, in una rigorosa applicazione del famoso principio chiamato *rasoio di Ockham*,[62] egli non ritiene necessario identificare il punto di partenza e di arrivo dell'azione di comprensione, *essendo questi univocamente determinati dall'azione stessa*.
Vogliamo soffermarci infine brevemente sul contributo al dibattito sui concetti da parte del Pragmaticismo[63] peirciano.

---

[62] Secondo il principio chiamato "rasoio di Ockham", tra più alternative con conclusioni equivalenti si dovrebbe scegliere quella con le premesse più semplici; detto diversamente: non è lecito postulare l'esistenza di enti la cui esistenza non è indispensabile o di cause non necessarie.
[63] Il termine *Pragmaticism* fu introdotto da Peirce nel 1905 per evitare che al suo approccio pragmatico fossero attribuite caratteristiche utilitaristiche e relativistiche derivanti dall'uso del termine in altri contesti, soprattutto nel contesto del *Pragmatismo* di William James. Peirce conia

Per Peirce, il concetto è qualcosa di molto diverso da un atto mentale. Infatti, nella prospettiva pragmaticista peirciana, un concetto è “something having the mode of being of a general type which is, or may be made, the rational part of the purport of a word.” (Peirce, CP, 8.191). Quindi il concetto per Peirce ha certamente la caratteristica di essere generale, nel senso degli universali aristotelici, ma inoltre esso consiste negli *effetti razionali, reali o ipotetici*, che la parola a cui il concetto si riferisce produce nel comportamento o nell’atteggiamento del soggetto.
Per comprendere meglio questa idea di concetto è necessario prendere in considerazione una delle idee più importanti del Pragmaticismo peirciano, cioè la *Massima Pragmatica*. La Massima Pragmatica è per Peirce un metodo di analisi dei concetti (Peirce, CP, 8.191), che lui caratterizza come segue: “Considérer quels sont les effets pratiques que nous pensons pouvoir être produits par l'objet de notre conception. La conception de tous ces effets est la conception complète de l'objet.” [Considera(re) quali sono gli effetti pratici che possono essere prodotti dall’oggetto della nostra concezione. La concezione di tutti gli effetti è la concezione completa dell’oggetto] (Peirce, CP, 5.18,[64] traduzione nostra). Facciamo notare che qui l’espressione “concezione totale” può essere interpretata nel senso di concetto.
La prospettiva pragmaticista peirciana sposta dunque l’attenzione dal concetto come atto mentale al concetto come insieme degli effetti pratici del comportamento o dell’atteggiamento del soggetto. Riassumendo, possiamo affermare che per Peirce il concetto è il risultato dell’atto conoscitivo e che esso coincide con l’insieme degli effetti pratici che produrrebbero, nel comportamento di un soggetto, la sua accettazione e la sua negazione.
In Peirce si ha dunque un radicale capovolgimento dell’idea di conoscenza rispetto a quella presente in Aristotele: la conoscenza non è più una conoscenza di *cause*, ma una conoscenza di *effetti*.
Un filosofo che ha segnato in maniera profonda le ricerche filosofiche relative ai concetti è stato Frege. Non ci soffermiamo qui sul suo pensiero relativo all’argomento trattato poiché esso verrà esposto in dettaglio nel paragrafo successivo. Notiamo solo brevemente che Frege caratterizza il concetto sostanzialmente in due modi simili ma concettualmente distinti: (1) il concetto è il predicato di un soggetto linguistico che designa un oggetto oppure il concetto è il significato espresso da una frase (Frege, 1892a; 1892b); (2) il concetto è una funzione (nel senso di un predicato con occorrenza libera), che trasforma un oggetto (argomento della funzione) in un altro oggetto (valore della funzione)

---

dunque questo nuovo termine, “Pragmaticism”, che giudica “ugly enough to be safe from kidnappers” (Peirce, CP 5.414). Nelle citazioni dell’opera di Peirce, “CP” sta per “Collected Papers”, indicato in bibliografia con “Peirce, C. S. (1960)”; il numero che segue indica il numero del volume (numero prima del punto) e il numero del paragrafo (numero dopo il punto).
[64] La citazione qui riportata è in realtà un’autocitazione di Peirce tratta da “Revue philosophique VII”, come l’Autore stesso sottolinea nel testo da noi citato.

(Frege, 1891). Notiamo che l'impostazione fregeana è di natura puramente logico-linguistica.

Dopo questa breve panoramica su alcune delle più importanti prospettive filosofiche sui concetti, spostiamo la nostra attenzione dalla definizione dei concetti a una loro possibile classificazione. A tale scopo esponiamo due possibili classificazioni: la prima considera come categorie di riferimento la *natura* e la *funzione* dei concetti (D'Amore, 2001a, b; D'Amore, Fandiño Pinilla, & Sbaragli, 2017), mentre la seconda considera come categorie di riferimento i *concetti come rappresentazioni mentali*, i *concetti come abilità* e i *concetti come oggetti astratti* (Margolis & Laurence, 2019).

Riguardo alla *natura* dei concetti, due posizioni contrapposte sono quelle di chi sostiene: (i) che il concetto sia l'*essenza* stessa dell'oggetto a cui esso si riferisce, cioè quell'insieme di caratteristiche che rende l'oggetto come è e che lo distingue dagli altri; (ii) quella assunta da chi invece sostiene che il concetto sia il *segno* dell'oggetto e che l'oggetto sia dunque il significato di tale segno (D'Amore, 2001a).

Per quanto riguarda il primo punto di vista, D'Amore afferma che "pur tra mille diversità, ovviamente, (…) questa idea, nata con Socrate, raffinata da Aristotele, ha avuto molti seguaci fino a Husserl" (D'Amore, 2001a, p. 2), mentre l'idea relativa al secondo punto di vista "è sostanzialmente stoica, ma ripresa in epoca medievale, risalendo forse a Boezio e poi ad Abelardo; ma è stata fatta propria dai logici dell'inizio del XX secolo (D'Amore, 2001a). Nonostante le due risposte alla domanda relativa alla natura dei concetti siano molto diverse tra loro, entrambe mostrano la centralità dell'attribuzione di significato a un oggetto, sia essa intesa come comprensione della sua essenza sia essa intesa come il riconoscimento del significato di un segno. Dunque, in ogni caso, il concetto è *secondario* rispetto all'oggetto.

Anche la risposta relativa alla *funzione* del concetto ha ottenuto nella storia della filosofia sostanzialmente due risposte molto differenti tra loro, in linea con le due concezioni sulla loro natura precedentemente evidenziate: una concezione più oggettuale o finalistica, secondo la quale la funzione del concetto è quella di esprimere o rilevare la sostanza delle cose, e una più strumentale, che ha avuto declinazioni diverse nel tempo, le quali vanno dalla funzione di descrizione (al fine di rendere possibile il riconoscimento), a quelle di organizzazione, di classificazione e di previsione (D'Amore, Fandiño Pinilla, & Sbaragli, 2017). Come evidenziano questi autori, l'idea di concetto sembra prendere in considerazione proprio *l'atto di appropriazione cognitiva degli oggetti, attraverso descrizioni, classificazioni e attraverso l'analisi delle loro relazioni con altri oggetti già noti*.

Un'altra classificazione dei concetti, che pone l'accento sulla relativa questione ontologica nella filosofia moderna, si trova in Margolis e Laurence (2019). Secondo questi autori la questione relativa all'ontologia dei concetti consente di

distinguere tre approcci di base: (1) i concetti come rappresentazioni mentali; (2) i concetti come abilità; (3) i concetti come oggetti astratti.
La prima categoria di questa classificazione si basa sull'idea dei concetti come *entità psicologiche*, sulla base della *Teoria rappresentazionale della mente* (Fodor, 1975), in cui si suppone che il pensiero si verifichi in un sistema linguistico di rappresentazioni interno; si tratta della posizione standard assunta dalle scienze cognitive, come notano Margolis e Laurence. Come precursori di questa corrente, questi autori citano Locke (1690/1975) e Hume (1739/1978), nella cui opera i concetti sono considerati come *idee* e vengono associati a immagini mentali, mentre nella versione moderna di questa corrente si suppone che il sistema di rappresentazioni abbia la struttura di un linguaggio, secondo la cosiddetta *language of thought hypothesis* (Fodor 1975).
La seconda categoria della classificazione di Margolis e Laurence si basa sulla posizione che, a differenza dell'impostazione mentalista, i concetti sono delle *abilità*:

> it's wrong to maintain that concepts are mental particulars—concepts are neither mental images nor word-like entities in a language of thought. Rather, concepts are abilities that are peculiar to cognitive agents (…). The concept CAT, for example, might amount to the ability to discriminate cats from non-cats and to draw certain inferences about cats. (Margolis & Laurence, 2019, p. 1)

Tra gli esponenti di questa corrente, Margolis e Laurence annoverano per esempio Dummett (1993), Bennett e Hacker (2008) e Kenny (2010), ma osservano che la ragione più profonda per la nascita di questa corrente è legata allo scetticismo riguardo all'esistenza e all'utilità delle immagini mentali espresso da Wittgenstein (1953/2003). Ricordiamo infatti che per Wittgenstein il significato di un oggetto è l'*uso* che il soggetto è in grado di fare di esso in un *gioco linguistico* (Sprachspiel). Un gioco linguistico è per Wittgenstein simile a quello che si verifica quando un bambino apprende la propria lingua madre:

> (…) der ganze Vorgang des Gebrauchs der Worte (…) eines jener Spiele ist, mittels welcher Kinder ihre Muttersprache erlernen. Ich will diese Spiele 'Sprachspiele' nennen, und von einer primitiven Sprache manchmal als einem Sprachspiel reden. [(…) tutto il processo dell'uso delle parole (…) è uno di quei giochi, tramite i quali i bambini apprendono la loro lingua madre. Voglio chiamare questi giochi 'giochi linguistici' e parlare a volte di una lingua primitiva come di un gioco linguistico]. (Wittgenstein, 1953/2003, p. 16, traduzione nostra)

All'ultima categoria della classificazione dei concetti, secondo la quale essi sono visti come *oggetti astratti*, Margolis e Laurence fanno corrispondere l'impostazione di stampo fregeano (Frege, 1982a). Come già accennato, esporremo in dettaglio la posizione di Frege sui concetti e sugli oggetti nel prossimo paragrafo. Qui notiamo solo che Margolis e Laurence caratterizzano l'idea di concetto secondo questa prospettiva nel modo seguente: "The idea behind this view is that concepts are the meanings (or 'contents') of words and phrases as

opposed to mental objects or mental states" (Margolis & Laurence, 2019, p. 1). Tuttavia, questi autori non menzionano il secondo modo di considerare i concetti, a cui avevamo già fatto cenno e che Frege esprime chiaramente nel suo scritto "Function und Begfriff" (Frege, 1891), cioè il concetto visto come una *funzione proposizionale*. Nell'opera citata, Frege mette in evidenza il ruolo del concetto come una funzione che esprime il *pensiero*, in linea con il suo obiettivo di costruire una lingua concettuale, creata sull' esempio del linguaggio dell'aritmetica, che sia in grado di esprimere il *pensiero puro* (reiner Gedanke). Questa prospettiva consente di accostare Frege anche all'idea del concetto come abilità (di pensiero), nel momento in cui esso trasforma qualcosa (l'argomento della funzione) in qualcos'altro (il valore della funzione). Naturalmente in questo caso il termine *pensiero* (Gedanke) non ha un'accezione psicologica ma logica, in linea con la prospettiva puramente logico-linguistica sui concetti proposta da Frege.
Come esponenti moderni della corrente in cui i concetti sono visti come oggetti astratti, Margolis e Laurence citano Peacocke (1992) e Zalta (2001).
Dopo aver presentato le due modalità di classificazione dei concetti proposte in D'Amore (2001a, b; D'Amore, Fandiño Pinilla, & Sbaragli, 2017) e (Margolis & Laurence, 2019), proponiamo qui di seguito un tentativo di sintesi tra queste due classificazioni. A nostro avviso la classificazione *ontologica* di Margolis e Laurence può essere accostata a quella proposta da D'Amore riguardo alla *natura* dei concetti (Tabella 2).
Ci sembra possibile considerare come simili le seguenti due coppie di caratteristiche: (1) *concetti come essenza delle cose* e *concetti come rappresentazioni mentali*; (2) *concetti come segni il cui significato è l'oggetto* e *concetti come segni linguistici*. Rispetto alla classificazione di D'Amore e coautori, quella di Margolis e Laurence presenta un elemento in più: i concetti come abilità. Tuttavia tale caratteristica può essere ricondotta a nostro avviso alla caratteristica relativa alla *funzione* degli oggetti, e più precisamente alla *funzione strumentale*, presente in D'Amore e coautori.
Nella sintesi proposta nella tabella (Tabella 2) distinguiamo quindi due dimensioni: quella ontologica, in cui le categorie sono tre: *natura (o essenza)*, *abilità* e *funzione predicativa*, e quella funzionale, in cui le categorie sono ancora tre: *funzione oggettuale o finalistica*, *funzione strumentale*, *funzione di oggetto della conoscenza e di strumento d'indagine*. L'ultima categoria è stata aggiunta in linea con l'impostazione fenomenologica hegeliana precedentemente esposta.

<table>
<tr><th></th><th></th><th colspan="3">DIMENSIONE ONTOLOGICA</th></tr>
<tr><th></th><th></th><th>Concetti come essenze delle cose</th><th>Concetti come abilità</th><th>Concetti come segni linguistici</th></tr>
<tr><td rowspan="4">DIMENSIONE FUNZIONALE</td><td>Funzione oggettuale o finalistica</td><td>Il concetto è l’essenza delle “cose” (oggetti materiali o immateriali, ma anche relazioni).<br>p.e. Aristotele (2017) oppure l’essenza del pensiero espressa tramite immagini mentali.<br>p.e. Fodor (1975)</td><td>Il concetto è l’abilità di un soggetto cognitivo di distinguere le caratteristiche degli oggetti della conoscenza.<br>p.e. Dummett (1993)</td><td>Il concetto è il predicato linguistico in un enunciato e predica una caratteristica del soggetto linguistico che rappresenta un oggetto.<br>p. e. Frege (1892a)</td></tr>
<tr><td>Funzione strumentale</td><td>Il concetto serve per descrivere, organizzare, classificare e prevedere.</td><td>Il concetto serve per poter fare inferenze sugli oggetti della conoscenza o per partecipare a un dato gioco linguistico.<br>p.e. Wittgenstein, 1953/2003)</td><td>Il concetto predica una caratteristica del soggetto linguistico che rappresenta un oggetto, ma esso trasforma anche l’oggetto a cui si riferisce in un altro oggetto, che a sua volta può essere oggetto di un altro concetto.<br>p. e. Frege (1891)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Funzione di oggetto della conoscenza e di strumento d’indagine</td><td>---</td><td colspan="2">Il concetto è lo strumento e il risultato dell’indagine scientifica di un soggetto cognitivo.<br>p. e. Hegel (1830)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Il concetto è l’insieme degli effetti dei comportamenti dettati dalla sua accettazione e dalla sua negazione; esso si ottiene attraverso l’attuazione della Massima pragmatica.<br>p. e. Peirce (1960)[65]</td></tr>
</table>

Tabella 2. Classificazione dei concetti in filosofia sulla base di criteri funzionali e ontologici.

La classificazione dei concetti riportata in tabella sarà il nostro punto di riferimento nell’organizzazione globale della trattazione sui concetti. Sottolineiamo che essa è, come sono spesso le classificazioni, molto schematica e non permette di tenere conto di molte sfumature. Però essa ha il pregio (come tutte

[65] Con “Peirce (1960)” si intendono *in generale* i *Collected Papers*, indicati in bibliografia con “Peirce, C. S. (1960)”.

le classificazioni), di consentire un'organizzazione delle idee su un argomento complesso, ed è questo l'uso che noi faremo di tale classificazione in seguito.
Sulla base delle distinzioni fatte possiamo così già delineare la seguente suddivisione tra:

- approcci in cui l'aspetto oggettuale del concetto è quello di essere un segno linguistico che sta per una relazione astratta e in cui l'aspetto strumentale del concetto è legato all'espressione del puro pensiero scientifico (presenteremo in dettaglio l'approccio di Frege nel paragrafo 7.3.2, che però non è un approccio didattico ai concetti, ma un approccio logico-linguistico);
- approcci in cui l'aspetto oggettuale del concetto è quello di essere una rappresentazione mentale che esprime l'essenza del pensiero e il cui aspetto strumentale è quello di descrivere, organizzare, classificare e prevedere. Questo tipo di approccio è prevalentemente di stampo costruttivista (p. e. von Glaserfeld, 1995) e in esso il ruolo centrale nella concettualizzazione è attribuito all'astrazione (presenteremo alcuni di questi approcci nel paragrafo 7.4.1.);
- approcci in cui l'aspetto oggettuale del concetto è quello di essere un'abilità di un soggetto cognitivo di generare azioni e comportamenti o di comunicare, e il cui aspetto strumentale è quello di consentire di trarre inferenze sull'oggetto della conoscenza o di partecipare a un dato gioco linguistico. Esempi di questo tipo di approccio sono quelli che si collocano nell'ambito della teoria delle situazioni didattiche (Brousseau, 1986) (presenteremo due esempi di questo tipo nei paragrafi 7.4.2.1. e 7.4.2.2.) oppure l'apprendimento nell'ambito dell'approccio ontosemiotico (Godino & Batanero, 1994; Godino, 2002) o della *Commognition* (Sfard, 2008, Lavie, Steiner, & Sfard, 2019) ai quali abbiamo accennato già nel capitolo 5 e di cui ci occuperemo più in dettaglio nel capitolo 8;
- approcci in cui l'aspetto oggettuale e strumentale dei concetti si fondono e in cui l'apprendimento è un'oggettivazione della cultura in cui il soggetto è immerso, come per esempio nella teoria dell'oggettivazione (Radford, 2007, 2008a), a cui abbiamo fatto cenno nel capitolo 5 e sulla quale torneremo nel capitolo 8.

### 7. 3. 2. Le dualità concetto-oggetto e senso-denotazione in Frege (concetti come segni linguistici)

Sono soprattutto due gli aspetti dell'opera di Frege di particolare interesse per la presente trattazione: la distinzione tra oggetto e concetto e la distinzione tra senso e denotazione.
La prima delle due distinzioni è utile come esempio di differenziazione rigorosa nell'uso dei termini *oggetto* e *concetto*. La seconda distinzione, quella tra *senso* e

*denotazione*, è strettamente collegata alla prima, ma ha anche un ruolo autonomo in quanto propedeutica all'argomento trattato nel capitolo successivo: gli oggetti in filosofia della matematica, in cui il logicismo fregeano ha un ruolo importante. Inoltre, per poter interpretare l'approccio di Scheiner (2017) ai concetti, che esporremo nel paragrafo 7.4.1.3. di questo capitolo, è necessario premettere un'accurata puntualizzazione sulla distinzione tra segno e senso e tra oggetto e concetto in Frege.
È importante premettere che l'esposizione dettagliata di alcuni aspetti dell'opera di Frege che presenteremo di seguito non deve essere intesa come un'adesione alla corrente logicista fondazionale della matematica. Le suddette distinzioni sono considerate qui uno strumento per gettare luce su alcuni aspetti relativi agli argomenti trattati; a essi si farà ricorso non come a un quadro teorico generale, ma come a uno strumento metodologico di classificazione utile in alcuni contesti della trattazione.
Di seguito caratterizzeremo dunque le distinzioni oggetto/concetto e senso/denotazione, accompagnandole da alcune citazioni tratte da vari lavori di Frege. Nel testo metteremo in evidenza in corsivo alcune frasi che ne riassumono i tratti salienti.

### 7. 3. 2. 1. Oggetti e concetti

Frege basa la propria indagine relativa alla distinzione tra oggetti e concetti sull'analisi linguistica. Le sue considerazioni sono primariamente di natura logica, piuttosto che psicologica. Anche se in alcuni punti non mancano cenni ad aspetti psicologici, lo scopo in tale caso è quello di chiarire le differenze ed evitare i fraintendimenti. Come sottolinea Frege stesso:

> Das Wort 'Begriff' wird verschieden gebraucht, theils in einem psychologischen, theils in einem logischen Sinne, theils vielleicht in einer unklaren Mischung von beiden. (…) Ich habe mich nun dafür entschieden, einen rein logischen Gebrauch streng durchzuführen. [La parola 'concetto' viene usata in modi diversi, a volte in un senso psicologico, a volte in un senso logico, a volte forse in un senso poco chiaro di una commistione tra i due. (…) Io ho deciso di portare avanti un uso strettamente logico [della parola 'concetto']. (Frege, 1982a, p. 192, traduzione nostra)

Come primo passo per addentrarci nell'opera di Frege, consideriamo una frase predicativa e le sue componenti principali, il soggetto e il predicato. Il soggetto è espresso da ciò che Frege chiama *segno* (Zeichen), considerato in senso molto ampio come un nome, un'espressione, una lettera etc., che funge da nome proprio dell'oggetto che designa (Frege, 1892b, pp. 26–27). Il predicato è il complemento predicativo del soggetto. La frase predicativa nel suo complesso *contiene*[66] un *pensiero* (Gedanke), le cui parti sono unite da una caratteristica importante del predicato: il fatto di essere *insaturo* (ungesättigt) (Frege, 1892a, p. 205), cioè non determinato. È la caratteristica della non determinatezza che rende possibile il collegamento tra soggetto e predicato nella formulazione di un pensiero:

> (…) von den Theilen eines Gedankens dürfen nicht alle abgeschlossen sein, sondern mindestens einer muss irgendwie ungesättigt oder prädicativ sein, sonst würden sie nicht aneinander haften [(…) le parti di un pensiero non devono essere tutte chiuse, ma almeno una deve essere in qualche modo insatura o predicativa, altrimenti non potrebbero stare collegate]. (Frege 1892a, p. 205, traduzione nostra)

A partire dalle distinzioni tra soggetto e predicato, Frege arriva a una importante distinzione tra oggetto e concetto:

> Wir können kurz sagen, indem wir "Prädicat" und "Subject" im sprachlichen Sinne verstehen: Begriff ist Bedeutung eines Prädicates, Gegenstand ist, was nie die ganze Bedeutung eines Prädicates, wohl aber Bedeutung eines Subjectes sein kann" [Possiamo dire in breve, intendendo 'predicato' e 'soggetto' in senso linguistico: concetto è significato di un predicato, oggetto è ciò che mai può esaurire l'intero significato del predicato, che però può ben essere significato di un soggetto]. (Frege, 1892a, p. 198, traduzione nostra)

*Dunque, in una frase predicativa, il soggetto designa un oggetto e l'oggetto è il significato del segno che esprime il soggetto, mentre la parte predicativa è il concetto.*

La diversità delle funzioni svolte dal soggetto e dal predicato si rispecchiano nella diversità dei ruoli di oggetto e concetto. In prima linea, il segno che designa un oggetto non è mai predicativo e l'oggetto non può svolgere il ruolo di concetto.
Frege evidenzia che una regola che può essere utile per distinguere soggetto da predicato, e dunque oggetto da concetto, è quella che il segno che designa l'oggetto e funge da soggetto logico o è un nome proprio o è preceduto dall'articolo determinativo al singolare, mentre il predicato che rappresenta il concetto è preceduto dall'articolo indeterminativo o è al plurale (Frege, 1892a, p. 195).[67]

[66] Frege (1892b, p. 32) usa il verbo "enthalten", cioè *contenere* e non il verbo "ausdrücken", cioè *esprimere*, che sarebbe il termine più consueto non solo in Italiano ma anche in Tedesco, in riferimento a un pensiero. Il pensiero sembra dunque essere inteso da Frege come il *contenuto* della frase, in una relazione simile a quella tra una funzione e il suo argomento, piuttosto che come qualcosa che nasce da una sua interpretazione.
[67] Ricordiamo che qui Frege sta trattando di frasi proposizionali e non, per esempio, di relazioni tra concetti come possono essere i sillogismi, nei quali si sta esprimendo appunto una relazione e non una proprietà. Inoltre, Frege stesso è consapevole del fatto che la "regola" fornita si riferisce all'uso consueto di una lingua particolare, il Tedesco, e che quindi è una regola euristica e non logica (Frege, 1892a, p. 195). Tuttavia, essa può essere un utile riferimento, senza pretesa di generalità, in molte altre lingue e certamente anche in quella italiana.

Inoltre, la quantificazione (espressa da termini come tutti, ogni, qualcuno, nessuno) e la negazione si riferiscono sempre alla parte predicativa e quindi al concetto e non all'oggetto (Frege, 1892, p. 198).
La relazione tra oggetto e concetto può essere espressa tramite il predicato "cadere sotto un concetto" (Frege, 1982a, p. 194). Frege usa tale espressione per affermare che un dato oggetto, il cui segno linguistico funge da soggetto in una frase e in cui il concetto in questione è il predicato, rende vera la frase predicativa. In questo caso il verbo *essere* ha la funzione di copula e il predicato *significa*[68] il concetto. Si dice anche che gli oggetti che cadono sotto un concetto soddisfano tale concetto. Per esempio, sotto il concetto "essere numero pari" cadono tutti i numeri pari e tale concetto è soddisfatto perché esistono degli oggetti che lo soddisfano: i numeri pari. La caratteristica (o le caratteristiche) espressa(e) dal concetto sono dette da Frege *proprietà* (Eigenschaften) degli oggetti che cadono sotto esso; per esempio, dato che il numero 2 cade sotto il concetto "essere numero pari", essere un numero pari è una proprietà del numero 2. Nel considerare la relazione tra un concetto e gli oggetti che cadono sotto esso, Frege parla di *concetti di primo livello* (Begriff erster Stufe) (Frege, 1892a, p. 201).
Un concetto non può *cadere sotto* un altro concetto poiché è insaturo e quindi non può svolgere il ruolo di oggetto; esso può però essere *subordinato* a un *concetto di secondo livello* (Begriff zweiter Stufe) (Frege, 1892a, p. 201). Per esempio, il concetto "essere un mammifero" è subordinato al concetto "essere un vertebrato". Le caratteristiche del concetto di primo livello sono dette da Frege *connotati* (Merkmale) del concetto di secondo livello. Per esempio, il concetto "essere un numero pari" è subordinato al concetto "essere un numero naturale" e anche il concetto "essere un numero primo" è subordinato al concetto "essere un numero un naturale". L'"essere un numero pari" e l'"essere un numero primo" sono dei connotati del concetto "numero naturale".

*Le relazioni di un oggetto che cade sotto un concetto e di un concetto che è subordinato a un altro concetto sono dunque relazioni di natura diversa (o di livello diverso) e non cancellano la differenza tra oggetto e concetto, come sottolinea Frege (1892a, p. 201).*

Frege stesso non fornisce mai definizioni dei termini *oggetto* e *concetto*,[69] ma caratterizza le due nozioni attraverso quelli che chiama i *cenni* o *richiami* (Winke) (Frege, 1892a, p. 193) fatti al lettore, affinché comprenda il loro senso dal modo in cui appaiono nei diversi contesti.
In questo senso le relazioni tra *oggetto* e *concetto* diventano ancora più chiare se si esamina l'uso che Frege ne fa nell'articolo "Function und Begriff", cioè

[68] Qui il termine *significare* (bedeuten) è inteso nel senso di *esprimere, stare per.*
[69] Nel suo articolo "Concetto e oggetto" (Frege, 1892a), l'Autore fa notare che concetto e oggetto sono da considerarsi termini primi nell'analisi logica, il che significa che non richiedono una definizione (p. 193).

"Funzione e concetto" (Frege, 1891). In quel contesto l'Autore caratterizza il concetto come una funzione e l'oggetto come il suo argomento. Frege specifica che la caratteristica principale dell'oggetto è che l'espressione che lo designa non ha delle occorrenze libere, cioè che esso è, a differenza del concetto, saturo. "Gegenstand ist Alles, was nicht Function ist, dessen Ausdruck also keine leere Stelle mit sich führt" [Oggetto è tutto ciò che non è funzione, cioè cui espressione non ha un'occorrenza libera] (Frege, 1891, p. 18, traduzione nostra).
Finora non abbiamo affrontato in maniera esplicita la nozione di significato e abbiamo solo accennato a che cosa si debba intendere per "significato di un segno che designa un oggetto". Inoltre, non è chiaro in che senso il concetto, essendo insaturo, cioè non determinato, possa avere un significato. Esso ottiene infatti un significato solo in collegamento con il soggetto, tramite la "saturazione" della sua occorrenza libera. La frase predicativa che ne risulta esprime un pensiero, ma questo può essere considerato il significato del concetto?
Nel paragrafo successivo esaminiamo tali questioni alla luce della distinzione tra *senso* e *denotazione*.

### 7. 3. 2. 2. Senso e denotazione

La seconda distinzione fondamentale di cui ci occupiamo qui è quella che Frege (1892b) fa tra due accezioni del termine *significato*, cioè tra *senso* (Sinn) e *denotazione* (Bedeutung).
Consideriamo di nuovo una frase predicativa, composta da un soggetto e da un predicato. Il *segno* (il nome, l'espressione etc.) che rappresenta il soggetto grammaticale ha come significato l'oggetto che esso designa; tale significato è chiamato da Frege *denotazione* (Bedeutung) e corrisponde appunto all'oggetto; il *senso* (Sinn), è invece "die Art des Gegebenseins", cioè "il modo con cui il segno è dato" (Frege, 1892b, p. 26, traduzione nostra). L'esempio ben noto che fa Frege è quello di "Espero" e "Fosforo", che sono due segni che hanno come denotazione un unico oggetto, il *pianeta Venere*, ma hanno due sensi diversi: *stella della sera* (Espero) e *stella del mattino* (Fosforo).

*Una caratteristica importante della denotazione è dunque che essa è invariante rispetto al senso. Questo significa che in una frase è possibile sostituire un termine con un altro avente la stessa denotazione ma un senso diverso, senza che cambi il significato della frase.*

Al contrario di quanto ci si potrebbe aspettare, il concetto espresso da una frase predicativa non è quindi il significato del soggetto. Un concetto può fungere da oggetto in una frase predicativa solo se viene oggettificato, cioè trasformato in un oggetto, premettendo al suo nome l'espressione 'il concetto':

> Danach würde man als Bedeutung des grammatikalischen Subjects den Begriff erwarten; aber dieser kann wegen seiner prädicativen Natur nicht ohne Weiteres so erscheinen, sondern muss erst in einen Gegenstand verwandelt werden, oder, genauer gesprochen, er muss durch einen Gegenstand vertreten werden, den wir mittels der vorgesetzten Worte 'der Begriff' bezeichnen, z. B. "der Begriff 'Mensch' ist nicht leer" [Ci si potrebbe aspettare il concetto come significato del soggetto grammaticale; esso non può però senz'altro apparire così per via della sua natura predicativa, ma deve essere prima trasformato in un oggetto o, detto più precisamente, esso deve essere rappresentato da un oggetto, che designiamo premettendo le parole 'il concetto', p. e. "il concetto 'essere umano' è non vuoto"]. (Frege, 1892, p. 197, traduzione nostra)

*Il concetto non è dunque il significato del soggetto grammaticale. Un concetto può essere oggettificato e fungere da oggetto premettendo al suo nome l'espressione "il concetto".*

Sia il senso sia la denotazione di un segno sono intersoggettivi, in quanto sono riconoscibili nello stesso modo da più soggetti, e devono essere distinti dalle *idee* (Vorstellungen), che sono soggettive poiché dipendenti dalla coscienza individuale (Frege, 1892b, pp. 29-30). Frege sottolinea inoltre che le idee non sono gli oggetti delle sue indagini, ma che egli abbia ritenuto necessario esplicitare alcune loro caratteristiche con lo scopo di evitare che le si possa confondere con il senso o con la denotazione. Questa posizione è in effetti in linea con quanto da lui premesso nell'articolo "Begriff und Gegenstand" (Frege, 1892a) in cui, come già detto in precedenza, egli si propone di portare avanti le sue ricerche mantenendo rigorosamente una prospettiva logica piuttosto che una psicologica; le idee devono essere in effetti considerate enti di dominio psicologico, in quanto soggettive. Si potrebbe obiettare che Frege usa anche il termine *pensiero*, a cui abbiamo fatto cenno già in precedenza ma, come vedremo in seguito, l'uso di questo termine viene ricondotto a un contesto prettamente logico e non psicologico.
Abbiamo già evidenziato il fatto che la denotazione di un segno che funge da nome proprio (o da soggetto logico in senso ampio) è l'oggetto da esso designato ma, secondo Frege, anche frasi intere possono avere una denotazione (Frege, 1892b). Frasi predicative di senso compiuto contengono, come egli nota, un pensiero, e si potrebbe essere indotti a ritenere che questo pensiero sia in generale il loro significato. Ammettendo ciò, si è portati però a chiedersi in che senso una tale frase possa avere anche una denotazione (Frege, 1892b). Tuttavia, evidenzia Frege, se nella frase sostituissimo una parola con un'altra avente la stessa denotazione ma un senso diverso, noteremo che il pensiero collegato alla frase cambia, acquisisce un'altra sfumatura, mentre la denotazione dovrebbe essere invariante rispetto al senso. Dunque, conclude Frege, il pensiero è il senso di tali frasi, il modo in cui esse si presentano, mentre la loro denotazione, se ce l'hanno, è il loro *valore di verità* (Wahrheitswert) (Frege, 1892b, p. 32). Se la denotazione

della frase è "il vero", allora anche il pensiero collegato al senso è vero; se la denotazione della frase è "il falso" allora anche il pensiero a essa collegato è falso.
Abbiamo accennato al fatto che le frasi di senso compiuto hanno un senso ma non hanno necessariamente una denotazione. Infatti, p. e. "Pegaso è un cavallo alato" è una frase che ha senso, ma non ha una denotazione; non possiamo dire né che sia vera né che sia falsa, in quanto il concetto "essere un cavallo alato" è vuoto, cioè non esistono oggetti che cadono sotto esso.
Ci sono anche segni che fungono da nomi propri in una frase predicativa, che possono avere solo un senso e non avere una denotazione. Consideriamo per esempio la seguente frase: "L'attuale re d'Italia è alto". Essa avrebbe un senso, sia che la si considerasse nel periodo storico della stesura del presente testo, sia che la si avesse considerata per esempio alla fine del XIX secolo. Tuttavia, nel primo caso essa non avrebbe una denotazione poiché oggi un oggetto denotato con tale soggetto grammaticale non esiste (non esiste un re d'Italia), mentre considerata nel periodo storico in cui esisteva un re d'Italia, essa avrebbe avuto una denotazione: essa avrebbe potuto essere considerata o vera o falsa, in base alla statura del monarca e supposto che ci sia un accordo sul significato di "essere alto".

*Dunque, se una frase predicativa di senso compiuto non ha denotazione, il pensiero a essa collegato ha un senso ma non può essere giudicato né vero né falso.*

A questo punto appare però critica la posizione degli oggetti matematici poiché le frasi predicative in cui il soggetto grammaticale designa un tale oggetto avrebbe solo un senso ma non una denotazione, cioè non potremmo attribuire un valore di verità a tali frasi. Questo creerebbe serie difficoltà in matematica, i cui oggetti non hanno un'esistenza nel senso comune del termine, a meno che non si assuma una posizione platonica, in cui tali oggetti ideali sono postulati come esistenti indipendentemente dall'attività dell'essere umano (D'Amore, 2001a, b). Una tale posizione può non creare particolari difficoltà in matematica come disciplina, diventa però centrale nel momento in cui si considerano gli oggetti matematici in didattica della matematica come disciplina. Torneremo più avanti nella trattazione, nel capitolo 9, sulla questione della denotazione degli oggetti matematici.
Tornando alle frasi predicative che hanno una denotazione, può apparire singolare il fatto che Frege identifichi tale denotazione con il loro valore di verità, considerando "il vero" e "il falso" come oggetti (Frege, 1892b, p. 35). Questo significa che le denotazioni possibili per le frasi predicative sono solo di due tipi: vero o falso.
Ci sembra interessante esporre il motivo che spinge Frege a considerare la denotazione di una frase proposizionale, oltre al suo senso, rappresentato dal pensiero. Secondo l'Autore tale scelta è dettata dall'esigenza di passare dal piano delle idee e dei sentimenti che nascono dai pensieri (per esempio nel fruire di

un'opera d'arte), al piano della verità di quest'ultimi, che è il piano a cui appartiene l'indagine scientifica:

> Mit der Frage nach der Wahrheit würden wir den Kunstgenuß verlassen und uns einer wissenschaftlichen Betrachtung zuwenden. (…) Das Streben nach Wahrheit also ist es, was uns überall vom Sinn zur Bedeutung vorzudringen treibt [Con la questione sulla verità lasceremmo il godimento dell'arte e ci rivolgeremmo alla considerazione scientifica (…). È l'aspirazione alla verità quindi, che ci induce a spingerci ovunque dal senso verso la denotazione]. (Frege, 1892b, p. 33, traduzione nostra)

*Dunque, la distinzione del significato in senso e denotazione è un passo necessario per creare un collegamento tra il dominio del senso (espresso dai pensieri, oggettivamente riconoscibili ma molteplici) e il dominio della denotazione (espresso dal valore logico, invariante rispetto al senso).*

Un'altra considerazione interessante per la presente trattazione, che Frege fa nel collegare le nozioni di *concetto* e *funzione*, e che getta luce sul modo in cui si devono considerare il senso e la denotazione, è quella relativa al modo di collegarsi di quelle che egli chiama *le parti chiuse e insature*. La relazione tra una parte *chiusa* (abgeschlossen) (Frege, 1891, p. 17) e una *insatura* (ungesättigt) è quella che lega non solo le frasi predicative ma anche le equazioni, le disequazioni e le espressioni analitiche in generale, che possono essere scisse in due parti (Frege, 1891, p. 17).
Altri generi di frasi, che non sono predicative, possono avere collegamenti diversi, come per esempio i periodi ipotetici, in cui nella protasi, che funge da premessa, c'è di solito una parte indeterminata, insatura, e nella apodosi, che funge da conclusione, c'è qualche altro termine dello stesso genere che richiama quella parte indeterminata. È proprio il collegamento tra queste due parti indeterminate del periodo ipotetico a mettere in evidenza la generalità della relazione e a renderla quindi una legge generale:

> Auch in den Bedingungssätzen ist meistens (…) ein unbestimmt andeutender Bestandteil anzuerkennen, dem im Nachsatze ein ebensolcher entspricht. Indem beide aufeinander hinweisen, verbinden sie beide Sätze zu einem Ganzen, das in der Regel nur einen Gedanken ausdrückt. In dem Satze 'wenn eine Zahl kleiner als 1 und größer als 0 ist, so ist auch ihr Quadrat kleiner als 1 und größer als 0' ist dieser Bestandteil 'eine Zahl' im Bedingungssatze und 'ihr' im Nachsatze. Eben durch diese Unbestimmtheit erhält der Sinn die Allgemeinheit, welche man von einem Gesetze erwartet. Eben dadurch wird aber auch bewirkt, daß der Bedingungssatz allein keinen vollständigen Gedanken als Sinn hat und mit dem Nachsatz zusammen einen Gedanken, und zwar nur einen einzigen, ausdrückt, dessen Teile nicht mehr Gedanken sind. [Anche nella protasi, nella maggior parte dei casi, (…) è possibile riconoscere una parte che ha un carattere indeterminato, alla quale corrisponde una tale parte nella apodosi. Nell'indicarsi a vicenda, esse collegano le due frasi in una sola, che di regola esprime un unico pensiero. Nella frase 'se un numero è minore di 1 e maggiore di 0 allora anche il suo quadrato è minore di 1 e maggiore di 0', la parte in questione è 'un

> numero' nella protasi e 'il suo' nell'apodosi. È proprio attraverso questa non determinatezza che il senso acquisisce una generalità che ci si aspetta da una legge. Però è anche tale non determinatezza che fa sì che l'apodosi da sola non abbia un pensiero completo come senso e che esprima con la protasi uno, e un solo, pensiero, le cui parti non sono più pensieri]. (Frege, 1891, p. 43, traduzione nostra)

Nelle considerazioni fatte nel passaggio appena citato, Frege supera il piano semantico dell'implicazione causale, mettendo in evidenza il piano sintattico, relativo alla conseguenza logica. Ciò che appare particolarmente interessante è che ciò non avviene servendosi di un linguaggio formale, ma *esaminando il linguaggio comune*, in cui questo tipo di relazione sembra molto difficile da cogliere.
È necessario tenere presente che l'opera di Frege era finalizzata primariamente alla fondazione dell'aritmetica, e quindi dell'intera matematica, sulla logica. Infatti, nell'opera *Begriffsschrift* ("Ideografia") (Frege, 1879), il suo scopo è quello di proporre un linguaggio formale "del puro pensiero", modellato sulla base dell'aritmetica, in cui ogni formula ben formata, cioè sintatticamente accettabile, deve avere una denotazione. È ben noto che i suoi sforzi di fondare la matematica sulla logica naufragarono nello scontro con i paradossi evidenziati da Russell ma la sua opera ha prodotto tanti risultati "secondari", come per esempio la costruzione di un calcolo dei predicati e di un calcolo degli enunciati che, dal punto di vista odierno, hanno un'importanza notevole. Ciò che rende però particolarmente interessante l'opera di Frege per noi non sono tanto i suoi risultati logici, quanto il sentiero che egli traccia nel passaggio dal linguaggio comune, ambiguo e impreciso per sua natura, e per questo anche molto ricco semanticamente, a un linguaggio apparentemente più povero ma adatto alla formulazione di pensieri scientifici. A tale proposito sembra particolarmente significativa la citazione che riportiamo di seguito, con la quale concludiamo il presente paragrafo; in essa l'Autore fa ricorso a una metafora che mette a confronto l'occhio e il microscopio per esemplificare il rapporto tra il linguaggio comune (che egli chiama "lingua della vita") e il linguaggio concettuale (l'Ideografia) da lui ideato:

> Das Verhältnis meiner Begriffsschrift zu der Sprache des Lebens glaube ich am deutlichsten machen zu können, wenn ich es mit dem des Mikroskops zum Auge vergleiche. Das Letztere hat durch den Umfang seiner Anwendbarkeit, durch die Beweglichkeit, mit der es sich verschiedenen Umständen anzuschmiegen weiss, eine grosse Ueberlegenheit vor dem Mikroskop. Als optischer Apparat betrachtet, zeigt es freilich viele Unvollkommenheiten, die nur in Folge seiner innigen Verbindung mit dem geistigen Leben gewöhnlich unbeachtet bleiben. Sobald aber wissenschaftliche Zwecke grosse Anforderungen an die Schärfe der Unterscheidung stellen, zeigt sich das Auge als ungenügend. Das Mikroskop hingegen ist gerade solchen Zwecken auf das vollkommenste angepasst, aber eben dadurch für alle anderen unbrauchbar. [Credo di poter rendere chiaro il rapporto tra la mia Ideografia e la lingua della vita in maniera più significativa se lo paragono a quello tra il microscopio e l'occhio. Quest'ultimo ha, per via dell'ampia gamma dei suoi usi, per via della sua mobilità, attraverso i quali riesce ad adattarsi a diverse condizioni, una grande superiorità

> rispetto al microscopio. Visto come un apparato ottico, esso mostra naturalmente molte imperfezioni, le quali passano inosservate solo a causa del suo intimo legame con la vita dello spirito. Non appena però scopi scientifici richiedono un notevole grado di messa a fuoco delle differenze, l'occhio si mostra insufficiente. Il microscopio, invece, è adatto alla perfezione proprio per tali scopi, ma è per questo motivo inutile per tutti gli altri]. (Frege, 1879, p. V, traduzione nostra)

## 7. 4. Concetti in didattica della matematica con cenni al versante psicologico

Come già evidenziato all'inizio del presente capitolo, l'idea di concetto è centrale in didattica della matematica, in quanto strettamente legato all'apprendimento in generale o a ciò che in particolare viene chiamato "understanding" (p. e. Sfard, 1991; Grey & Tall, 1994) oppure "sense-making" (Scheiner, 2016) o ancora "knowing" (Radford, 2013). Pur nelle diversità, questi termini sembrano avere come denominatore comune il supporre che chi apprende deve fare propria una parte del sapere umano che fino a quel momento non gli appartiene come individuo.
A differenza della trattazione puramente filosofica, i cui punti focali erano le dimensioni ontologica e funzionale dei concetti, in questo paragrafo ci prefiggiamo di esaminare le diverse modalità con cui in didattica della matematica si suppone che si giunga alla concettualizzazione.
Nella maggior parte dei casi gli approcci alla concettualizzazione in didattica della matematica sono basati su teorie derivanti dalla psicologia della conoscenza e molto più di rado su teorie logiche, come quella fregeana, esposta nel paragrafo precedente.[70]
Nel paragrafo 7.4.1. ci occuperemo degli approcci ai concetti che vedono la loro costruzione come il risultato di un'*astrazione* (dalle azioni, dagli oggetti o da entrambe), senza però prendere in considerazione il contesto cognitivo e didattico in senso più ampio. In questo tipo di approcci il concetto è sostanzialmente considerato come una rappresentazione mentale. Dal punto di vista della classificazione proposta nella tabella 1, il concetto in questo contesto è, nella sua dimensione oggettuale, una rappresentazione mentale che esprime l'essenza del pensiero; nella sua dimensione strumentale, esso ha il ruolo di descrivere, organizzare, classificare e prevedere.
Successivamente, nel paragrafo 7.4.2., presenteremo due esempi di approccio ai concetti che mettono in primo piano l'aspetto legato al *contesto* di apprendimento nella costruzione dei concetti, ponendo l'accento sulla loro dipendenza dalle situazioni e quindi dal contesto. In questo tipo di approccio il concetto è

---

[70] Per *approccio psicologico* intendiamo un approccio in cui ciò che viene messo in primo piano non è un aspetto intersoggettivo dei concetti ma la loro dimensione soggettiva, legata agli aspetti cognitivi. In questo senso, per esempio, anche l'approccio aristotelico ai concetti è un approccio logico.

sostanzialmente considerato come un'abilità e la sua funzione strumentale consiste nell'essere in grado di trarre inferenze riguardo agli oggetti della conoscenza.
Nel paragrafo 7.4.3. ci occuperemo dell'uso dei termini *concetto* e *concezione* in didattica della matematica., cercando di delineare una loro caratterizzazione utile per la presente trattazione. In questo paragrafo verrà esposto anche un altro approccio ai concetti che si pone nell'ambito dei concetti come abilità dipendenti dal contesto.
Infine, nel paragrafo 7.4.4., presenteremo brevemente l'approccio ai *concetti scientifici* di Vygotskij, come ulteriore esempio di approccio alla concettualizzazione tratto dalla psicologia cognitiva.

### 7. 4. 1. Costruzione dei concetti per astrazione (concetti come rappresentazioni mentali)

Le ricerche sulla concettualizzazione per astrazione affondano le proprie radici nella nozione di *astrazione riflettente* (abstraction réfléchissante) di Piaget (Gattico, 2001). Piaget distingue tra *astrazione empirica* (che avviene per via delle azioni sugli oggetti fisici o in riferimento ai loro aspetti materiali, come per esempio il processo di conteggio di oggetti) e *astrazione riflettente* (che avviene tramite astrazione dalla coordinazione delle azioni interiorizzate dal soggetto e che non richiede più che il soggetto ripeta le azioni al fine di potersele prefigurare);[71] solo il secondo tipo di astrazione produce una conoscenza autentica. A differenza dell'astrazione empirica, l'astrazione riflettente è *interna*, cioè prodotta dal soggetto stesso e non dalla sua interazione con l'ambiente esterno. Questo tipo di astrazione porta alla costruzione di un nuovo *schema,*[72] come risultato della

---

[71] In realtà Piaget fa riferimento anche a un terzo tipo di astrazione, l'astrazione pseudo-empirica, che però è considerata da lui come un caso particolare dell'astrazione riflettente (Gattico, 2001).

[72] Uno *schema* (schème) è per Piaget "la structure ou l'organisation des actions telles qu'elles se transfèrent ou se généralisent lors de la répétition de cette action en des circonstances semblables ou analogues" [la struttura o l'organizzazione delle azioni come esse si trasferiscono o si generalizzano durante la ripetizione di questa azione in circostanze simili o analoghe] (Piaget & Inhelder, 1966, p. 11, traduzione nostra). Per Skemp, invece, uno *schema* (schema) è una *struttura concettuale* (conceptual structure) (Skemp, 2006/1976, p. 95). Una importante differenza tra queste due concezioni di schema sembra essere legata alla loro staticità/dinamicità: lo *schème* piagetiano sembra essere la relazione di trasferimento delle analogie tra azioni da una circostanza a un'altra, mentre lo schema di Skemp sembra essere una configurazione statica. Quanto appena affermato non si riferisce all'evoluzione nel tempo degli schemi, poiché una tale evoluzione dovrebbe valere, almeno in via di principio, sia per il concetto piagetiano sia per quello di Skemp. Ciò a cui ci stiamo riferendo è il modo di caratterizzare tali concetti: nel primo caso si potrebbe pensare metaforicamente allo *schème* come a un morfismo tra strutture e allo *schema* come a una struttura. Ancora diversa, anche se più vicina a quella piagetiana, è la concezione di *schema* di Vergnaud (1990, 1992), in cui si parla di un insieme di *schemi*, al plurale, che consente di cogliere in maniera più chiara la dinamicità, solo implicitamente presente nella concezione piagetiana, di *schème*. Esporremo in dettaglio l'idea di schema in Vergnaud nel paragrafo 7.4.2.1.

coordinazione delle azioni interiorizzate e dell'oggettivazione di un processo. La formazione di uno schema produce un nuovo modo di ragionare o di agire.
L'astrazione riflettente di Piaget ha fornito le basi per diversi lavori sulla costruzione dei concetti per astrazione. Scheiner (2016) propone un'interessante analisi degli approcci per astrazione che si basano sull'astrazione riflettente (che egli caratterizza come *astrazione dalle azioni*), e altri approcci, che invece si basano prevalentemente sull'*astrazione dagli oggetti* e che non originano direttamente dai lavori di Piaget, ma per esempio da quelli di Bruner (1966) o da quelli di Van Hiele (1986). Infine, Scheiner (2016) propone un nuovo approccio alla costruzione dei concetti per astrazione, che rappresenta una sintesi tra l'astrazione dalle azioni e l'astrazione dagli oggetti.
Nei prossimi quattro paragrafi seguiremo come filo logico il percorso tracciato da Scheiner, distinguendo prima tra approcci basati sull'astrazione dalle azioni e approcci basati sull'astrazione dagli oggetti, chiudendo infine con l'approccio unificante di Scheiner.

### 7. 4. 1. 1. Concetti per astrazione dalle azioni (astrazione riflettente)

#### 7. 4. 1. 1. 1. Astrazione riflettente e dualità processo-oggetto

La contrapposizione tra processo e oggetto nell'acquisizione della conoscenza in matematica è stata fondamentale per diverse ricerche sui concetti in didattica della matematica già a partire dai primi anni '90 del XX secolo (si vedano p.e. Dubinsky, 1991; Sfard, 1991; Gray & Tall, 1994).
In questo paragrafo presentiamo brevemente due di questi approcci ai quali abbiamo già fatto ripetutamente riferimento nei paragrafi precedenti e che Scheiner (2016) classifica come *approcci per astrazione dalle azioni*: la concettualizzazione tramite astrazione riflettente di Dubinsky (1991) e la doppia natura (procedurale e strutturale) delle nozioni matematiche astratte di Sfard (1991). Nel paragrafo successivo a quello presente verrà invece presentato l'approccio di Gray e Tall (1994), in cui gli autori introducono la nozione di *procept*, già citato nel capitolo 5.
L'approccio di Dubinsky (1991) ai concetti nasce da un'estensione delle ricerche piagetiane sull'astrazione riflettente[73] alla costruzione dei concetti della matematica avanzata. Notiamo infatti che Piaget si limita al pensiero logico di base dei bambini.
Ricordiamo che, come già esposto nel capitolo 6, secondo Dubinsky, la costruzione dei concetti matematici avviene tramite cinque forme caratteristiche dell'astrazione riflettente: *interiorizzazione* (interiorization), *coordinazione*

[73] Per Dubinsky l'astrazione riflettente è "the construction of mental objects and of mental actions" (Dubisky, 1991, p. 101), il che corrisponde sostanzialmente alla rispettiva definizione piagetiana.

(coordination), *incapsulamento* (encapsulation), *generalizzazione* (generalization) e *inversione* (reversal).
Prendendo spunto dall'epistemologia genetica di Piaget, Dubinsky elabora diversi esempi di quella che egli chiama la *decomposizione genetica* (genetic decomposition) dei concetti matematici:

> Our analysis of a particular mathematical concept leads to what we call a genetic decomposition of the concept which is a description, in terms of our theory, and based on empirical data, of the mathematics involved and how a subject might make the constructions that would lead to an understanding of it (Dubinsky, 1991, p. 96) (…) a genetic decomposition should make sense from a mathematical point of view, although it might not be exactly how the mathematician might have analyzed the subject in, thinking about how to teach it. (Dubinsky, 1991, p.108)

Dunque per Dubinsky spiegare come avviene l'apprendimento in matematica significa analizzare gli oggetti matematici in termini cognitivi, individuando gli schemi che gli studenti costruiscono e coordinano durante la concettualizzazione dei concetti matematici.
Un esempio di decomposizione genetica per il concetto di funzione è mostrato nello schema rappresentato in figura (Figura 15).

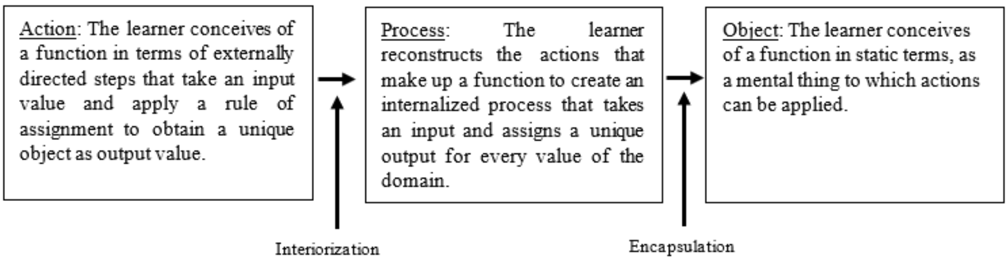



Figura 15. La decomposizione genetica del concetto di funzione
(tratto da Dubinsky, Vidakovic, & Weller, 2018, p. 452).

La fase dell'interiorizzazione avviene nel passaggio dall'azione al processo: prima lo studente concepisce la funzione come una sequenza di passi che trasformano, tramite l'applicazione di una regola, un valore di input in un unico valore di output; poi queste azioni vengono interiorizzate in un processo che non necessita più dell'espletamento dei passaggi dell'azione; infine, lo studente concepisce la funzione come un oggetto mentale, statico, sul quale è possibile compiere azioni come su un oggetto a sé stante.
Come afferma Dubinsky, le decomposizioni genetiche sono il frutto di tre componenti: la teoria che coinvolge i cinque metodi di astrazione riflettente

precedentemente elencati, le osservazioni empiriche in aula e la conoscenza matematica di chi elabora tali decostruzioni: “The genetic decomposition is then derived from a synthesis of these empirical results, our general theory, and our mathematical knowledge of the concept in question.” (Dubinsky, 1991, p. 105). L’Autore sottolinea inoltre che la decomposizione genetica non segue necessariamente quella dell’organizzazione consueta del sapere matematico, per esempio in un sistema assiomatico; inoltre, non è possibile parlare del*la* decomposizione genetica di un concetto matematico poiché una decomposizione genetica può generare diverse versioni.
Il secondo approccio che Scheiner individua, accanto a quello di Dubinsky, come fondato sull’astrazione dalle azioni, è quello di Sfard (1991).
Come già ampiamente discusso nel capitolo 6, l’Autrice mostra che sia nell’evoluzione storica delle nozioni matematiche astratte sia nella loro costruzione cognitiva da parte dell’individuo è possibile caratterizzare tre stadi consecutivi nella transizione dalla fase operativa a quella strutturale: *interiorizzazione* (interiorization), *condensazione* (condensation), *reificazione* (reification).
Anche Sfard esemplifica il suo approccio sulla base del concetto di funzione, mettendo in evidenza le sue caratteristiche operazionale e strutturale (Tabella 3).

| | **Operational** | **Structural** |
|---|---|---|
| **Function** | Computational process or<br>Well defined method of getting from one system to another (Skemp, 1971) | Set of ordered pairs<br>(Bourbaki, 1934) |

Tabella 3. Descrizione operazionale e strutturale della nozione matematica “funzione” (Sfard, 1991, p. 5). [74]

Durante la fase operazionale, la funzione è usata come strumento computazionale o relazionale tra due sistemi (per esempio tra due insiemi); questa fase corrisponde all’interiorizzazione e culmina nella condensazione; una volta avvenuto lo “shift ontologico” legato alla reificazione, la funzione viene percepita come oggetto a sé stante, dal quale sono assenti le caratteristiche dinamiche della fase operazionale. Come già sottolineato, per Sfard questo processo è comune allo sviluppo epistemologico della matematica come disciplina e all’evoluzione psicologica dello studente.
A un primo sguardo, i due approcci qui presentati (Sfard, 1991; Dubinsky, 1991) sembrano essere molto simili tra loro e anche i concetti di incapsulamento in Dubinsky (1991) e di reificazione in Sfard (1991) presentano forti somiglianze, già presentate nel capitolo 6. Questo aspetto è enfatizzato e analizzato in dettaglio

[74] Sul significato dei termini “operazionale” e “strutturale” rimandiamo al capitolo 6.

da Scheiner (2016), il cui obiettivo è quello di mostrare che in entrambi gli approcci vi è una precedenza cronologica di una fase operativa rispetto a una strutturale nella costruzione di nuovi concetti.
Nel confronto tra i due approcci, Scheiner giunge a un risultato che consiste in un accostamento tra gli stadi/le fasi della concettualizzazione nei due approcci (Figura 16): l'interiorizzazione è il punto di partenza per entrambi (per Sfard è un processo, per Dubinsky è un'azione); la condensazione in Sfard è accostata al coordinamento in Dubinsky (per entrambi questi sono dei processi); la reificazione è accostata all'incapsulamento (per Sfard il risultato è un oggetto; per Dubinsky, oltre all'oggetto, vi è anche lo schema).

| | **Sfard's theory of reification** | **Dubinsky's APOS theory** |
|---|---|---|
| **interiorization** | process | action |
| **coordination/ condensation** | process | process |
| **encapsulation/ reification** | object | object/schema |

Figura 16. Confronto tra l'approccio ai concetti matematici in Sfard (1991) e in Dubinsky (1991) come riportato da Scheiner (2016, p. 169).

Oltre alle differenze già evidenziate nel capitolo 6 tra reificazione e incapsulamento, a nostro avviso ci sono importanti differenze metodologiche e differenze relative al dominio di appartenenza dei risultati teorici ottenuti nei due approcci, ma dato che questo aspetto non è rilevante per il nostro obiettivo, non ci soffermiamo ulteriormente su esso.

#### 7. 4. 1. 1. 2. Il *procept*: una sintesi tra processo e oggetto tramite il simbolo

Torniamo alla caratterizzazione degli approcci ai concetti sulla base delle tipologie di astrazione proposta da Scheiner (2016).

Abbiamo visto che la prima tipologia, che si basa sull'astrazione riflettente di Piaget e che Scheiner (2016) chiama *astrazione dalle azioni*, contrappone una prima fase operativa, procedurale, a una seconda fase strutturale, e che è il passaggio dalla prima alla seconda, pur con le dovute distinzioni tra i due approcci esaminati, a permettere di interpretare ciò che prima era considerato un processo, come un oggetto a sé stante.
In questo genere di approccio all'astrazione dalle azioni, Scheiner classifica anche quello di Gray e Tall (1994), in cui gli autori propongono la nozione di *procept* come un ponte tra le due fasi evidenziate da Dubinsky e Sfard.
Come già accennato, il *procept* consente di usare un *simbolo* del linguaggio matematico per riferirsi sia al processo che genera un oggetto sia all'oggetto stesso, usandolo a volte in maniera procedurale, altre volte in maniera strutturale:

> We therefore use the portmanteau word "procept" to refer to this amalgam of concept and process represented by the same symbol. (…) An *elementary procept* is the amalgam of three components: a process which produces a mathematical object, and a symbol which is used to represent either process or object. (…) A *procept* consists of a collection of elementary procepts which have the same object. (Gray & Tall, 1994, p. 120)

Per comprendere la nozione di *procept* è necessario considerare che Gray e Tall mettono a confronto ciò che essi chiamano *pensiero procedurale* (procedural thinking) con quello che chiamano *pensiero proceptuale* (proceptual thinking). Il *pensiero procedurale* (procedural thinking) induce a vedere la matematica da un punto di vista algoritmico, cioè in termini di processo.[75] Il *pensiero proceptuale* (proceptual thinking), invece, consente di "manipulate the symbolism flexibly as process or concept, freely interchanging different symbolisms for the same object" (Gray & Tall, 1994, p. 121).
Dalla descrizione del concetto di *procept* e da quella di *pensiero proceptuale* si può dedurre che per giungere alla costruzione di un *procept*, il soggetto deve essere in grado di riconoscere diverse procedure e rispettivi simboli come riferiti allo stesso oggetto matematico.
Notiamo che questo aspetto costituisce il punto focale di quello che viene chiamato "il paradosso di Duval" (Duval, 1993, p. 38) e dell'intera teoria dei registri semiotici di Duval (1993).[76] Secondo la teoria dei registri semiotici, il

---

[75] Notiamo che gli autori distinguono tra il termine *processo*, che viene usato in maniera generica, per esempio per riferirsi al processo dell'addizione o al processo della soluzione delle equazioni, dal termine *procedura*, che riguarda invece specifici algoritmi matematici (Gray & Tall, 1994, p. 115–116).

[76] Il termine "paradosso di Duval" (Duval, 1993, p. 38) descrive il fenomeno paradossale secondo il quale chi apprende la matematica non può, a causa dell'inaccessibilità diretta degli oggetti matematici, fare a meno di confondere l'oggetto matematico con la sua rappresentazione. Seguendo Duval, l'attività matematica si svolge effettuando delle trasformazioni semiotiche all'interno dello stesso registro semiotico (effettuando cioè dei trattamenti) oppure passando da un registro semiotico a un altro (effettuando delle conversioni). La comprensione e la capacità di produrre pensiero matematico è legata, secondo l'Autore, alla capacità di coordinare in maniera

coordinamento tra più rappresentazioni semiotiche è fondamentale per l'apprendimento, ma esso costituisce anche lo scoglio principale per l'accesso alla conoscenza matematica.
Torniamo a ciò che Gray e Tall chiamano *pensiero proceptuale* (proceptual thinking). Esso risulta dalla capacità di ricorrere ai simboli come a dei *procept*, mantenendo intuitivamente un'ambiguità di denotazione per procedura e oggetto, ed è reso possibile dall'incapsulamento delle procedure e dal coordinamento di più *procept elementari*. Secondo gli autori è questa abilità di gestione implicita dell'ambiguità processo/oggetto, resa possibile dal simbolo, che contraddistingue il pensiero avanzato dei matematici. Essa si contrappone a un pensiero solo procedurale, che invece contraddistingue il pensiero di chi ha difficoltà in matematica (Gray & Tall, 1994, p. 5, pp. 7–8).
Scheiner nota che l'approccio di Gray e Tall è "bidirezionale", mentre quelli di Dubinsky e Sfard sono "unidirezionali" (Scheiner, 2016, p. 170). Per "unidirezionale", Scheiner intende il fatto che Sfard e Dubinsky mettono in evidenza solo il passaggio da una fase procedurale a una oggettuale, ma non il fatto che in realtà vi è un continuo passaggio o coordinamento tra questi due aspetti, anche nei due versi.
A nostro avviso la questione della uni- o bi-direzionalità non è ben posta poiché i domini di riferimento degli approcci confrontati non sono gli stessi. Infatti, le considerazioni fatte da Sfard e Dubinsky riguardano primariamente la *concettualizzazione* di un *nuovo* oggetto e non il suo *uso*. Nel caso di Dubinsky e Sfard si tratta di un *primo* passaggio da una conoscenza puramente strumentale a una che vede il concetto matematico come oggetto di riflessione a un livello superiore di astrazione. Gray e Tall, invece, fanno riferimento alla pratica matematica usuale, in cui è inevitabile una prospettiva *sincronica* tra processo e oggetto, dato che le due concezioni operativa e strutturale coesistono necessariamente in essa. In questa seconda prospettiva l'incapsulamento e la reificazione si dovrebbero dunque suppore come già avvenuti.
Il risultato dell'accostamento per analogia tra i tre approcci di Sfard (1991), Dubinsky (1991) e Gray e Tall (1994) proposto da Scheiner è riassunto nella Figura 17. Essa rappresenta un'estensione della Figura 16 del paragrafo precedente, riferita solo agli approcci di Sfard e Dubinsky. In particolare, possiamo notare che alla fase dell'interiorizzazione, comune a Sfard e Dubinsky, Scheiner fa corrispondere la *procedura* matematica in Gray e Tall; alla fase del coordinamento/della condensazione in Dubinsky/Sfard, egli fa corrispondere il processo (di coordinamento) in Gray e Tall; infine, alla fase dell'incapsulamento/della reificazione in Dubinsky/Sfard, Scheiner accosta la generazione del *procept* in Gray e Tall.

efficace registri semiotici differenti; in questo contesto si ha apprendimento solo se chi apprende è in grado di effettuare una tale coordinazione (D'Amore, 2015; Duval, 2011/2017).

| | Sfard's theory of reification | Dubinsky's APOS theory | Gray & Tall's theory of procept |
|---|---|---|---|
| **interiorization** | process | action | procedure |
| **coordination/ condensation** | process | process | process |
| **encapsulation/ reification** | object | object/schema | procept |

Figura 17. Confronto tra l'approccio ai concetti matematici in Sfard (1991), Dubinsky (1991) e Gray e Tall (1994), come riportato da Scheiner (2016, p. 169).

### 7. 4. 1. 2. Concetti per astrazione dagli oggetti (astrazione strutturale)

All'approccio tramite astrazione dalle azioni, Scheiner (2016) contrappone quella che egli chiama "astrazione dagli oggetti", a suo avviso trascurata nella ricerca in didattica della matematica a favore della prima. Secondo l'Autore, le due tipologie di astrazione sono invece complementari.
L'astrazione dagli oggetti non deve essere confusa con l'astrazione empirica di Piaget (Gattico, 2001). Scheiner prende infatti come punto di partenza il concetto di astrazione strutturale di Skemp (1986), secondo cui lo studio della formazione delle strutture in matematica è uno degli aspetti più importanti nella strutturazione del pensiero matematico. Scheiner mette però in evidenza il fatto che, mentre l'idea di astrazione strutturale di Skemp è legata al riconoscimento di *similarità* nelle esperienze del soggetto, quella che lui propone come complementare all'astrazione dalle azioni avviene per *complementarietà* di significato.
Scheiner individua nel lavoro di Tall (2013) alcuni elementi che richiamano l'astrazione dagli oggetti come essa viene intesa da lui. In particolare, Tall ipotizza, basandosi su Bruner[77] (1966, citato in Scheiner, 2016, p. 166) e Van

[77] Ricordiamo che Bruner teorizza tre modalità di rappresentazione mentale delle esperienze e delle azioni nell'interazione con il mondo esterno al soggetto: *rappresentazione esecutiva* (elaborazione solo di immagini di oggetti reali e azioni concrete); *rappresentazione iconica* (capacità di immaginazione indipendente dalle azioni concrete); *rappresentazione simbolica* (capacità di designare azioni e oggetti tramite simboli) (Bruner, 1966).

Hiele[78] (1986, citato in Scheiner, 2016, p. 166), tre diverse modalità di astrazione (structural, operational, formal), che corrispondono a tre diverse modalità di pensare in matematica: *conceptual embodiment*, *oparational symbolism*, *axiomatic formalism*, e di conseguenza a tre diversi "mondi" matematici: *practical mathematics*, *theoretical mathematics*, *formal mathematics* (Tall, 2013).
L'*astrazione strutturale* (structural abstraction) si basa sul riconoscimento, sulla descrizione e sulla definizione di proprietà degli oggetti; l'*astrazione operazionale* (operational abstraction) si basa sulle operazioni eseguite su oggetti che vengono incapsulate come oggetti mentali; l'*astrazione formale* (formal abstraction) si basa su deduzioni formali a partire da definizioni insiemistiche e consiste nella deduzione di proprietà di oggetti mentali formali.
È proprio l'astrazione strutturale che Scheiner (2016) classifica come un esempio di astrazione dagli oggetti.
Tall (2013) presuppone che l'astrazione strutturale avvenga tramite le percezioni durante le esperienze nell'ambito "Spazio e figure", in riferimento al *mondo della matematica pratica* (practical mathematics), e prosegua poi nell'ambito della geometria euclidea, nel *mondo della matematica teoretica* (theoretical mathematics), con le definizioni e dimostrazioni euclidee come esempio di ambiente embodied-formal. Nel caso dell'astrazione strutturale, sono le proprietà degli oggetti (geometrici) a essere concettualizzate come oggetti mentali (per esempio un triangolo rettangolo è concettualizzato sulla base della proprietà di possedere un angolo retto).
L'astrazione simbolica, invece, che avviene come astrazione dalle azioni, è riservata all'ambito "Numeri e Aritmetica", in riferimento al *mondo della matematica pratica* (practical mathematics); essa evolve poi in un'astrazione simbolico-formale che coinvolge l'algebra nel *mondo della matematica teoretica* (theoretical mathematics).
Infine, nel *mondo della matematica formale* (formal mathematics), l'astrazione è puramente formale, il modo di pensare è formale-assiomatico, le definizioni sono insiemistiche e le dimostrazioni sono *dimostrazioni matematiche* (mathematical proof) (Tall, 2013).
Non ci soffermiamo ulteriormente sull'approccio di Tall poiché esso non è di particolare interesse in questo punto della nostra trattazione. Notiamo soltanto che a nostro avviso esso rappresenta un approccio a quell'apprendimento che noi chiamiamo "genetico", il cui obiettivo sembra essere appunto una teoria dell'apprendimento, in cui il soggetto deve percorrere necessariamente tutti gli

[78] Ricordiamo che il modello di Van Hiele è un modello di origine empirica dell'apprendimento della geometria, messo a punto da parte dei coniugi Van Hiele; esso prevede cinque livelli (visualizzazione, analisi, astrazione, deduzione, rigore) che sono, a differenza degli stadi teorizzati da Piaget e Inhelder (1966), indipendenti dall'età, ma dipendenti dall'esperienza e dall'istruzione ricevuta; inoltre, i livelli sono strettamente gerarchici: è impossibile accedere al successivo senza aver fatto proprio un dato livello (Van Hiele, 1986). Tale modello è stato ampliato soprattutto da Tall (p. e. Tall, Yevdokimov, Koichu, Whiteley, Kondratieva e Cheng 2012; Tall, 2013), a modello generale dell'apprendimento dei concetti matematici.

stadi della scala evolutiva del sapere matematico organizzato in settori con specifici ruoli formativi. Così, per esempio, l'astrazione dagli oggetti (nell'ambito della geometria euclidea) dovrebbe precedere l'astrazione simbolica (nell'ambito dell'algebra) con ovvie ripercussioni di tali rigidità sul curriculum.
Dal nostro punto di vista l'interesse per l'approccio qui presentato risiede primariamente nell'esemplificazione di ciò che si potrebbe intendere per astrazione dagli oggetti, in contrapposizione all'astrazione dalle azioni, di cui abbiamo trattato nei paragrafi precedenti.

### 7. 4. 1. 3. Concetti per astrazione complementare da oggetti e processi (astrazione rifletturale)

In questo ultimo paragrafo relativo agli approcci per astrazione ai concetti esponiamo brevemente il quadro teorico ideato da Scheiner (2016), in cui l'Autore propone una sintesi tra astrazione dagli oggetti (che diventa primaria nel suo modello) e astrazione dalle azioni, attraverso quella che egli chiama *astrazione rifletturale* (reflectural abstaction):

> Although the interaction of the two abstraction processes involves a developmental progression, this does not imply that they involve a strict order or hierarchy. Rather, it is to be understood that the highest impact can be considered in the dialectic interaction between reflective and structural abstraction. This hand-in-hand process is more of an inextricably combined activity of reflective and structural abstraction, called reflectural abstraction (a blend of reflective and structural). (Scheiner, 2016, p. 176)

L'obiettivo che si prefigge l'Autore è, come si evince dal titolo dell'articolo,[79] quello di far sorgere "nuova luce su vecchi orizzonti", orientando gli approcci alla costruzione dei concetti verso una modellizzazione di "strategie portatrici di senso" (sense making strategies). A tale scopo, Scheiner intende riunire in un unico modello gli aspetti relativi a (i) la conoscenza matematica come essa è riconosciuta dai matematici; (ii) la costruzione dei concetti da parte degli studenti; (iii) l'attribuzione di senso da parte degli studenti a tale costruzione concettuale, sulla base delle diverse tipologie di astrazione da lui ipotizzate.
Le diverse tipologie di astrazione corrispondono a diversi profili di apprendimento: *riflessivo*, *strutturale* o *rifletturale* (reflectural) (Figura 18) e a diverse modalità di attribuzione di (o astrazione dal) significato. Le delimitazioni tra gli stili di apprendimento non sono tuttavia nette; esse esprimono più che altro una tendenza di fondo del soggetto.

[79] Il titolo dell'articolo è il seguente: "New light on old horizon: Constructing mathematical concepts, underlying abstraction processes and sense making strategies".

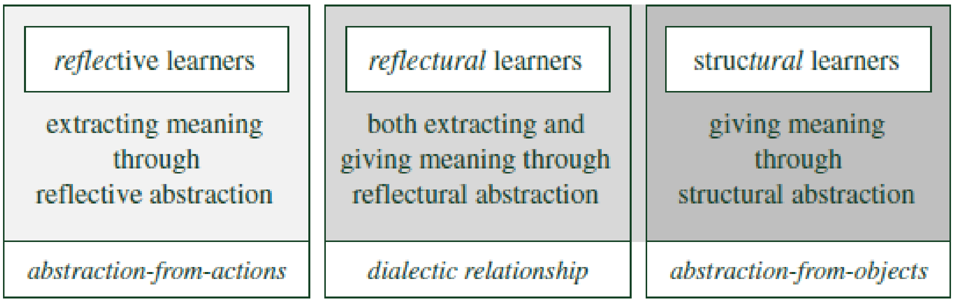



Figura 18. Stili di apprendimento sulla base della tipologia di astrazione e dell'attribuzione di significato.

Gli studenti con profilo riflessivo (reflective learners) *estraggono significato* degli oggetti matematici tramite astrazione riflettente, sulla base della coordinazione di azioni, come ipotizzato da Piaget e già evidenziato nei paragrafi precedenti: "For instance, learners may focus on actions on known objects, where they begin with the manipulation of meaningful components. Learners preferring this approach are termed reflective learners" (Scheiner, 2013, citato in Scheiner, 2016, p. 176).
Gli studenti con profilo strutturale (structural learners) *danno significato* ai concetti matematici tramite astrazione strutturale, sulla base del riconoscimento di proprietà, come nel caso dell'astrazione strutturale esposta nel paragrafo precedente: "Those learners build on a variety of previous knowledge structures and attribute meaning to the object of their thinking" (Scheiner, 2016, p. 176).
Sono dunque sostanzialmente due le strategie del dare senso tramite il riconoscimento di significato che lo studente può seguire: *estrarre* il significato degli *oggetti* matematici tramite astrazione dalle azioni o *dare* significato ai *concetti* matematici tramite astrazione dagli oggetti; tali tipologie di riconoscimento di significato si possono però anche intrecciare, producendo un mix di estrazione e attribuzione di significato, che porta a quello che Scheiner chiama *reflectural abstraction*.
Gli strumenti usati dall'Autore per la costruzione del modello sono molteplici; elenchiamo qui i principali: (1) la distinzione fatta da Frege tra senso e denotazione (1892b) e tra oggetto e concetto (1892b); tali distinzioni fungono da quadro generale del modello; (2) le relazioni messe in luce da Duval (2006) tra rappresentazione e senso e tra rappresentazione e denotazione, che Scheiner riconduce a Frege; le trasformazioni semiotiche riconducibili a Duval (1993), che l'Autore chiama "variazioni sistematiche" (Scheiner, 2016, p. 178); (3) l'*ascensione* (course of ascent) dall'astratto al concreto secondo Davydov (1972/1990) e Ilyenkov (1982); in questo contesto *ascensione* significa che "the concrete is realized in thinking through the abstract" (Ilyenkov, 1982, p. 37, citato

da Scheiner, 2016, p. 173). Notiamo che qui “astratto” e “concreto” sono categorie con un senso diverso rispetto a quello consueto: seguendo Wilensky, per Scheiner un oggetto è *concreto* per lo studente se egli ha una certa dimestichezza con esso, è in grado di ricorrere a diverse sue rappresentazioni e ha stabilito collegamenti tra esso e altri oggetti, mentre un oggetto è *astratto* per lo studente se tali condizioni non sono soddisfatte (Wilensky, 1991, citato in Scheiner, 2016, p. 172). Riportiamo lo schema riassuntivo che Scheiner propone del proprio modello (Figura 19). Chiuderemo il paragrafo con una sua discussione.

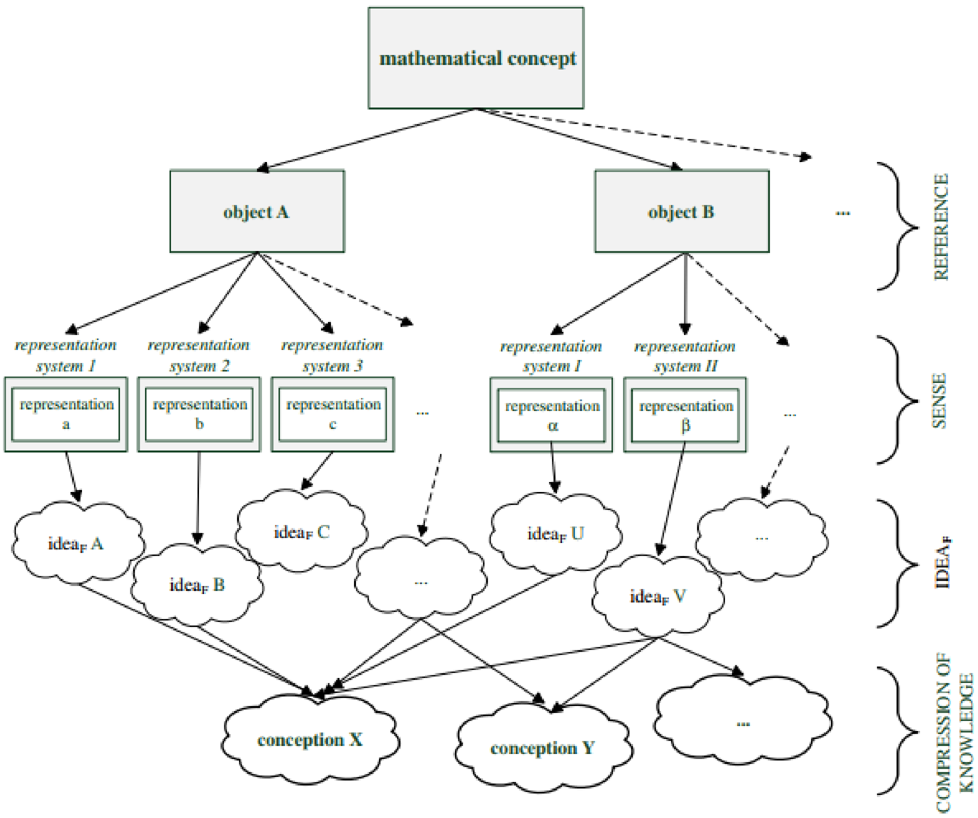



Figura 19. Schema riassuntivo del modello di concettualizzazione di Scheiner (2016, p. 179).

Tracciamo prima una rapida caratterizzazione dello schema e discutiamo poi alcune delle idee in esso espresse.
I termini *concept*, *object*, *reference*, *sense* e *idea* sono mutuati da Frege (1892a; 1892b) e dovrebbero dunque avere rispettivamente i significati di *Begriff*, *Bedeutung*, *Sinn* e *Vorstellung*, già esposti nel paragrafo 7.3.2.; inoltre Scheiner nota che Duval (2006) mutua da Frege l’abbinamento biunivoco tra senso e rappresentazione e che questo è l’uso fatto di tale relazione anche da parte sua.

Diremo più avanti a che cosa si riferisce l'espressione "compression of knowledge".
Il punto di partenza del modello è il *concetto matematico*, inteso in termini di sapere matematico riconosciuto. Il concetto viene conosciuto tramite le contestualizzazioni di diversi oggetti (tra loro complementari) che cadono sotto tale concetto. Lo studente incontra, durante il processo cognitivo, non il concetto matematico, ma appunto degli oggetti che "cadono sotto" quel concetto (Scheiner, 2016, p. 172). Tali oggetti rappresentano ciascuno un qualche aspetto strutturale diverso del concetto e possono essere astratti o concreti nel senso già evidenziato. Lo studente compie un'astrazione dagli oggetti (astrazione strutturale dalle proprietà riconosciute) tramite i diversi sensi associati alle rappresentazioni nei rispettivi sistemi di rappresentazione. Citando Duval, Scheiner afferma che per giungere al significato dell'oggetto, potrebbero rendersi necessarie delle "systematic variations within a representation system"[80] (Scheiner, 2016, p. 178). A ogni rappresentazione lo studente associa un'idea soggettiva "intesa in senso fregeano" (Scheiner, 2016, p. 178).[81] Attraverso la coordinazione delle diverse idee, lo studente compie un'astrazione dalle azioni (astrazione riflettente) che lo porta a comprimere la conoscenza derivata da più oggetti in strutture di conoscenza più compatte e ricche di significato, che Scheiner chiama *concezioni*. In questo modo si ha una combinazione tra astrazione strutturale (structural abstraction) e riflettente (reflective abstraction), che l'Autore chiama appunto *astrazione riflettuarle* (reflectural abstraction).
Proponiamo di seguito una nostra analisi di alcuni aspetti del modello di Scheiner. Come già evidenziato, il punto di partenza del modello è il *concetto matematico* in termini di sapere matematico ufficialmente riconosciuto dalla comunità matematica; o almeno questo è ciò che si evince implicitamente dal testo, dato che una definizione di tale termine non viene fornita. Tuttavia, mentre per gli oggetti matematici esistono delle definizioni riconosciute, per i concetti matematici non esistono tali definizioni e quindi l'idea di concetto matematico rimane poco chiara in questo contesto.
Dato che il modello di Scheiner si basa sulla distinzione tra oggetto e concetto in Frege (1982a), cerchiamo di capire come l'uso del termine *concetto* in Scheiner possa essere ricondotto a quello in Frege. A tale scopo indaghiamo il significato di tale termine indirettamente, tramite il suo uso in contesto. Consideriamo per esempio la seguente citazione: "the essence of a concept is almost always contained in the unity of diverse meaningful components of a variety of specific objects that fall under the particular concept" (Scheiner, 2016, p. 172). Il riferimento agli oggetti che "cadono sotto un concetto" è tratto da Frege, come si

---

[80] Notiamo che l'Autore non specifica che cosa si debba intendere per "sistema di rappresentazione" e non usa mai il termine "semiotico" o "registro semiotico", nonostante citi Duval (2006).
[81] Il pedice "F" nel simbolo usato per designare le idee sta per indicare che il termine si riferisce a Frege.

evince anche dalla seguente citazione: "In order to get access to the meaning of a concept, the concept 'must first be converted into an object, or, more precisely, an object must go proxy for it […]' (Frege, 1892a, p. 197)" (Scheiner, 2016, p. 172). Da queste citazioni traiamo due conclusioni: (1) il concetto è qualcosa di "meaningful", cioè significativo per un soggetto (questo aspetto si basa sulla prima citazione di Frege); (2) il concetto è qualcosa che deve essere convertito in oggetto affinché si possa risalire al suo significato (quest'ultimo aspetto si basa sulla seconda citazione di Frege).

Riguardo al punto (1), notiamo che la caratteristica messa in evidenza da Scheiner è di carattere soggettivo e quindi psicologico (il concetto può essere considerato *meaningful* solo in riferimento all'immagine che di esso si fa un singolo soggetto), piuttosto che logico, mentre Frege (1892a, citato da Scheiner e da noi discusso nel paragrafo 7.3.2.) premette che ha deciso di seguire rigorosamente un'interpretazione *logica*, dunque oggettiva, piuttosto che psicologica, del termine *concetto* (Frege, 1892a, p. 192).

Quindi, come abbiamo evidenziato ripetutamente, l'idea di concetto in Frege è un'idea puramente logico-linguistica e quindi non può fungere da base per interpretazioni mentaliste e psicologiche, cosa che invece sembra supporre Scheiner.

Riguardo al punto (2), la citazione riportata da Scheiner è stata discussa da noi nel capitolo 7.3.2, mettendo in evidenza che per Frege "cadere sotto un concetto" è una relazione logica tra una funzione proposizionale e un insieme di costanti che possono fungere da argomento di tale funzione. In questo senso un concetto (funzione proposizionale) di per sé non ha significato, ma lo assume nel momento in cui si "concretizza" tramite una costante logica, diventando una proposizione. In questo senso (che è, ripetiamo, puramente logico-linguistico), il concetto assume significato attraverso un oggetto che cade sotto esso ("an object must go proxy for it", secondo la citazione fregeana riportata da Scheiner).

Per esempio, nel caso della funzione proposizionale "$x$ è un numero pari", "è un numero pari" è il concetto, che funge da predicato, mentre "$x$" è l'occorrenza libera che può essere occupata dagli oggetti che possono cadere sotto il concetto "essere numero pari". Dunque, gli oggetti qui sarebbero tutti i numeri pari. In che senso un singolo numero pari possa essere inserito in un contesto e fornire una interpretazione significativa (*meaningful*), non è chiaro.

Ricordiamo che anche il significato delle proposizioni (cioè la loro denotazione o *reference* in inglese) in Frege è di natura logica e può assumere solo due valori: vero o falso. Inoltre, come abbiamo già messo in evidenza, un concetto non può assumere il ruolo di oggetto in una frase predicativa. Una proposizione, invece, può fungere a sua volta da soggetto. Infatti, essa non ha occorrenze libere, mentre una funzione proposizionale, cioè un concetto, è "insatura", cioè non ha il grado di determinatezza necessario per svolgere il ruolo di soggetto. Espresso in altro modo: una funzione proposizionale non può fungere, secondo Frege, da argomento di un'altra funzione proposizionale.

Si potrebbe pensare che in realtà Scheiner intenda che sono degli altri concetti a cadere sotto il concetto iniziale. Come evidenziato nel paragrafo 7.3.2, Frege contempla in effetti la relazione di "essere subordinato a" tra un concetto di primo e un concetto di secondo livello, ma essa è di tutt'altra natura rispetto a quella di "cadere sotto", che si stabilisce tra un oggetto e un concetto (Frege,1892a, p. 200). Quindi, se Scheiner intendesse questo tipo di relazione, la citazione di Frege relativa agli oggetti che cadono sotto il concetto non sarebbe pertinente.
Ci riesce dunque difficile comprendere la citazione di Scheiner secondo cui dovrebbero essere delle componenti *significative* (meaningful) degli oggetti che cadono sotto il concetto, a fornire l'"essenza" del concetto. La chiave di lettura sembra risiedere prima di tutto nell'interpretazione puramente psicologica di *concetto* fornita dall'Autore, che confligge fortemente con quella logica in Frege, la quale dovrebbe invece costituire la base teorica per la struttura del modello.
Per cercare di comprendere meglio che cosa Scheiner possa intendere per oggetti che cadono sotto un concetto, riportiamo la seguente citazione, nella quale l'Autore distingue l'uso che egli fa del termine "strutturale" da quello che di esso fa Sfard, quando si riferisce all'aspetto strutturale delle nozioni matematiche astratte, identificando tale aspetto strutturale con l'oggetto matematico:

> The term 'structural' employed in this article, however, refers to both the structure of mental objects and the structure of knowledge. These two interrelated ideas are implicit in the notion of 'structural': Structures underlying the specific objects falling under a particular mathematical concept are represented as mental structures when placed into several contexts and situations, and those mental structures are further restructured (through complementarizing of meaningful components) with the aim to construct highly complex and coherent knowledge structures. (Scheiner, 2016, pp. 174–175)

Dunque, parlando di oggetti, Scheiner si riferisce a *strutture mentali*, piuttosto che a oggetti designati da un segno che può fungere da soggetto in una frase predicativa, come invece fa Frege. Scheiner sottolinea che nel suo modo di intendere il termine "structural" egli non si riferisce solo a *un* oggetto matematico e in ogni caso non all'oggetto solo in termini insiemistici o formalisti, come invece fa Sfard (1991), ma a più oggetti che "cadono sotto" tale concetto e che rivelano un significato attraverso la loro collocazione in un contesto, nonché attraverso le loro reciproche relazioni:

> In addition to a formalist interpretation (in terms of set-theoretic definition and deduction), the notion of 'structural' includes the view that the richness of the particular is embodied not in the concept as such but rather in the objects falling under the concept—the particular is reflected in the context where the objects are placed in. (Scheiner, 2016, p. 175)

La collocazione in contesto degli oggetti matematici è riferita da Scheiner all'idea di modello:[82] "The process of placing objects into different specific contexts may have to be guided by using a realistic model or by taking a specific perspective. (…) A realistic model, in its broad sense, can be, for instance, a metaphor or generic representation" (Scheiner, 2016, p. 172).
In che senso un'espressione che deve poter fungere da soggetto linguistico in una frase proposizionale (Frege, 1892a) possa essere inserita nel contesto di un modello realistico non risulta chiaro. Che una metafora possa fungere da modello per un tale genere di oggetto sembra più comprensibile. Infatti, una metafora può essere sia una figura retorica, quindi un costrutto linguistico, sia una metafora concettuale, intesa nel senso di Lakoff e Núñez, dove la *metafora concettuale* è il meccanismo attraverso il quale l'astratto è compreso in termini di concreto (Lakoff & Núñez, 2000). Questa lettura sarebbe anche in accordo con il riferimento che Scheiner fa *all'ascensione dall'astratto al concreto* secondo Ilyenkov (1982) e rappresenta a nostro avviso un aspetto molto interessante del modello. Tuttavia, anche in questo caso continua a sussistere il problema della contraddizione logico-psicologica relativa all'interpretazione dell'idea di "oggetto che cade sotto un concetto" evidenziata in precedenza.
Un'altra ambiguità nell'interpretazione del pensiero fregeano è presente, a nostro avviso, nell'uso che Scheiner fa del termine "idea" in riferimento a Frege. È vero che Frege usa il termine *Vorstellung* (idea) (Frege, 1892b) e spiega il suo significato prettamente soggettivo, come evidenziato da Scheiner, ma lo fa per maggiore chiarezza, come egli stesso scrive, per evitare che si possa confondere il significato del termine *idea* (Vorstellung) con quello dei termini *senso* o *denotazione*. Le idee, che sono rappresentazioni che dipendono dalla "coscienza individuale" (Frege, 1892b, pp. 29–30), non hanno infatti posto nel sistema logico-linguistico fregeano. Dunque, nel momento in cui Scheiner ricorre al termine *idea* richiamandosi a Frege, dovrebbe chiarire come tali idee si collegano al senso, dato che questo non è spiegato da Frege.
Concludiamo la discussione del modello di Scheiner ribadendo che esso mette in luce aspetti importanti della concettualizzazione in matematica e il tentativo di sintesi che propone è di estremo interesse. Tuttavia, riteniamo che la mancanza di coerenza tra le interpretazioni psicologiche dell'Autore e quelle logiche del quadro di riferimento fregeano compromettano fortemente la sua validità teorica. Come esso possa funzionare dal punto di vista pratico non è dato sapere, poiché l'obiettivo dell'articolo esaminato è esclusivamente di natura teorica e l'Autore non porta esempi che potrebbero essere utili per chiarire la natura degli elementi coinvolti e le relazioni che tra essi intercorrono.
In conclusione, possiamo affermare che, nonostante i riferimenti fatti da Scheiner (2016) ai lavori di Frege, che potrebbero far pensare a una visione dei concetti come oggetti astratti o come segni linguistici nel senso fregeano, abbiamo visto

[82] Scheiner cita a tale proposito "the *Dutch Realistic Mathematics Education* (rooted in Freudenthal and his colleagues' work)" (Scheiner, 2016, p. 172).

che l'approccio di Scheiner rimane comunque di natura psicologica e non logica. Il concetto è dunque, anche in questo contesto, una rappresentazione mentale e serve per descrivere, organizzare, classificare o prevedere, anche se vi è un tentativo di integrare il suo aspetto logico come segno linguistico.
Crediamo inoltre che il riferimento fatto da questo Autore alle strategie di estrazione o attribuzione di significato non possa essere considerato come un indizio a favore di una considerazione di concetti come abilità poiché le abilità di estrazione/attribuzione di significato sono attività compiute *sugli* oggetti o *sui* concetti e non sono esse stesse considerate dei concetti. Detto diversamente: i concetti non sono le azioni di astrazione ma sono delle rappresentazioni mentali e le rappresentazioni mentali non possono essere considerate delle abilità.
Nel paragrafo 7.4.3. esporremo un altro approccio ai concetti di stampo costruttivista (Simon, 2017), il cui obiettivo non è però quello di caratterizzare le modalità di concettualizzazione del soggetto apprendente ma quello di fare chiarezza sulla differenza tra concetti e concezioni. Essendo quest'ultimo argomento trasversale a diversi approcci teorici in didattica della matematica, abbiamo scelto di dedicargli un paragrafo a parte.
Nei prossimi paragrafi presenteremo due esempi (uno nel paragrafo 7.4.2. e uno nel paragrafo 7.4.3.) di approcci ai concetti che, in riferimento alla classificazione dei concetti dal punto di vista filosofico proposto nel paragrafo 7.3.1. del presente capitolo, si collocano nell'ambito dei concetti visti come abilità.

### 7. 4. 2. Concetti come invarianti situazionali (concetti come abilità)

Due approcci ai concetti che sono nati nell'ambito della teoria delle situazioni didattiche (TSD) (Brousseau, 1986)[83] sono la teoria dei campi concettuali di Vergnaud (1990) e l'approccio ai concetti di Balacheff (1995). Quest'ultimo sfocia poi nel modello cK¢ (Balacheff & Margolinas, 2005; Balacheff, 2017).
L'idea di concetto è simile nei due approcci poiché quella di Balacheff si basa su quella di Vergnaud, ma ci sono anche delle differenze che metteremo in evidenza quando esporremo il modello di Balacheff. In questo paragrafo presentiamo solo l'approccio di Vergnaud, a titolo esemplificativo per i concetti considerati come abilità, mentre quello di Balacheff verrà presentato nel paragrafo 7.4.3., dedicato alla distinzione tra concetti e concezioni.

[83] Notiamo qui che la TSD viene considerata da alcuni autori la prima teoria *interna* alla didattica della matematica, cioè una teoria nata in seno alla didattica della matematica nel senso evidenziato da Assude, Boero, Herbst, Lerman, e Radford, 2008, p. 6, mentre per altri è la didattica della matematica che viene creata come disciplina attraverso la creazione della TSD, in quanto prima teoria in essa (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2013).

### 7. 4. 2. 1. I campi concettuali di Vergnaud

Ciò che differenzia l'idea di concetto in Vergnaud (1990) dagli approcci per astrazione finora esposti è il fatto che più che descrivere il *modo* con cui lo studente concettualizza, Vergnaud affronta la questione della tipologia di elementi operatori che intervengono in riferimento a un contesto. Detto diversamente, Vergnaud cerca di individuare gli invarianti operatori che determinano la costituzione di un concetto, piuttosto che di caratterizzare il suo modo di costituirsi nella mente del soggetto.
Come evidenzia D'Amore: "Ci sono due accezioni (almeno) di concetto: concezione quando si parla di un soggetto [e] più propriamente concetto, quello elaborato dalla cultura" (D'Amore, 2011, p. 23). Possiamo affermare che la teoria dei campi concettuali di Vergnaud fa riferimento a questa seconda accezione di concetto.
Un'idea centrale nella teoria dei campi concettuali è quella di *schema*. Si tratta di un'idea che abbiamo già incontrato nella maggior parte dei lavori sulla concettualizzazione per astrazione e nel paragrafo 7.4.1. abbiamo anche fatto cenno a diverse accezioni con cui tale termine viene usato in didattica della matematica. Per Vergnaud, uno schema è una "organisation invariante de l'activité pour une classe de situations données" [una organizzazione invariante dell'attività per una classe di situazioni date] (Vergnaud, 1990, p. 136, traduzione nostra). Vediamo dunque che, rispetto alle altre concezioni di *schema* finora considerate, quella di Vergnaud ha una componente in più: si tratta della componente *situazione*.
Come scrivono Pécaud e Nagels:

> (…) il ne faut pas chercher, comme le fait Piaget, les régularités (Vergnaud écrit: les 'invariants opératoires') de l'activité humaine à un niveau très général, mais bien se concentrer sur des situations concrètes, caractéristiques d'une activité donnée [non si devono cercare, come fa Piaget, le regolarità (Vergnaud scrive: gli 'invarianti operatori') dell'attività umana a un livello troppo generale, ma piuttosto concentrarsi su delle situazioni concrete, caratteristiche di una data attività]. (Pécaud & Nagles, 2015, p. 92, traduzione nostra)

Secondo questa prospettiva, lo schema è dunque prima di tutto un invariante situazionale a livello concreto e non a livello delle modalità di astrazione, come invece viene supposto nei diversi approcci legati all'astrazione. Uno schema non può quindi essere considerato separato dall'ambiente in cui si forma e in cui agisce: "Non si può capire lo sviluppo di un concetto senza inserirlo in un sistema e si è poi obbligati a studiare questo sistema, il campo concettuale, per potersi appropriare del concetto" (D'Amore, 2011, p. 23). Questo aspetto dello schema mette in evidenza il suo ruolo adattativo all'ambiente, cioè al *milieu* (Brousseau, 1986).
Anche per Vergnaud, come anche per altri autori citati in precedenza in riferimento al termine *schema* (Piaget & Inhelder, 1966; Skemp, 1976/2006), uno schema è

un invariante organizzativo, tuttavia per Vergnaud esso dipende primariamente dal contesto piuttosto che dalle facoltà mentali del soggetto. Infatti, lo schema per Vergnaud è anche, da un punto di vista funzionale, "une totalité dynamique fonctionnelle" [totalità dinamica funzionale] (Vergnaud, 2001, p. 4). In questa accezione di *schema*, il focus non è dunque fissato sul soggetto apprendente e sugli atti mentali che esso compie nell'apprendimento, ma sulla situazione che lo mette in condizioni di farlo.
Partendo da questi presupposti, Vergnaud definisce un campo concettuale come un insieme di situazioni e di concetti (Vergnaud, 1990). Un concetto è in questo contesto una terna ordinata di insiemi $C = (\mathrm{S}, I, \mathcal{S})$ dove:

- $S$ è l'insieme delle situazioni che danno senso al concetto (il referente);
- I è l'insieme degli invarianti sui quali si basa l'operatività degli schemi (il significato);
- $\mathcal{S}$ è l'insieme delle forme linguistiche e non linguistiche che permettono di rappresentare simbolicamente il concetto, le sue procedure, le situazioni e le procedure di trattazione (il significante). (Vergnaud, 1990, p. 139)

Si può dire che un soggetto padroneggia un concetto se padroneggia le situazioni che lo caratterizzano tramite la messa in atto di invarianti appropriati e tramite l'uso delle forme linguistiche appropriate.
Dalla definizione fornita possiamo notare che, nell'approccio di Vergnaud, un ruolo centrale è riconosciuto non solo alle situazioni in cui si formano gli invarianti, ma anche alle forme linguistiche che permettono di designare e trattare algoritmicamente la conoscenza.
Inoltre, nella definizione di concetto fornita da Vergnaud sono già presenti sia l'aspetto relativo al senso sia l'aspetto relativo al significato, la cui assenza in riferimento ai concetti nel panorama della didattica della matematica Scheiner (2016) evidenziava, cercando di gettare "nuova luce su vecchi orizzonti" attraverso il ricorso alla distinzione tra senso e significato secondo Frege. Notiamo inoltre che la definizione di Vergnaud presenta già una distinzione del significato in senso (inteso come significante) e denotazione (inteso come invarianti operatori), che trova una buona corrispondenza in quella analoga fatta da Frege (1892b). Infatti, ricordiamo che in Frege il significato (denotazione) delle frasi di senso compiuto è definito solo in termini proposizionali. Si tratta di un aspetto che troviamo anche nella teoria dei campi concettuali di Vergnaud, dove gli invarianti operatori possono essere:
(a) del genere delle proposizioni (sono classificabili dunque come veri o falsi; se sono ritenuti veri dal soggetto sono detti *teoremi-in-atto*);
(b) del genere delle funzioni proposizionali, che diventano delle proposizioni una volta che alle variabili individuali è assegnata una costante individuale (sono detti *concetti-in atto*);
(c) del genere argomento, che possono essere oggetti, relazioni, proposizioni, funzioni proposizionali o altro: si tratta di istanziazioni di variabili o esempi di

funzioni proposizionali, o proposizioni stesse (D’Amore, Fandiño Pinilla, & Sbaragli, 2017, p. 130).
I *teoremi-in-atto* sono sostanzialmente delle proposizioni della forma se…allora…, ritenute vere dal soggetto, che gli permettono di agire nel contesto e sono necessari per il trasferimento degli schemi a nuove classi di situazioni, cioè per le generalizzazioni (D’Amore, 2011, p. 23).
I *concetti-in-atto*, invece, sono delle funzioni proposizionali che esprimono delle relazioni generali, ma nel momento in cui trovano applicazione in un contesto e le variabili proposizionali assumono un valore, possono diventare dei teoremi-in-atto.
In Vergnaud troviamo anche la distinzione tra processo e oggetto, di cui abbiamo trattato nei paragrafi precedenti e che ci consente di ricollegarci a quanto già scritto in precedenza nel paragrafo 7.4.2.1. Infatti, secondo Vergnaud, la concettualizzazione, sia nell’esperienza quotidiana sia durante l’apprendimento in matematica, consiste nel passaggio dal concetto-come-strumento al concetto-come-oggetto e in questo passaggio un ruolo particolarmente importante è rivestito dalla nominalizzazione (D’Amore, Fandiño Pinilla, & Sbaragli, 2017, pp. 130–131). Dunque, il soggetto concettualizza nel momento in cui è in grado di oggettivare un processo che ha avuto fino a quel momento solo il ruolo di strumento. Notiamo qui il forte parallelo con la doppia natura degli oggetti matematici messa in evidenza da Sfard (1991) e il ruolo delle rappresentazioni nella reificazione.
Notiamo tuttavia anche un’interessante differenza rispetto a quanto afferma Vygotskij (1934, p. 168 e pp. 177–178), cioè che l’acquisizione del termine che denota un oggetto non è che l’inizio del processo della formazione del concetto.
La contraddizione tra quanto affermato da Vergnaud e quanto affermato da Vygotskij è tuttavia solo apparente, poiché è necessario distinguere tra l’acquisizione nel proprio vocabolario di un nuovo termine che denota un *concetto scientifico* (Vygotskij) e il riferimento intenzionale a un processo tramite un nome che sostiene la sua oggettivazione, cioè l’atto di nominalizzazione (Vergnaud). Notiamo infatti che anche Vygotskij chiude il cerchio affermando che

> (…) осознать какую-нибудь операцию – это значит перевести её из плоскости действия в плоскость языка, т. е. воссоздать её в воображении, чтобы можно было выразить её словами [(…) diventare consci di una qualsiasi operazione – significa spostarla dal piano dell’azione al piano del linguaggio, cioè ricrearla nell’immaginazione in modo tale che sia possibile esprimerla a parole]. (Vygotskij, 1934, p. 184, traduzione nostra)

Diremo di più sull’approccio di Vygotskji nel paragrafo 7.4.4.1.
In conclusione, possiamo affermare che uno degli aspetti più importanti che contraddistinguono l’approccio di Vergnaud ai concetti è il fatto che esso dirige l’attenzione sul carattere contestuale e operativo della conoscenza razionale, invece che sulla sua dipendenza dall’astrazione e quindi dagli aspetti mentali. L’astrazione è dunque in questo caso una sorta di generalizzazione di contesto,

piuttosto che un'astrazione dalle azioni o dagli oggetti, come evidenziato invece nei casi degli approcci affrontati nei paragrafi precedenti.
Come già accennato, l'approccio di Vergnaud si colloca nell'ambito della TSD. In tale teoria uno studente ha appreso un dato contenuto matematico se è in grado di risolvere le situazioni problematiche considerate paradigmatiche per tale contenuto. Facendo riferimento all'inquadramento dei concetti dal punto di vista filosofico (si veda il primo paragrafo del presente capitolo), in Vergnaud il concetto è inteso, dal punto di vista oggettuale, in termini di abilità di un soggetto cognitivo di distinguere le caratteristiche degli oggetti della conoscenza e, dal punto di vista strumentale, in termini di capacità di fare inferenze su tali oggetti.
Notiamo infine che, nonostante il punto focale nella teoria dei campi concettuali non sia l'astrazione, l'aspetto legato alla dualità processo-oggetto con la precedenza del primo sul secondo, che Scheiner fa risalire all'astrazione riflettente di Piaget, non è estranea nemmeno all'approccio dei campi concettuali di Vergnaud. Inoltre, in Vergnaud il ruolo della nominalizzazione per il passaggio dal processo all'oggetto è molto simile a quello messo in evidenza da Sfard (1991).

### 7. 4. 3. Concetti e concezioni: le dimensioni soggettiva e oggettiva dei concetti

Una distinzione che si incontra di frequente nelle ricerche in didattica della matematica è quella tra concezione e concetto (si vedano p. e. Brousseau, 1976/1983; Confrey, 1986; Artigue, 1991; Sfard, 1991; Balacheff, 1995, 2017; D'Amore, 2001a, b; Simon, 2017). Ci sembra dunque importante cercare di comprendere quali possano essere le accezioni con cui vengono usati questi due termini.
A tale proposito sono significative le parole di Balacheff (1995), che a sua volta cita Artigue (1991):

> Le mot 'conception' est utilisé depui nombreuses années dans les recherches sur l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques, on le trouve chez Brousseau (1976) chez Confrey (1986) mais il fonctionne 'sans qu'au départ les autres semblent éprouver le besoin d'un donner une définition didactique' (Artigue, 1991, p. 266). [La parola 'concezione' è usata da molti anni nelle ricerche sull'apprendimento e l'insegnamento della matematica, la si trova sia in Brousseau (1976) sia in Confrey (1986) ma essa funziona 'senza che si avverta la necessità di fornire di essa una definizione didattica prima degli altri' (Artigue, 1991, p. 266)]. (Balacheff, 1995, p. 225, traduzione nostra)

Nonostante diversi autori abbiano fornito definizioni o caratterizzazioni più o meno articolate dei termini concezione e concetto (si vedano p. e. Artigue, 1991; Sfard, 1991, Balacheff, 1995), nel 2017 Simon ribadisce quanto segue: "However, the meanings of the terms [concetto e concezione] are often not problematized and as a result are typically underspecified" (Simon, 2017, p. 118). Torneremo più

avanti nel presente paragrafo sulla definizione di concezione e concetto che fornisce Simon.
Ciò che compare in un certo senso come un invariante nelle diverse idee o definizioni di concezione e concetto in letteratura, sembra consistere nel considerare le concezioni come qualcosa di più soggettivo e meno stabile rispetto ai concetti, che sembrano essere considerati come più oggettivi.
Per esempio, Sfard distingue come segue tra concezione e concetto:

> The word "concept" (sometimes replaced by "notion") will be mentioned whenever a mathematical idea is concerned in its "official form"- as a theoretical construct within "the formal universe of ideal knowledge"; the whole cluster of internal representations and associations evoked by the concept-the concept's counterpart in the internal, subjective 'universe of human knowing'- will be referred to as "conception". (Sfard, 1991, p. 3)

In maniera analoga, per Artigue (1991) le *concezioni* sono diversi punti di vista di uno stesso oggetto matematico (ciò che in Sfard è il "costrutto teoretico dell'universo formale della conoscenza ideale" è per Artigue un *oggetto matematico*), mentre il *concetto* è la controparte concettuale dell'oggetto, condivisa da parte degli esperti in didattica della matematica.
Per D'Amore (1999), il concetto può essere inteso come un'idea, "anche se in *idea* c'è implicita anche una sorta di rappresentazione mentre il concetto potrebbe anche esserne immune" (D'Amore, 1999, p. 196). In questa accezione di concetto, l'idea sembra avere una caratteristica più personale, vicina a quella che Sfard e Artigue chiamano *concezione*, ma anche avente aspetti in comune con delle rappresentazioni mentali, mentre il concetto sembra essere qualcosa di più oggettivo, che non è necessariamente legato a rappresentazioni soggettive. Ricordiamo inoltre la già citata distinzione fatta da D'Amore tra *concezione*, quando ci si riferisce a un soggetto, e *concetto*, quando si parla di un sapere elaborato dalla cultura (scientifica) di riferimento (D'Amore, 2011, p. 23).
Per Confrey (1981), è importante sottolineare il fatto che la "verità" dei concetti matematici non può essere valutata con standard esterni e assoluti ma solo in termini di capacità di svolgere una certa funzione per un individuo (ruolo privato o individuale del concetto) o per un insieme di individui (ruolo pubblico o collettivo del concetto). In questo senso egli evidenzia che:

> In looking for a definition one can consider concepts as having both a private (individual) and a public (collective) role. In their private role concepts allow people to organize and select information and make sense of their experience: in their public role concepts must be subjected to collective scrutiny in order to judge their precision, their effectiveness, and their correspondence with the world as experienced by others. (Confrey, 1981, p. 8)

Come nota Balacheff, Confrey usa il termine *conception* "to refer to the rationale of students' answers to a given problem or question" (Confrey, 1990, citato da Balacheff, 2010, p. 122).

Anche Tall e Vinner (1981) distinguono tra concetti *personali* e concetti che loro chiamano *formali*, attribuendo ai primi un significato simile a quello di concetto *individuale* in Confrey e ai secondi un significato legato al punto di vista della comunità matematica. Inoltre, questi autori ricorrono alla distinzione tra *concept image* e *concept definition*:

> We shall use the term concept image to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures. We shall regard the concept definition to be a form of words used to specify that concept. It may be learnt by an individual in a rote fashion or more meaningfully learnt and related to a greater or lesser degree to the concept as a whole. It may also be a personal reconstruction by the student of a definition. It is then the form of words that the student uses for his own explanation of his (evoked) concept image. (Tall & Vinner, 1981, p. 152)

L'idea di *concept image* sembra avere una certa somiglianza con i modelli mentali di Fischbein (1990),[84] mentre quella di *concept definition* ha un carattere più linguistico, che mette in evidenza una funzione di referenza. La coppia *concept image-concept definition* richiama alla memoria il costrutto di *concetto figurale* (Fischbein, 1993; Mariotti & Fischbein, 1997)[85] nell'ambito della geometria: l'idea di *concept image* può essere associato alla componente figurale delle figure geometriche, mentre quella di *concept definition* può essere associata alla componente concettuale del concetto figurale.
Inoltre, possiamo dire che ciò che Tall e Vinner (1981) chiamano *concept definition* corrisponde a ciò che Sfard (1991) chiama *concetto* e Artigue (1991) *oggetto*.
Tornando al ruolo delle immagini nella distinzione tra concetti e concezioni o, in generale, tra dimensione soggettiva e oggettiva dei concetti, notiamo che D'Amore (1999) propone una terminologia tratta dagli studi relativi ai modelli. Essa pare essere solo indirettamente collegabile alle concezioni e ai concetti, ma in realtà rappresenta importanti tratti in comune con quest'ultimi. Riportiamo di seguito tali definizioni:

> *Immagine mentale* è il risultato figurale o proposizionale o misto prodotto da una sollecitudine (interna o esterna). L'immagine mentale è condizionata da esperienza

[84] Fischbein parla di modelli mentali e di modelli reali; i modelli matematici sono in questo senso modelli mentali che possono essere figurali (p. e. una retta tracciata sul foglio) o astratti (p.e. l'equazione algebrica di una retta), taciti (p. e. le nostre rappresentazioni temporali si basano tacitamente sul concetto di spazio) o espliciti (p.e. i diagrammi di Euler-Venn esplicitano il nostro modo di percepire delle relazioni) (Fischbein, 1990, pp. 23–24).
[85] Non ci soffermiamo qui sul costrutto di *concetto figurale* poiché esso è specifico per i concetti geometrici, mentre la nostra trattazione si riferisce a idee di concetto e concezione in generale. Ricordiamo solo per maggior chiarezza del motivo di riferimento ai concetti figurali che, seguendo Fischbein (1993) e Mariotti e Fischbein (1997), l'oggetto geometrico ha una componente figurale e una concettuale e il ragionamento geometrico consiste in un'interazione tra questi due aspetti.

> personale, influenze culturali, stili personali, in poche parole è prodotto tipico dell'individuo, ma con costanti e connotazioni comuni tra individui diversi. Essa può più o meno essere elaborata coscientemente (anche questa capacità di elaborazione dipende però dall'individuo). Tuttavia l'immagine mentale è interna e, almeno in prima istanza, involontaria. L'insieme delle immagini mentali elaborate (più o meno coscientemente) e tutte relative a uno stesso concetto costituisce il *modello mentale* del concetto stesso. Il *modello mentale* di un concetto, dunque, riunisce in sé ciascuna delle *immagini mentali* che di quel concetto ci si sono fatte nelle diverse occasioni specifiche, sulla base delle condizioni dette. (D'Amore, 1999, p. 151)

Come possiamo notare, la caratterizzazione di *modello mentale* in D'Amore è di natura operativa piuttosto che descrittiva. In questo contesto ci sembra possibile associare l'idea di *immagine mentale* a quella di *concezione* e quella di *modello mentale* a una *versione personale* più stabile e oggettiva di tale concezione, che però non ha la caratteristica di oggettività che ha il concetto, che è un prodotto culturale intersoggettivo.
Una distinzione molto articolata tra concezione e concetto si trova in Balacheff (1995). L'approccio di Balacheff si colloca all'interno della TSD (Brousseau, 1986) e affonda, come sottolinea l'Autore stesso, le sue radici nella definizione di concetto fornito da Vergnaud (1990) (si veda il paragrafo 7.4.2.1.).
Nei due modelli ci sono tuttavia alcune differenze importanti che ci inducono a esporre in dettaglio il modello di Balacheff. Nel fare ciò faremo ricorso principalmente a Balacheff (1995). Si tratta dell'articolo dedicato specificamente alle idee di concetto e concezione e non al modello cK¢ (Balacheff & Margolinas, 2005; Balacheff, 2017), da noi già presentato nel paragrafo 6.2.4., e all'interno del quale esse vengono interpretate successivamente, senza che perciò si modifichino i significati originali di concetto e concezione. Si tratta a nostro avviso del lavoro più completo dell'Autore sull'argomento, in cui sono presenti dettagli che sono tralasciati negli articoli successivi, focalizzati sul modello cK¢.
Balacheff (1995) definisce prima l'idea di concezione, su cui basa la definizione di conoscenza, su cui a sua volta basa la definizione di concetto.
Secondo l'Autore, una *concezione* è definita come segue:

> Nous appelons conception $C$, un quadruplet $(P, R, L, \Sigma)$ dans lequel;
> - $P$ est un ensemble de problèmes sur lequel $C$ est opératoire;
> - $R$ est un ensemble d'opérateurs;
> - $L$ est un système de représentation, il permet d'exprimer les éléments de $P$ et de $R$;
> - $\Sigma$ est une structure de contrôle, elle assure la non contradiction de $C$.
>
> En particulier, un problème $p$ de $P$ est résolu s'il existe $r$ de $R$ et $s$ de $\Sigma$ tel que $s(r(p)) = vrai$. Un opérateur transforme un problème en un nouveau problème, une condition minimale pour qu'un problème appartienne à $P$ est qu'il existe une suite de transformations par des éléments de $R$ qui conduise à un problème résolu au sens de $\Sigma$.
> [Chiamiamo concezione $C$ una quadrupla $(P, R, L, \Sigma)$ nella quale
> -$P$ è un insieme di problemi sui quali $C$ è operatoria;
> -$R$ è un insieme di operatori;

-$L$ è un sistema di rappresentazione che permette di esprimere gli elementi di $P$ e di $R$;
- $\Sigma$ è una struttura di controllo che assicura la non contraddittorietà di $C$.
In particolare, un problema $p$ di $P$ è risolto se esistono $r$ di $R$ e $s$ di $\Sigma$ tali che $s(r(p))$ = *vero*. Un operatore trasforma un problema in un problema nuovo, una condizione minimale affinché un problema appartenga a $P$ è che esistano delle trasformazioni per mezzo di elementi di $R$ che conducono a un problema risolto nel senso di $\Sigma$]. (Balacheff, 1995, p. 224, traduzione nostra)

I primi tre elementi della definizione sono simili a quelli già visti nella definizione di concetto di Vergnaud, anche se Balacheff evidenzia alcune differenze:
(a) l'insieme dei problemi sui quali è operativa una *concezione* non corrisponde esattamente all'insieme delle situazioni che danno senso al *concetto* (Vergnaud, 1990). Secondo Balacheff, quella di considerare l'insieme delle situazioni che danno senso a un concetto come il referente del concetto è sì una soluzione semplice, che però rimane troppo generica (Balacheff, 1995, p. 226). Egli evidenzia che è necessario individuare "un ensemble de problèmes définitoires (i.e. auxquels pourrait être ramené tout autre problème relevant de cette conception)" [un insieme di problemi definitori (cioè a cui qualsiasi altro problema derivante da questa concezione potrebbe essere ricondotto)] (Balacheff, 1995, p. 227) e caratterizza la nozione di *problema elementare* in linea con quanto postulato da Brousseau (1986), cioè in linea con l'esistenza, per ciascuna parte di conoscenza matematica, di un insieme di situazioni problematiche, la cui soluzione ottimale è proprio tale parte del sapere matematico. Balacheff fornisce la seguente definizione di *problema elementare* per una concezione $C$: "Un problème $p$ est élémentaire pour une conception $C$ si $C$ résout $p$" (Balacheff, 1995, p. 235);
(b) l'insieme degli operatori costituisce per Balacheff l'armamentario di base (calcoli, procedure etc.) necessario per poter trasformare un problema in un altro, al fine di ottenere la sua soluzione. Tali operatori si potrebbero vedere come la nozione analoga a quella di insieme di invarianti sui quali si basa l'operatività degli schemi che troviamo in Vergnaud, ma in Balacheff non troviamo l'ipotesi dell'invarianza come referenza. Il significato di un concetto non è dunque un invariante rispetto alle azioni operative nelle diverse situazioni problematiche. Tuttavia è necessario tenere presente che quella che Balacheff fornisce è una definizione di *concezione* e non di *concetto*, e la concezione non ha il carattere di oggettività che porta con sé un'invarianza referenziale;
(c) il sistema di rappresentazione che permette di esprimere i problemi specifici e gli operatori nella definizione di Balacheff è molto simile al concetto di sistema semiotico; infatti, egli lo chiama anche "grammaire générative minimale, productrice du système de représentation" [grammatica generativa minimale, produttrice del sistema di rappresentazione] (Balacheff, 1995, p. 228). In questo caso potremmo dire che vi è una corrispondenza sostanziale con quello che Vergnaud chiama "l'insieme delle forme linguistiche e non linguistiche che permettono di rappresentare simbolicamente il concetto, le sue procedure, le

situazioni e le procedure di trattazione" (Vergnaud, 1990, p. 139) e che rappresenta nel suo modello il significante; le differenze con il modello di Vergnaud ci sembrano in questo caso solo di natura terminologica.
Il quarto elemento della definizione di Balacheff, cioè la struttura di controllo che assicura la non contraddittorietà della concezione *C*, non è invece presente nella definizione di Vergnaud anche se, come evidenzia Balacheff, essa è implicitamente presente nelle nozioni di teorema in atto e di inferenza (Vergnaud, 1990, pp. 141–142, citato in Balacheff, 1995, p. 224).
Come riassume Balacheff stesso, il suo approccio, pur basandosi su quello di Vergnaud, si differenzia da quest'ultimo soprattutto per i seguenti due aspetti: (i) la terminologia da lui adottata è specifica della didattica della matematica e non della psicologia, consentendo definizioni precise delle nozioni coinvolte: "Il s'agit de se libérer des contraintes du vocabulaire de la psychologie dont nous ne voulions pas faire un usage approximatif, mais sur lequel il faudra cependant revenir" [Si tratta di liberarsi dai vincoli del vocabolario della psicologia, di cui non vogliamo fare un uso approssimativo, ma al quale dovremo ritornare] (Balacheff, 1995, p. 224); (ii) è presente una struttura di controllo, la cui relazione con la nozione di concezione è esplicitata all'interno del modello stesso. Sono queste componenti di controllo, evidenzia l'Autore, che permettono al soggetto di stabilire se le procedure messe in atto e le operazioni eseguite sono accettabili in un dato contesto.
Dunque, in realtà è l'esigenza di una definizione dei termini specifica della didattica della matematica a indurre Balacheff a considerare definizioni di concetto e concezione che tengano conto sia della prospettiva di colui che apprende sia della prospettiva di colui che guida, sostiene e valuta tale apprendimento. In questa prospettiva non sembra possibile evitare di parlare di *conoscenza* e quindi anche di *errore*.
Balacheff (1995) giunge alla costruzione del proprio modello attraverso un'analisi di due modi con cui in didattica della matematica si inquadra il problema dell'errore: (a) in termini di misconcezioni (Confrey, 1986) e (b) nell'ambito del paradigma dell'errore (Brousseau, 1976/1983). Egli giunge alla conclusione che nell'approccio costruttivista di Confrey l'idea di misconcezione implica la supposizione dell'esistenza di una conoscenza oggettiva corretta, rispetto alla quale la misconcezione è una concezione sbagliata, mentre nel caso del paradigma dell'errore di Brousseau, l'errore è in realtà una conoscenza anzi, esso è, in linea con l'idea di ostacolo epistemologico, che Brousseau mutua da Bachelard (1938) ed espande nell'ambito della didattica della matematica, una conoscenza che è stata efficace ad un certo punto dell'esperienza del soggetto, ma che da tale punto in poi si rivela inefficace.
Notiamo che non solo l'idea di errore, ma anche quella di misconcezione ha diverse accezioni in didattica della matematica e non è sempre usata nel senso evidenziato da Balacheff. In D'Amore e Sbaragli (2005) questo termine viene interpretato in un senso molto più vicino a quello evidenziato da Balacheff come

tipico della teoria dell'errore di Brousseau. In questo senso, la formazione di concezioni su un dato oggetto che, rispetto ad altre, più generali di tale oggetto, sono delle misconcezioni, è inevitabile nel processo di apprendimento (Sbaragli, 2005).
Il paradigma dell'errore di Brousseau e l'idea di misconcezione di Confrey sono conciliabili, secondo Balacheff, se si introduce il punto di vista di un osservatore che possiede concezioni comunque relative e transitorie dal punto di vista epistemologico, ma più generali rispetto a quelle del soggetto che apprende. L'errore è definito in questo contesto come lo scarto tra due concezioni di due soggetti epistemicamente non alla pari: lo studente e l'osservatore (insegnante, ricercatore etc.).
La definizione di concezione fornita da Balacheff (1995) è dunque in accordo con il paradigma dell'errore di Brousseau, ma non contraddice nemmeno l'idea di misconcezione.
Una concezione è corretta in un dato istante del percorso formativo di un soggetto se è efficace nella risoluzione dei problemi elementari a cui essa si riferisce ed è sbagliata in caso contrario.
L'(in)efficacia di una concezione è definita in riferimento alla capacità del soggetto di risolvere i problemi costitutivi per la concezione. La valutazione dell'efficacia della concezione spetta tuttavia all'osservatore poiché egli possiede il punto di vista necessario per tale valutazione. L'inefficacia della concezione può avere diversi motivi: lo studente potrebbe non riconosce il problema proposto come risolvibile con quella concezione; egli potrebbe non disporre della conoscenza algoritmica per poter trasformare il problema in un altro che egli è in grado di risolvere; egli potrebbe non padroneggiare il sistema di rappresentazioni necessario per la rappresentazione del problema in una forma che consenta di usare strumenti matematici per la sua soluzione; infine, egli potrebbe ritenere che il problema sia risolvibile (o anche risolto) sulla base di un sistema di controllo che non corrisponde a quello atteso dall'osservatore.

*Un aspetto importante del modello di Balacheff è dato dunque dal fatto che l'errore è definito in funzione della sua percezione da parte di un osservatore (p.e. l'insegnante o il ricercatore) e che si riferisce a una concezione più generale di quella dello studente e la cui esistenza viene postulata nel modello di Balacheff.*

Questo significa che una concezione, anche se si riferisce a una parte del sapere oggettivamente riconosciuto e a un insieme di problemi definitori stabiliti a priori, è una concezione solo dal punto di vista dell'osservatore, mentre per il soggetto apprendente essa è legata esclusivamente al suo comportamento nel contesto. Come sottolinea Balacheff, una concezione non è una proprietà del soggetto, ma una proprietà di un *sistema soggetto/milieu*:

> Les conceptions des élèves que cette recherche met en évidence, et leur évolution, ne sont pas une propriété des élèves mais bien des élèves en situation (propriétés du

> système sujet/milieu) [Le concezioni degli allievi che queste ricerche mettono in evidenza, e la loro evoluzione, non sono una proprietà degli allievi ma degli allievi in situazione (proprietà di un sistema soggetto/milieu)]. (Balacheff, 1995, p. 231, traduzione nostra)

Un altro modo a cui Balacheff ricorre per caratterizzare l'idea di concezione è il seguente: "A conception is the state of dynamical equilibrium of an action/feedback loop between a subject and a milieu under proscriptive constraints of viability" (Balacheff, 2010, p. 123). Riportiamo qui di seguito lo schema che esprime la relazione in questione (Figura 20).

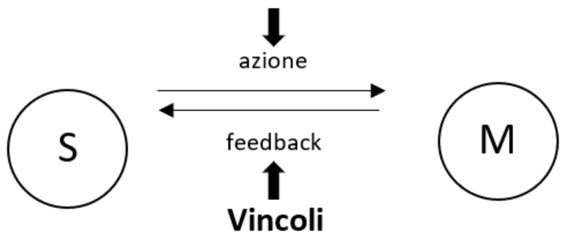



Figura 20. La concezione come un sistema soggetto(S)/milieu(M) in equilibrio, sotto l'azione dei vincoli del contesto (Balacheff, 2010, p. 123).

Il *milieu* è costituito da quelle parti dell'ambiente che sono rilevanti dal punto di vista di una prospettiva epistemica (Balacheff, 2010), ma il *milieu* è anche il mezzo (in senso ampio) di comunicazione che l'insegnante ha per comunicare con lo studente e che può essere concepito come l'insieme costituito "da oggetti fisici, culturali, sociali, umani, con i quali il soggetto interagisce in una situazione" e di cui molti "sono quelli che altri chiamano 'artefatti'" (Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Santi, 2020a, p. 29).

L'equilibrio del sistema è stabilito in riferimento ai mezzi che l'insegnante e lo studente hanno a disposizione per mantenerlo o turbarlo. Per esempio, il sistema potrebbe perdere l'equilibrio e indurre l'insorgenza di un conflitto e una susseguente nuova concezione, attraverso l'azione mediatrice dell'insegnante nell'uso di artefatti intesi nel senso evidenziato pocanzi. Tale mediazione può avvenire in maniera esplicita, come ipotizzato dalla teoria delle mediazioni semiotiche (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008, 2009), ma può essere anche implicita, insita nella strutturazione della situazione problematica in cui è inserito lo specifico problema definitorio o caratterizzante del sapere in questione.

Una perturbazione del sistema *studente-mileu* potrebbe per esempio essere innescata anche a un livello meta, tramite uno "scontro" tra i principi delle strutture di controllo dell'insegnante e dello studente.

Come già evidenziato, il modello proposto da Balacehff distingue tra concezione, conoscenza e concetto. Forniamo dunque di seguito le definizioni di conoscenza e di concetto.
La *conoscenza* è definita da Balacheff come segue: “Nous appelons connaissance: un ensemble de conceptions ayant le même μ-objet” [Chiamiamo conoscenza: un insieme di concezioni aventi lo stesso μ-oggetto] (Balacheff, 1995, p. 233). Il “μ-objet” a cui si riferisce l’Autore è sostanzialmente un oggetto della matematica, quindi un oggetto istituzionalmente accettato. Esso appartiene a un “quelque sorte le troisième monde de Popper pour les Mathématiques; le plus souvent, nous parlerons simplement des Mathématiques pour désigner μ” [qualche tipo di terzo mondo di Popper per la Matematica; nella maggior parte dei casi parleremo semplicemente di Matematica per designare μ] (Balacheff, 1995, p. 237, traduzione nostra).[86]
Notiamo dunque che nell’approccio di Balcheff è evidenziato il fatto che è necessario tenere conto del rapporto dei concetti con gli oggetti matematici “istituzionalmente accettati” della matematica come disciplina, ma senza che l’Autore fornisca una caratterizzazione di tale rapporto.
Nel caso delle concezioni, il fatto che due concezioni abbiano lo stesso *μ-objet* significa che i problemi che caratterizzano l’una sono traducibili in quelli che caratterizzano l’altra e che tali problemi sono definitori per il *μ-objet*.
Il *concetto* è, infine, l’ultimo gradino del modello di Balacheff: “Nous appelons concept l’ensemble des connaissances ayant le même μ-objet” [Chiamiamo concetto l’insieme delle conoscenze aventi lo stesso μ-oggetto] (Balacheff, 1995, p. 233, traduzione nostra).
Inoltre, a ogni concetto corrisponde una concezione $C\mu$ che domina per generalità le concezioni che sono costitutive delle conoscenze a esso riferite (Balacheff, 1995). Più avanti nello stesso testo Balacheff osserva quanto segue.

> Remarque: Une conception est une instanciation de la connaissance d’un sujet par une situation (elle caractérise le couple sujet/milieu en situation), ou encore une instance d’un concept par un couple sujet/situation [Osservazione: Una concezione è una istanziazione della conoscenza di un soggetto riguardo a una situazione (essa caratterizza la coppia soggetto/milieu in situazione), o ancora una istanziazione di un concetto tramite una coppia soggetto/situazione]. (Balacheff, 1995, p. 233, traduzione nostra)

Riassumendo, possiamo dire che una concezione è un esempio della conoscenza situata di un soggetto, ma essa è anche un aspetto particolare di un concetto.
Le relazioni tra concezione, conoscenza e concetto che abbiamo discusso qui sono esemplificate da Balacheff sulla base del concetto “numero decimale” (Figura 21).

---

[86] Notiamo che il “terzo mondo di Popper” a cui si riferisce Balacheff è un mondo che nasce dall’elaborazione del mondo psichico soggettivo ed ha la caratteristica di una conoscenza culturale, a disposizione di tutti, e quindi in questo senso *reale*.

Nello schema seguente, la lettera *D* indica il concetto “numero decimale” che è determinato dalla sua estensione, che è composta da diverse conoscenze, per esempio il concetto di numero decimale secondo Stevino. Ciascuna di queste conoscenze è determinata da un insieme di concezioni, ciascuna delle quali è determinata a sua volta da una quadrupla (*P, R, L, Σ*) (Balacheff, 1995, p. 233).[87]

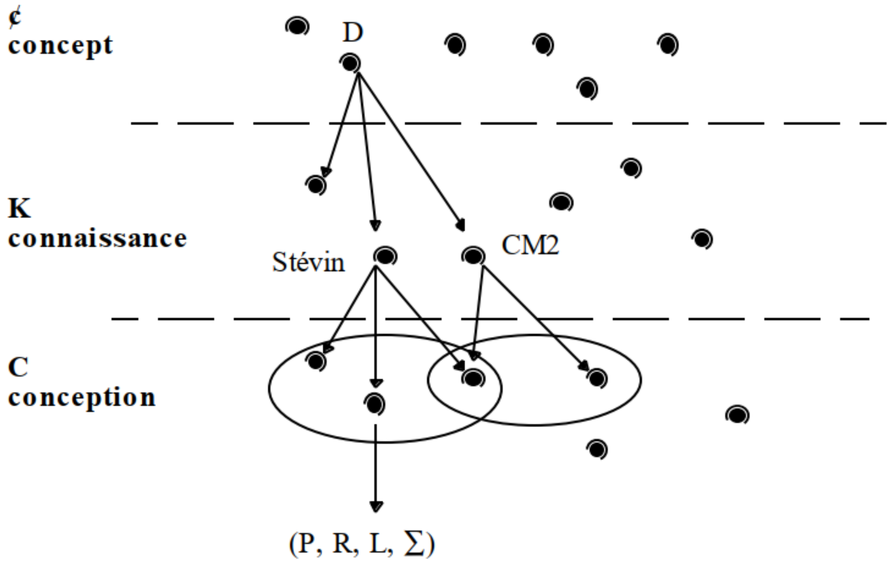



Figura 21. Relazioni tra concezione, conoscenza e concetto sulla base dell’esempio del concetto “numero decimale” (Balacheff, 1995, p. 233).

Concludiamo la trattazione del modello di Balacheff, mettendo in evidenza il suo riferimento ai campi concettuali di Vergnaud (1990).
A tale proposito Balacheff nota che i campi concettuali possono essere interpretati all’interno del suo modello, ma che esso consente anche di ridefinirli specificamente in riferimento ai *problemi* che caratterizzano una concezione:

> La notion de champ conceptuel proposée par Vergnaud trouve ici une expression simple: le champ conceptuel d’une conception *C* est l’ensemble des problèmes à la solution desquels elle participe (Vergnaud 1990, p.146). Plus intéressant serait la réduction du champ conceptuel à ensemble des problèmes spécifiques de *C*. La notion de champ conceptuel induit une organisation des conceptions. On dira d’une conception *C* qu’elle est dans le champ conceptuel d’une conception *C’* si pour tout problème *p*, tout ensemble de conceptions qui résout *p* qui contient *C’* contient aussi

[87] Notiamo che le lettere che nello schema contraddistinguono i termini concezione, conoscenza e concetto sono quelle da cui prende il nome il modello della conoscenza elaborato da Balacheff: il cK¢-Model (Balacheff & Margolinas, 2005; Balacheff, 2017).

> *C*. [La nozione di campo concettuale proposta da Vergnaud trova qui un'espressione semplice: il campo concettuale di una concezione *C* è l'insieme dei problemi alla cui soluzione esso partecipa (Vergnaud, 1990, p. 146). Più interessante sarebbe la riduzione del campo concettuale all'insieme dei problemi specifici di *C*. La nozione di campo concettuale induce una organizzazione delle concezioni. Diremo che una concezione *C* è dentro il campo concettuale di una concezione *C'* se per tutti i problemi *p*, tutto l'insieme delle concezioni che risolvono *p*, se contengono *C'* contengono anche *C*]. (Balacheff, 1995, p. 235, traduzione nostra)

Notiamo dunque che Balacheff affronta anche la questione relativa alle relazioni tra le concezioni, mettendo in evidenza una relazione di inclusione tra i rispettivi problemi definitori.
Passiamo ora a un altro approccio al confronto tra concetto e concezione che si colloca nell'ambito costruttivista: si tratta dell'approccio di Simon (2017). Vediamo di seguito quali sono le sue caratteristiche.
Simon (2017) propone una sintesi per certi versi simile a quella proposta da Balacheff (1995), tra dimensione personale e oggettiva, ma in una chiave strettamente costruttivista,[88] in cui non vi è alcun riferimento a degli oggetti, personali o istituzionali che siano, ma solo a dei concetti e a delle concezioni personali.[89]
I concetti assumono in questo quadro il ruolo di *modelli del secondo ordine* (Steffe, 1995), cioè costruzioni basate sulle concezioni del ricercatore in didattica della matematica (tale figura può coincidere con l'insegnante) riguardo alle concezioni che lo studente dovrebbe avere e alle concezioni che lo studente effettivamente ha.
Simon (2017) esordisce notando che, nonostante le caratterizzazioni di concetto e concezione già esistenti in letteratura, manchi ancora una chiara ed esplicita definizione di ciò che si debba intendere per concetto. Evidenziamo che Simon in realtà non nomina nemmeno la definizione fornita da Vergnaud e fa un cenno a quella di Balacheff con la seguente nota a piè di pagina: "Balacheff and Gaudin (2009) have taken a different approach to modeling a conception within the framework of French Didactical Theory. Rather than focusing specifically on the students' thinking, Balacheff and Gaudin focused on the state of the 'subject/milieu system'" (Simon, 2017, p. 120).[90]

[88] In realtà, le definizioni di concetto e di concezione fornite da Simon non si collocano esplicitamente in una specifica teoria in didattica della matematica, ma i riferimenti teorici forniti le collocano implicitamente nell'ambito costruttivista.
[89] Notiamo che questo aspetto è in linea con un'impostazione costruttivista (von Glaserfeld, 1995), in cui non vi è alcun spazio per questioni di tipo ontologico, dato che tutto ciò che può *esistere* è ciò che il soggetto ha costruito in un certo momento del proprio percorso, attraverso la propria attività mentale, e che non può avere come pietra di paragone una conoscenza supposta esistente all'infuori del soggetto stesso.
[90] Notiamo come la molteplicità di approcci e teorie in didattica della matematica, che di per sé costituisce una ricchezza per la disciplina, rende difficoltosa l'interazione tra paradigmi epistemologici diversi.

Ciò a cui Simon sembra essere interessato non è tanto una *definizione* di concetto, o meglio una spiegazione teorica delle relazioni tra concezioni e concetti, ma a un *modello pratico* che consenta di distinguere un supposto stato delle cose (le concezioni) da uno auspicato (i concetti), rimanendo però fedele al postulato costruttivista, secondo il quale non vi può essere alcun riferimento a una conoscenza predeterminata.

Per maggiore chiarezza, Simon delinea le differenze tra le sue definizioni di *concezione matematica* e di *concetto matematico* e quelle di *concept image* e *concept definition* fornite da Tall e Vinner (1981): questi ultimi sono comunque definiti a partire dalla nozione di concetto, che rimane di natura intuitiva, mentre le prime due chiariscono la natura stessa dell'idea di concetto.

Come già evidenziato, in riferimento alla definizione di concetto, Simon ricorre a quelli che Steffe chiama *second order models*: "I use mathematical conception to refer to an explanatory model generated by mathematics educators to explain behaviors (including verbalizations) of mathematics learners in terms of what they think, know, and understand, what Steffe (1995) called 'second order models'" (Simon, 2017, p. 120).

Più precisamente, per Simon:

> A mathematical conception is an explanatory model used to explain observed abilities and limitations of mathematics learners in terms of what they understand. A mathematical concept is the result of reflective abstraction – a learned anticipation. A mathematical concept is a researcher's articulation of intended or inferred student knowledge of the logical necessity involved in a particular mathematical relationship. (Simon, 2017, p. 124)

La *concezione matematica* è dunque un modello esplicativo elaborato dal ricercatore, allo scopo di spiegare o descrivere le abilità (in termini di presenza o assenza) dello studente; tali concezioni vengono messe a confronto con il *concetto matematico* che esprime le attese del ricercatore riguardo alle conoscenze dello studente in riferimento alla necessità logica di una particolare relazione matematica.

Ciò che distingue le concezioni dai concetti in questo approccio non è quindi l'aspetto personale e soggettivo delle prime rispetto all'aspetto istituzionale o oggettivo delle seconde. Infatti, secondo questa prospettiva, entrambe hanno origine nella concettualizzazione del ricercatore, sono cioè *researcher generated models* prodotti della didattica della matematica che le rappresentazioni mentali dello studente, ma *non sono* le rappresentazioni mentali stesse. Ciò che distingue i due costrutti è il loro dominio di riferimento: il dominio di riferimento delle concezioni è il sapere dallo studente, mentre il dominio dei concetti è il sapere auspicato per lo studente. Inoltre, mentre le concezioni matematiche possono non basarsi su relazioni di necessità logica, i concetti matematici si basano necessariamente su tali necessità.

Simon propone il seguente schema (Figura 22) come sintesi delle relazioni tra i costrutti *concezione matematica* e *concetto matematico*.

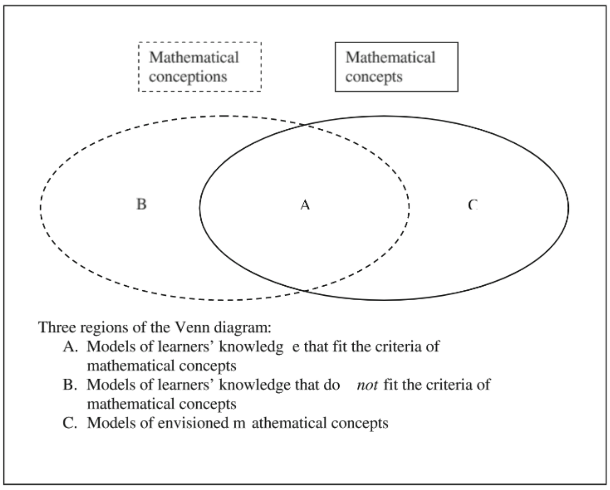



Figura 22. Le relazioni tra concezioni matematiche e concetti matematici (Simon, 2017, p. 124).

Nel diagramma (Figura 22) i due ovali rappresentano le concezioni di uno studente riguardo a un argomento matematico inferite dal ricercatore (ovale di sinistra) e i concetti articolati dal ricercatore riguardo a tale argomento matematico (ovale di destra). Mentre i concetti matematici sono caratterizzati dalla presenza di relazioni matematiche basate su necessità logiche, le concezioni matematiche non hanno necessariamente tale caratteristica. La parte contrassegnata con la lettera *B* rappresenta quelle concezioni di uno studente riguardo a un dato argomento matematico che non sono caratterizzate da relazioni di necessità logica; la parte contrassegnata con *A* rappresenta invece quella parte delle concezioni dello studente che hanno tale caratteristica. La parte del diagramma contrassegnata con *C* rappresenta infine i concetti matematici in termini di conoscenze potenziali dello studente, auspicate dal ricercatore, che non sono ancora concezioni, ma che possono diventare tali in futuro.[91]

Un esempio di articolazione di un concetto matematico secondo Simon è il seguente:

> Understanding comparing unit fractions: If I have a whole, the more equal parts I cut it into (think, more ways we share a pizza), the smaller the parts will be. Because the denominator represents the number of equal parts that the whole is cut into, the unit

[91] Questa interpretazione dei concetti in termini di conoscenza potenziale dello studente mostra un certo parallelismo con il costrutto di *zona di sviluppo prossimale* di Vygotskij (1996), di cui diremo a breve, nel paragrafo 7.3.2.4.

> fraction with the larger denominator represents the smaller part (assuming that both fractions refer to the same whole). (Simon, 2017, p. 133)

Ogni articolazione di un concetto è contraddistinta da un'etichetta, cioè da un "label of a mathematical topic" (Simon, 2017, p. 133); nell'esempio appena riportato tale etichetta è *Understanding comparing unit fractions.* L'articolazione del concetto che segue è una descrizione di ragionamenti che costituiscono l'argomento matematico in questione e rappresentano ciò che si auspica che lo studente comprenda riguardo a quell'argomento matematico. Questa articolazione di ragionamenti corrisponde dunque al concetto matematico (la parte contrassegnata con *C* nella Figura 22) nel modello di Simon. La parte contrassegnata con *A* corrisponde a quella parte del concetto matematico *C* che è stata compresa dallo studente in termini di necessità logica (detto diversamente, nell'esempio specifico: generalizzata a tutti i casi possibili e non limitata alla suddivisione della pizza); la parte indicata con *B* nella Figura 22 corrisponde invece alle concezioni dello studente riguardo all'argomento matematico "confronto tra frazioni unitarie" che non trovano corrispondenza nel concetto matematico *C* perché sono errate (p.e. lo studente ritiene che, tra due frazioni unitarie sia maggiore quella con il denominatore maggiore) oppure perché non hanno la caratteristica della necessità logica (lo studente le applica solo a casi particolari).

Il modello di Simon (2017) ha il pregio di evidenziare il fatto che i modelli elaborati in didattica della matematica sono sempre modelli esplicativi di una conoscenza inferita da parte del ricercatore (o dell'insegnante), ma che essi non esprimono *la conoscenza* dello studente. Questo aspetto è presente implicitamente anche nel modello di Balacheff (1995), nel momento in cui egli mette in evidenza che la concezione non è una proprietà (o caratteristica) del soggetto, ma una proprietà del sistema soggetto-milieu, in quanto le conoscenze dello studente sono inferite e valutate in termini di competenze di un osservatore appartenete al milieu. Ciò che Balacheff non mette forse chiaramente in evidenza è la relazione di graduale sovrapposizione tra concezione dell'osservatore e concezione dello studente come modello ideale dell'apprendimento. Inoltre il modello di Simon prevede anche una componente predittiva esplicita, legata al potenziale delle concezioni di diventare dei concetti, che invece è presente solo implicitamente sia nel modello di Balacheff, sia in quello di Vergnaud.

Chiudiamo il paragrafo su concezioni e concetti facendo alcune considerazioni relative alle posizioni di base che sono implicite nella maggior parte degli approcci finora esaminati. A tale scopo torniamo brevemente al confronto tra quelle che potremmo chiamare *concezioni personali* dello studente e i *concetti istituzionali* del ricercatore (o dell'insegnante); questa distinzione sembra essere il

denominatore comune alla maggior parte degli approcci a cui abbiamo fatto cenno in questo paragrafo.[92]
Questo punto di vista presuppone che esista, se pure in un senso provvisorio e relativo,[93] un oggetto o un concetto matematico a cui si riferisce il punto di vista del ricercatore o dell'insegnante o, come direbbe Balacheff, dell'osservatore. Ciò che i vari approcci ai concetti sembrano cercare di spiegare è la relazione che sussiste tra le concezioni personali provvisorie attribuite allo studente e i concetti provvisori auspicati dall'osservatore riguardo a una certa parte del sapere matematico.
In D'Amore (2001a, b) questo tipo di posizione è chiamata "squisitamente didattica-cognitiva" ed è caratterizzata nel seguente modo:

> Siano $c_i$ le concezioni provvisorie, in un processo lineare ed evolutivo (almeno nel tempo) di assimilazione ed accomodamento, relativamente ad un oggetto matematico *C*. Occorre distinguere tra:
> $c_i$ scientifiche di tipo istituzionale, che diremo accademiche ($a$), cioè quelle che la comunità scientifica (accademica) accetta come pertinenti, significative e corrette (…) le chiameremo $c_i$ di tipo $a$;
> $c_i$ cognitive di tipo istituzionale, che diremo scolastiche ($s$), dovute all'azione della scuola ed alla noosfera, cioè quelle che una persona costruisce o ha costruito a scuola (…) le chiameremo $c_i$ di tipo s.
> Le $c_i$ di tipo $a$ si differenziano da quelle di tipo $s$ solo perché le seconde sono o più in ritardo rispetto alle prime (cioè: gli indici deponenti sono di valore numerico inferiore), oppure perché sono criticamente meno ricche e più basate su sensazioni, sul buon senso, legate ad applicazioni, meno soggette a ripensamento e riflessione critica, più legate a varie clausole del contratto didattico. (D'Amore, 2001a, p. 18)

D'Amore evidenzia anche il fatto che la costruzione del concetto *C* a partire dalla successione $c_i$ può avvenire con due modalità differenti: (i) *per superposizione*, cioè "ogni concezione provvisoria $c_{m+1}$ aggiunge e integra la precedente $c_m$, cioè la comprende e le aggiunge qualcosa, sovrapponendosi ad essa" (D'Amore, 2001a, p. 18); (ii) *per accumulazione*, cioè "ogni concezione provvisoria $c_{m+1}$ aggiunge qualcosa (in più) alla $c_m$ precedente" (D'Amore, 2001a, p. 19).

[92] Anche se in realtà nell'approccio di Simon (2017) tale distinzione non sembra possibile a causa della messa in evidenza delle concezioni come modelli interpretativi, essa è comunque possibile se si considerano le concezioni inferite dal ricercatore come delle *concezioni personali inferite*; i concetti matematici avrebbero in questo senso una dimensione istituzionale poiché rappresentano le concezioni *auspicate* per lo studente.
[93] Balacheff nota infatti che anche gli oggetti matematici sono in evoluzione, come si evince dalla loro analisi epistemologica, e quindi non è possibile avere come riferimento, se non provvisorio, un'unica definizione di oggetto matematico. Tuttavia egli assume che sulla base del contesto si farà riferimento a una qualche sua formulazione accettata nel "mondo" della matematica, cioè il "terzo mondo popperiano" al quale abbiamo già accennato in precedenza.

Le due modalità sono esemplificate nelle *Figure 23* e *24*; tuttavia, come nota l'Autore stesso, nella realtà si incontra quasi sempre un miscuglio di queste due modalità.[94]

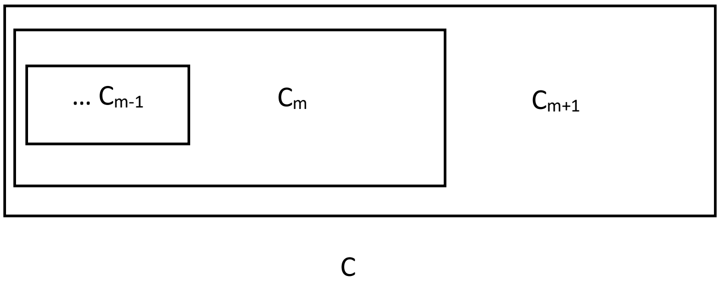



Figura 23. Costruzione di un concetto matematico C per superposizione (D'Amore, 2001a).

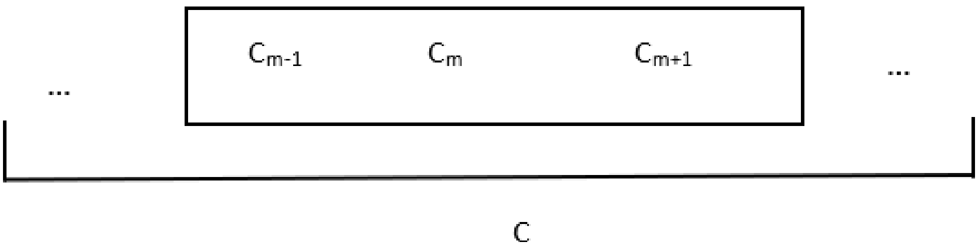



Figura 24. Costruzione di un concetto matematico C per accumulazione (D'Amore, 2001a).

D'Amore chiama appunto questa concezione "esclusivamente didattico-cognitiva" e la contrappone a un'altra, chiamata "antropologica", in cui tutto è riferito al rapporto personale con l'oggetto matematico.
La questione della costruzione dei concetti è, come giù evidenziato in precedenza, tipica delle teorie in didattica della matematica in cui si parte dal presupposto che il soggetto costruisce i propri concetti degli oggetti di conoscenza per astrazione (dalle azioni o dagli oggetti) oppure per generalizzazione dalle situazioni. In altre teorie della didattica della matematica l'apprendimento è visto in maniera differente, per esempio in termini di oggettivazione della produzione di una cultura in cui l'individuo è immerso e all'interno della quale interagisce con i propri simili (teoria dell'oggettivazione, Radford, 2007, 2008a). Oppure in termini di

[94] Nell'articolo sono esemplificate due successioni di concezioni relative agli oggetti matematici *retta* e *addizione*.

apprendimento delle regole di un gioco linguistico in cui è determinante l'uso che il soggetto fa dei propri oggetti di conoscenza (approccio ontosemiotico, Godino & Batanero, 1994; Godino, 2002; approccio commognitivo, Sfard, 2008). Torneremo su questi approcci nel capitolo 8, dedicato alle definizioni di oggetto matematico formulate in didattica della matematica.
Concludiamo questo capitolo con una breve presentazione dell'approccio ai concetti di Vygotskij. Abbiamo ritenuto opportuno trattare tale approccio al termine del presente capitolo poiché ci sembra che esso vada oltre all'idea dei concetti costruiti dall'individuo, comune a tutti gli approcci trattati in questo capitolo, gettando un ponte verso la concettualizzazione intesa come un'appropriazione da parte dell'individuo degli oggetti culturali della propria cultura di appartenenza.

### 7. 4. 4. I concetti scientifici in Vygotskij

Nei paragrafi precedenti abbiamo esposto principalmente degli approcci ai concetti che sono nati con lo scopo di teorizzare la concettualizzazione in matematica anche se, come abbiamo potuto notare, le loro basi affondano nella psicologia cognitiva.
In questo paragrafo esporremo l'approccio di Vygotskij, tratto sempre dalla psicologia cognitiva, ma non specifico per l'apprendimento della matematica. Esso costituisce la base per molti approcci teorici in didattica della matematica poiché evidenzia degli aspetti che altri approcci a cui abbiamo fatto cenno finora non rilevano. Si tratta della distinzione tra l'apprendimento dei concetti scientifici e l'apprendimento dei concetti spontanei nonché delle relazioni che intercorrono tra queste due tipologie di apprendimento.
Il lavoro di Vygotskij si colloca nell'ambito della scuola storico-culturale sovietica, di cui egli fu il fondatore e secondo la quale i fattori evolutivi determinanti sono di carattere sociale e storico-culturale.
Secondo Vygotskij (1934) i concetti possono essere divisi in due tipologie: quella dei concetti spontanei e quella dei concetti scientifici. I primi vengono acquisiti dal bambino tramite l'esperienza all'infuori dalla vita scolastica, mentre i secondi vengono acquisiti tramite la formazione scolastica e fanno parte di sistemi di saperi già organizzati come tali. Se lo scopo è quello di comprendere le caratteristiche del pensiero del bambino a una certa età allora, afferma Vygotskij, la strada giusta è quella dello studio dell'apprendimento dei concetti scientifici poiché essi non vengono assimilati o appresi e nemmeno memorizzati, ma nascono e si stratificano con l'aiuto dello sforzo di tutte le facoltà superiori del pensiero del bambino (Vygotskij, 1934, pp. 174–175). I concetti scientifici e i concetti spontanei non percorrono due vie separate e contrapposte nella loro formazione, come se fossero due processi di pensiero completamente differenti; si tratta al contrario di un unico

processo di concettualizzazione e i concetti scientifici supportano l'evoluzione e la riorganizzazione di quelli spontanei (Vygotskij, 1934, citato in D'Amore, 2001a).
Tuttavia, i concetti scientifici non possono che nascere a partire da generalizzazioni meno sofisticate, già presenti nella mente del bambino a un livello più elementare. Quella che è la forza dei concetti scientifici è nello stesso tempo la debolezza di quelli spontanei e viceversa (Vygotskij, 1934). Infatti, all'ancoraggio a una lunga esperienza e alla lunga elaborazione di quelli spontanei nella vita quotidiana, corrisponde un ancoraggio empiricamente molto più fragile dei concetti scientifici appresi nelle diverse discipline a scuola; nello stesso tempo, alla sistematicità e alla conoscenza razionale dei concetti scientifici corrisponde una conoscenza molto meno definita e meno consapevole dei concetti spontanei. La scuola ha, in questo contesto, lo scopo di sostenere la sistematizzazione dei concetti già formati e di quelli che si formano durante il percorso scolastico.
Per quanto riguarda le differenze tra i concetti scientifici e quelli spontanei, Vygotskij afferma che

> (…) можно было бы сказать, что научные понятия, складывающиеся в процессе обучения, отличаются от спонтанных иным отношением к опыту ребёнка, иным отношением его к объекту тех и других понятий и иными путями, которые они проходят от момента своего зарождения до окончательного оформления [(…) si potrebbe dire che i concetti scientifici che si stratificano durante il processo di istruzione si differenziano da quelli spontanei per il rapporto diverso con l'esperienza del bambino, per il diverso rapporto di quest'ultimo con gli oggetti di tali e degli altri concetti [quelli spontanei] e per la diversità delle vie che essi percorrono dalla loro origine fino alla loro formazione definitiva]. (Vygotskij, 1934, pp. 176–177, traduzione nostra)

Un ruolo molto importante nella costruzione dei concetti è attribuito da Vygotskij al linguaggio poiché, in riferimento al processo della loro formazione:

> функциональное употребление слова или другого знака в качестве средства активного направления внимания, расчленения и выделения признаков, их абстрагирования и синтеза—является основной и необходимой частью всего процесса в целом. [L'uso funzionale del linguaggio o di un altro segno nella qualità di mezzo per la direzione attiva dell'attenzione, della distinzione e della selezione delle caratteristiche, per la loro astrazione e sintesi – si presenta come la parte fondante e necessaria dell'intero processo]. (Vygotskij, 1934, p. 115, traduzione nostra)

A parte i due aspetti fondamentali legati alla distinzione tra concetti scientifici e spontanei e all'importanza del linguaggio, in Vygotskij (e nella scuola storico-culturale in generale) per l'apprendimento è di fondamentale importanza il ruolo dell'aspetto sociale e culturale dell'istruzione. Per quanto riguarda l'aspetto sociale, secondo Vygotskij lo studente progredisce nell'apprendimento se, sostenuto da un adulto (o da un pari più esperto), è messo davanti a compiti che si collocano nella sua *zona di sviluppo prossimale*. La zona di sviluppo prossimale è definita da Vygotskij come segue:

> Расхождение между уровнями решения задач, доступных под руководством, при помощи взрослых и в самостоятельной деятельности, определяет зону ближайшева развития ребёнка [La differenza tra il livello della soluzione del compito, accessibile sotto la guida e con l'aiuto degli adulti, e nel lavoro autonomo, determina la zona di sviluppo prossimale del bambino]. (Vygotskij, 1996, p. 8, traduzione nostra)

La zona di sviluppo prossimale determina dunque la potenzialità di sviluppo del bambino sotto la guida di una persona più esperta (il docente, uno studente più esperto etc.) ed è proprio l'interazione sociale con tale guida che determina la natura del processo di istruzione. Inoltre, è attraverso il processo di istruzione che il bambino entra in contatto con un tipo particolare di cultura, rappresentata dai concetti scientifici, di cui abbiamo già detto in precedenza. Infatti, i concetti scientifici hanno, proprio perché derivano dalla produzione scientifica delle diverse discipline che lo studente conosce a scuola, un'organizzazione diversa da quella in cui si trovano immersi quelli spontanei; essi fanno parte di sistemi di razionalità differenti da quello del senso comune e lo studente viene in contatto con questa tipologia di concetti solo attraverso l'istruzione scolastica.

## 7. 5. Analisi

La trattazione esposta in questo capitolo consente di evidenziare alcuni aspetti che esponiamo di seguito.
L'approccio di Frege (1891, 1892a, 1892b) mette in evidenza che nel linguaggio matematico non possono trovare interpretazione i concetti intesi dal punto di vista psicologico, ma che è comunque possibile definirli matematicamente dal punto di vista logico. Seguendo questo Autore, il concetto è un'entità statica, dato che esso è sostanzialmente un predicato. Se si considera però il concetto come funzione (Frege, 1891), si potrebbe pensare anche a una sua interpretazione dinamica, in termini di composizione di funzioni predicative. Tuttavia bisogna notare che si tratterebbe di un'interpretazione dinamica molto rigida, in quanto i domini e codomini di tali funzioni dovrebbero essere univocamente determinati, sulla base dell'interpretazione estensionale del significato degli oggetti in Frege. Si tratta dunque di una strada difficilmente percorribile per inquadrare la dinamicità degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica, il cui linguaggio non è un linguaggio logico formale, ma un linguaggio discorsivo che non consente di ridurre il significato degli oggetti a un'estensione insiemistica chiusa e statica. Anche se l'approccio logico ai concetti consente di inquadrare in maniera opportuna gli oggetti matematici dal punto di vista formale, esso non può quindi essere da solo un modello adatto per inquadrare gli oggetti matematici specifici

della didattica della matematica perché non consente di tenere conto della dimensione creativa del linguaggio in cui il significato non può essere sempre ricondotto a un valore logico di verità.
Gli approcci di Sfard (1991) e Dubinsky e coautori (Dubinsky 1991; Dubinsky & McDonald, 2001) sono importanti per la nostra trattazione perché mettono in evidenza il fatto che è necessario tenere conto sia dei processi sia degli oggetti; inoltre abbiamo già discusso ampiamente l'importanza della reificazione per l'oggettivazione sia in matematica sia in didattica della matematica come disciplina.
L'idea di *procept* in Gray e Tall (1994) è utile a nostro avviso per mettere in evidenza la necessità di tenere conto della possibilità di transito della referenza dei concetti matematici, in quanto l'ambiguità interpretativa dei simboli matematici richiede la possibilità di un'ambiguità interpretativa degli oggetti matematici. Detto diversamente: se un simbolo matematico è usato in termini "proceptuali", allora esso si riferirà a volte a una versione strutturale dell'oggetto matematico, la quale è definita in termini insiemistici, e altre volte a una versione procedurale dello stesso simbolo, ma per poter definire matematicamente questo secondo modo di considerare il simbolo, è necessario che dal punto di vista matematico ci sia la possibilità di "superare" la frontiera dell'insieme di riferimento, in quanto in una *procedura* l'insieme di riferimento non è mai ben definito. Si pensi per esempio alla soluzione di un'equazione: di solito si fissa il dominio per le soluzioni (p. e. $\mathbb{R}$) e poi si eseguono i calcoli fino a quando non si ottiene l'insieme delle soluzioni; per esempio per l'equazione $x^2 - 1 = 0$ tale insieme delle soluzioni è $\{+1; -1\}$. Dal punto di vista del linguaggio insiemistico questo insieme è dato indipendentemente dalla procedura risolutiva, esso "esiste" indipendentemente dal fatto che qualcuno esegua dei calcoli per risolvere l'equazione. Ora, se si assume questa prospettiva, non ha senso applicare la procedura risolutiva: l'insieme delle soluzioni esiste già di per sé. Il problema della *procedura* nasce dal fatto che qualcuno *vuole conoscere* quell'insieme delle soluzioni. Quindi in realtà la questione della procedura risolutiva ha una dimensione squisitamente cognitiva ed epistemica. Ciononostante, si tratta di una procedura *matematica* che è soggetta a leggi matematiche e quindi deve essere esprimibile nel linguaggio matematico formalizzato, che di solito è quello della teoria degli insiemi. Tuttavia è difficile immaginare in che senso una procedura (o un algoritmo) possa avere come riferimento un *insieme*. Infatti, si potrebbe dire che in una prima istanza una procedura funziona come una sorta di "funzione di scelta" che individua elementi che corrispondono a certe caratteristiche prefissate, ma non che corrisponda a un insieme. Questo è un aspetto di cui Gray e Tall (1994) e Tall (2013) non tengono conto nella caratterizzazione del concetto di *procept*.
Abbiamo discusso ampiamente il modello proposto da Scheiner (2016) e abbiamo notato la messa in evidenza di molti aspetti di cui è necessario tenere conto a nostro avviso nella ricerca di una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica: il legame tra il concetto e l'oggetto matematico, la

necessità di tenere conto degli aspetti semiotici (anche se Scheiner evita accuratamente tale termine), e soprattutto la necessità di tenere conto sia degli aspetti logici sia di quelli psicologici nella caratterizzazione dei concetti in didattica della matematica. Tuttavia abbiamo anche notato come il modo con cui questi elementi sono uniti tra loro stravolge completamente l'approccio fregeano e rende quindi difficile un'interpretazione coerente del modello stesso.
Dagli approcci di Vergnaud (1990, 1992) e di Balacheff (2009a) ai concetti raccogliamo un aspetto importante: il fatto che la conoscenza in didattica della matematica è anzi tutto *situata*, cioè una *conoscenza in contesto*, prima che una conoscenza concettuale. Una conoscenza situata non è quindi assoluta, ma dipende dal contesto in cui emerge e questo pone il problema del significato degli oggetti matematici. Infatti, nel caso di Frege tale significato è un significato logico, determinato dall'estensione del concetto; in tale contesto il significato degli oggetti matematici è oggettivo e assoluto. Nel caso della conoscenza situata il significato non può che essere personale e circostanziato e mai assoluto, anche se nei modelli di Vergnaud e Balacheff l'oggettività è presente attraverso l'idea di invariante situazionale. In questo contesto il concetto rimane però un concetto puramente psicologico. Per fare un esempio, in matematica l'invarianza strutturale è espressa tramite il concetto di isomorfismo che consente di trattare in maniera operativa il concetto, mentre ciò non è possibile per l'invarianza situazionale, che rimane un concetto intuitivo sempre un po' sfuggente.
Nell'approccio di Balacheff emerge una componente importante per l'inquadramento teorico degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica: il fatto che è necessario tenere conto della posizione dell'osservatore nell'analisi della concettualizzazione degli studenti. Questo ci porta a considerazioni relative al ruolo del ricercatore in didattica della matematica come costruttore di modelli interpretativi. Quest'ultimo aspetto è chiaramente espresso da Simon (2017), il quale evidenzia che sia l'idea di concezione sia quella di concetto non possono che essere intesi in questi termini. Notiamo che Simon, così come Dubinsky, partono dal presupposto che i concetti sono legati all'attività interpretativa del singolo soggetto. Infatti, Dubinsky afferma che la decomposizione genetica è il frutto della raccolta di dati empirici in aula e della conoscenza matematica di colui che elabora tale decomposizione, mentre Simon afferma che il concetto matematico è strettamente legato alla conoscenza matematica di colui che lo progetta. Possiamo dire che questo vale implicitamente anche per l'approccio di Balacheff, in quanto l'errore dello studente è giudicato tale rispetto alla conoscenza posseduta dall'osservatore e non rispetto all'oggetto matematico in sé. Naturalmente, come già evidenziato nel capitolo precedente, in una disciplina scientifica le produzioni individuali si oggettificano dal soggetto, ma si oggettivano tramite la pubblicazione e la condivisione nella comunità scientifica di riferimento. È proprio questa dimensione metariflessiva sui modelli interpretativi a costituire il piano d'azione di una prospettiva epistemologica sulla

didattica della matematica e dovrebbe dunque essere parte integrante di una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica.
L'approccio ai concetti di D'Amore (2001a, b) ci induce a riflettere su due aspetti: il fatto che l'evoluzione dei concetti in didattica della matematica deve tenere conto di un'evoluzione temporale e che tale evoluzione temporale si verifica a volte per superposizione, altre volte per accumulazione. Possiamo notare che la prima modalità è simile alla relazione semantica di inclusione da noi messa in evidenza nei complessi concettuali che costituiscono gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica esemplificati nel capitolo 6; la seconda modalità, quella per accumulazione, è invece simile alla relazione semantica di complementarietà, messa in evidenza nello stesso capitolo, anche se più che di complementarietà sarebbe opportuno parlare di partizionamento, in quanto gli elementi non sono necessariamente due ma possono essere anche di più. In questo secondo caso diverse concezioni dello stesso oggetto matematico coesistono senza che uno sia reinterpretato nell'altro, come invece accade nel caso della modalità per superposizione.
L'approccio di Vygotsky (1934) ha infine messo in evidenza il ruolo delle interazioni sociali e del linguaggio, nonché dell'istruzione scolastica nella trasmissione dei concetti scientifici, di cui quelli matematici sono un esempio importante.
Questa analisi consente di circoscrivere e puntualizzare i criteri evidenziati nel paragrafo 6.3.
Riguardo al criterio (1) possiamo affermare che la trattazione proposta nel presente capitolo ha mostrato che negli approcci ai concetti in didattica della matematica sono presenti vari cenni alla necessità di tenere conto di una dimensione dinamica dei concetti, ma che in nessuno dei modelli esaminati tale dinamicità è parte integrante del modello stesso. Per esempio Balacheff parla di "stato di equilibrio" (Balacheff, 2009a) del sistema milieu-studente ed evidenzia che in realtà si tratta di una *successione* di stati, ma questo aspetto non è parte integrante del modello in quanto necessiterebbe, a nostro avviso, di un metamodello per poter essere inquadrato. D'altro canto, D'Amore mette in evidenza l'evoluzione temporale dei concetti come una successione di stati temporali, ma non inquadra il loro aspetto statico e il legame tra questo e l'aspetto dinamico. Riteniamo che le dimensioni dinamica e statica degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica non possono essere inquadrate teoricamente in termini di concetti sulla base degli approcci ai concetti in didattica della matematica, in quanto nessuno degli approcci ne tiene conto in maniera esplicita e sufficientemente dettagliata. L'analisi eseguita in questo capitolo ha però messo in evidenza alcuni aspetti in questo senso. Infatti, possiamo constatare che la dinamicità può essere articolata nei concetti di *evoluzione nel tempo* e di *transitorietà*, dove l'evoluzione nel tempo rappresenta più propriamente la dinamicità, mentre la transitorietà può essere intesa sia come condizione per la dinamicità, sia come la condizione necessaria

del coordinamento tra aspetto procedurale e oggettuale, nel senso del concetto di *procept*.
Riguardo al criterio (2) possiamo affermare che gli approcci ai concetti in didattica della matematica non consentono di inquadrare la relazione con gli oggetti matematici nella loro versione formale, intesa come conoscenza matematica accettata istituzionalmente dalla matematica come disciplina, se non trattandoli come stadi evolutivi "imperfetti" il cui susseguirsi tende verso l'oggetto matematico ideale. Nei prossimi capitoli cercheremo di approfondire questo aspetto, esaminando prima le modalità con cui si definiscono gli oggetti in didattica della matematica e poi le modalità con cui si affronta la questione ontologica in matematica.
Riguardo al criterio (3) è possibile affermare che attraverso la trattazione del presente capitolo è emersa la necessità di prendere in considerazione l'idea di *modello del secondo ordine* evidenziata da Simon (2017) e mutuata da Steffe (1995). Come già evidenziato è proprio la dimensione degli approcci ai concetti come modelli interpretativi a costituire il piano epistemologico della didattica della matematica come disciplina ed è questo, a nostro avviso, il piano sul quale si deve cercare un inquadramento teorico per l'aspetto ontologico della didattica della matematica e quindi per gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica. Per fare ciò è però necessario vedere tali modelli come oggetti di studio in sé e non solo come strumenti di analisi e indagine, come avviene nel modello di Simon (2017). Infatti, quest'ultima prospettiva impedisce di compiere quello shift ontologico che Sfard (1991) chiama *reificazione* e che consentirebbe di cogliere i modelli interpretativi come *oggetti* di studio in sé.
Per quanto riguarda il criterio (4), possiamo notare che gli approcci ai concetti che abbiamo esaminato fanno sempre riferimento, il più delle volte esplicitamente, altre volte solo implicitamente, a un qualche genere di approccio epistemologico, legato a una qualche teoria o a un qualche approccio in didattica della matematica: il costruttivismo, la teoria delle situazioni didattiche etc. Questo fa sì che l'inquadramento teorico che essi propongono per i concetti non possa venire accolto in altre teorie che hanno basi epistemologiche differenti. In questo senso sembra significativa la distinzione tra approcci ai concetti che si basano sull'idea di concetto come rappresentazione mentale e altri che si basano sull'idea di concetto come abilità.
Infine, riguardo al criterio (5), notiamo che solo nei modelli di Balacheff e Simon si considerano le relazioni tra le concezioni o i concetti in termini di relazioni semantiche simili a quelle da noi considerate nel capitolo 5, ma questo aspetto rimane implicito e non emerge come uno strumento tecnico adatto per caratterizzare i concetti e per spiegare come si formano quelli che nel capitolo 5 abbiamo chiamato i "complessi concettuali" e come si possono estendere per formare delle reti teoriche semantiche più ampie.
Concludiamo questo capitolo con una considerazione generale che è emersa dall'analisi proposta in questo capitolo: il fatto che molti degli approcci ai concetti

in didattica della matematica da noi esaminati fanno espressamente rifermento ad aspetti semiotici, anche se si usa parlare prevalentemente di “rappresentazioni” in senso generico e non di rappresentazioni semiotiche. Per esempio, Vegnaud parla di “forme linguistiche e non linguistiche che permettono di rappresentare simbolicamente il concetto, le sue procedure, le situazioni e le procedure di trattazione” (Vergnaud, 1990, p. 139); Balacheff parla di “un sistema di rappresentazione” (Balacheff, 1995, p. 224) in maniera sostanzialmente analoga a quella di Vergnaud; Scheiner parla di “sistemi di rappresentazione” ai quali appartengono le rappresentazioni che danno senso agli oggetti (Scheiner, 2016, p. 179), mentre Gray e Tall (1994) e Tall (2013) parlano invece del ruolo che svolge il simbolo matematico nel *procept*. Anche se non possiamo affermare che l’aspetto semiotico abbia un ruolo centrale in tutti gli approcci ai concetti in didattica della matematica, il ruolo delle rappresentazioni sembra essere riconosciuto in molti di essi. Notiamo infine che la questione semiotica è centrale nella distinzione tra senso e denotazione nell’approccio fregeano ai concetti, come abbiamo potuto constatare nel paragrafo 7.3.2., anche se Frege stesso non usa il termine “semiotica” ma parla in senso generico di *segno* (Zeichen).
Inoltre, nessun approccio, tranne quello di Vygotskij (1934), tiene conto degli aspetti sociali e culturali.

## 7. 6. Sintesi

Nel presente capitolo abbiamo esaminato diversi approcci ai concetti, sia in filosofia sia in didattica della matematica. Tale analisi ci ha permesso di notare che nessuno degli approcci esaminati può inquadrare dal punto di vista teorico gli oggetti didattici specifici della didattica della matematica.
Infatti, gli approcci ai concetti consentono di studiare e interpretare l’acquisizione di conoscenza concettuale in didattica della matematica, ma non di definire lo studio dell’acquisizione di tale conoscenza. In generale possiamo affermare che nessuno degli approcci esaminati assume una posizione epistemologica *riguardo alla didattica* della matematica come disciplina, ma che tutti gli approcci assumono una posizione epistemologica *riguardo all’apprendimento* della matematica. Infatti, focalizzandosi i concetti soprattutto sull’aspetto relativo all’acquisizione di conoscenza, l’aspetto ontologico è preso in considerazione solo marginalmente e soprattutto nell’ambito di un qualche approccio epistemologico particolare, per esempio supponendo che la concettualizzazione avvenga per astrazione oppure in termini di riconoscimento di invarianti situazionali. Questo riduce naturalmente il grado di generalità dei modelli stessi e quindi anche la loro possibilità di inquadrare gli aspetti ontologici in senso generale.
Inoltre, gli aspetti relativi all’esigenza di poter cogliere la dinamicità degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica non sono soddisfatti da

nessuno degli approcci poiché essa non è mai parte integrante del modello stesso, il quale non fornisce quindi strumenti tecnici che possano rendere operativa questa idea. Il concetto di *procept* è uno strumento concettuale che tiene conto in un certo senso della transitorietà degli oggetti ma senza fornire degli strumenti tecnici in grado di tenerne conto in maniera appropriata.

L'analisi effettuata ci ha permesso di circoscrivere meglio i criteri evidenziati nel paragrafo 6.3. come caratteristiche di cui una definizione di oggetto matematico dovrebbe soddisfare. Tali criteri erano emersi da un'analisi teorica della letteratura di riferimento e sono state circoscritte attraverso l'analisi di approcci specifici alla conoscenza concettuale sia in filosofia sia in didattica della matematica. L'analisi ha permesso di individuare anche altri criteri di cui la definizione che stiamo cercando potrebbe dover tenere conto; ci riferiamo in maniera particolare al ruolo degli aspetti semiotici e al modo di intendere il significato degli oggetti matematici. Verificheremo nei prossimi capitoli se si tratta di aspetti generali di cui è opportuno tenere conto.

I criteri che la definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica dovrebbe soddisfare verranno riformulate nel paragrafo 8.3. del capitolo successivo.

In tale capitolo esamineremo un'ampia gamma di definizioni di oggetti matematici fornite in didattica della matematica, al fine di verificare se e in quale misura esse tengono conto dei criteri finora evidenziati e al fine di verificare se i criteri emersi come tratti comuni di alcuni approcci ai concetti (ci riferiamo agli aspetti semiotici e alla modalità di intendere il significato degli oggetti matematici) sono criteri trasversali a tali definizioni e devono perciò rientrare tra i criteri di cui tenere conto nella definizione cercata.

# 8. Definizioni di oggetto matematico in didattica della matematica

## 8. 1. Riflessioni preliminari

Nel capitolo precedente abbiamo potuto constatare come gli approcci ai concetti, pur avendo contribuito ad approfondire molti aspetti relativi ai criteri che una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica deve soddisfare, non sono in grado di gettare luce sulla natura di tali oggetti. In particolare abbiamo notato che, attraverso un approccio concettuale, la dimensione relativa agli oggetti rimane celata dietro l'aspetto epistemico, cioè dietro al modo con cui nei vari approcci si suppone che sia possibile accedere alla conoscenza degli oggetti matematici.
Da un lato, la presa in carico degli aspetti epistemologici è inevitabile in didattica della matematica come disciplina, essendo il suo punto focale *l'apprendimento* della matematica, cioè l'acquisizione di conoscenza matematica. Dall'altro però è anche vero che, a causa delle diverse concezioni epistemologiche nelle diverse teorie della didattica della matematica, il chiamare in causa tali concezioni ha un potere disgregativo fortissimo per i discorsi generali, come evidenzia Ernest, citando von Glaserfeld: "To introduce epistemological considerations into a discussion of education has always been dynamite" (von Glaserfeld, 1983, p. 41, citato in Ernest, 2012, p. 1).
Abbiamo potuto notare che, attraverso l'approccio concettuale, quelli che abbiamo chiamato *oggetti matematici specifici della didattica della matematica come disciplina* emergono al più in termini di modelli interpretativi che servono per interpretare le concezioni dello studente dal punto di vista prasseologico, ma non in una dimensione ontologica per la didattica della matematica di per sé. Inoltre, l'aspetto legato alla dinamicità degli oggetti non è contemplato come elemento integrante in nessuno dei modelli esaminati.
Una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica deve tenere conto di una struttura molto più complessa, in cui confluiscono diversi aspetti, non necessariamente direttamente legati alle interpretazioni delle concezioni degli studenti e/o degli insegnanti. Infatti, per fornire gli esempi esposti nel capitolo 6, noi non abbiamo analizzato l'attività in aula, ma la produzione scientifica dei ricercatori in didattica della matematica.
Dunque, si potrebbe supporre che sia il riferimento alla concettualizzazione che richiama direttamente l'aspetto epistemologico, a rendere difficile l'inquadramento degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica, in quanto tale riferimento focalizza l'attenzione su *come* si apprende in matematica piuttosto che su *cosa* sia l'oggetto del processo di insegnamento-apprendimento. In quest'ultima prospettiva i *concetti* diventano infatti a loro volta *oggetti* di studio.

Sembra quindi naturale chiedersi come sono definiti gli oggetti matematici in didattica della matematica, al fine di esaminare se in tali definizioni sono contemplate versioni specificatamente "didattiche" di tali oggetti. Il lettore avrà notato che stiamo parlando di "definizioni" di oggetti matematici e non di "definizione"; infatti, come vedremo in questo capitolo, in didattica della matematica non esiste un modo condiviso di definire gli oggetti matematici. Nel presente capitolo esamineremo e confronteremo sette definizioni di oggetto matematico nate in seno alla didattica della matematica. Per fare ciò ricorreremo ai criteri evidenziati nel paragrafo 7.2., circoscrivendoli e puntualizzandoli tramite gli elementi emersi nella sintesi del capitolo 7. In questo modo potremo verificare se e in quale misura le singole definizioni tengono conto dei criteri che abbiamo evidenziato come necessari per una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica.
D'altro canto, esamineremo le definizioni anche riguardo a due criteri che sono emersi dall'analisi degli approcci ai concetti fatta nel capitolo 7. Si tratta dei criteri relativi alla presa in carico della dimensione semiotica e del modo di intendere il significato degli oggetti matematici. Se questi due criteri dovessero risultare essere criteri trasversali alle diverse definizioni, allora una definizione di oggetto didattico specifica della didattica della matematica dovrebbe tenere conto anche di essi, dato che emergerebbero per così dire "per astrazione" dalle definizioni in questione.
Circoscriviamo dunque in dettaglio i criteri formulati nel paragrafo 7.2. e poi i due criteri aggiuntivi, riferiti all'aspetto semiotico e al significato degli oggetti matematici.
Per gettare luce sulla natura della componente ontologica "didattica" degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica [si veda il criterio (3) nel paragrafo 7.2.] è necessario distinguere due punti di vista diversi anche se strettamente connessi:

- il punto di vista del ricercatore in didattica della matematica riguardo alle concezioni dello studente e/o dell'insegnante (livello prasseologico in didattica della matematica), in termini di modelli interpretativi usati per l'analisi dei fenomeni della prasseologia d'aula riguardo a specifici contenuti matematici;
- il punto di vista del ricercatore in didattica della matematica che studia l'acquisizione di conoscenza riguardo a specifici contenuti matematici nella disciplina didattica della matematica (livello epistemologico), in termini di modelli interpretativi usati per analizzare e interpretare l'acquisizione di conoscenza nella disciplina riguardo a specifici contenuti matematici.

Per riferirci ai modelli interpretativi relativi al livello prasseologico in didattica della matematica parleremo di modelli interpretativi del primo ordine; per riferirci ai modelli interpretativi a livello epistemologico parleremo di modelli interpretativi del secondo ordine.

Spesso queste due componenti sono intrecciate e la seconda componente affiora a volte nell'ambito della *literature review* delle ricerche sull'apprendimento concettuale o in generale sulle concezioni di insegnanti e studenti, riguardo a uno specifico contenuto matematico.[95] Tuttavia, in tali circostanze l'esame della letteratura di riferimento è guidata da obiettivi diversi, legati alle specifiche domande di ricerca, mentre nel caso a cui ci stiamo riferendo noi l'obiettivo è di natura generale: caratterizzare l'evoluzione dell'acquisizione di conoscenza in didattica della matematica riguardo ai contenuti matematici specifici.[96] Questo secondo caso si colloca chiaramente a livello epistemologico *della* didattica della matematica come disciplina, piuttosto che a un livello epistemologico *in* didattica della matematica come prassi. Possiamo affermare che nei due casi ciò che cambia è il "soggetto" epistemico la cui acquisizione di conoscenza viene studiata: quella della disciplina in sé o quella dello studente (o anche dell'insegnante).
La trattazione in generale dell'argomento dei contenuti matematici specifici in didattica della matematica, cioè indipendente da particolari oggetti matematici, si configura come ricerca nell'ambito della filosofia della didattica della matematica, in linea con le caratteristiche di generalità degli argomenti di tale branca della didattica della matematica evidenziate nel capitolo 2.
Accanto ai due punti di vista che abbiamo messo in evidenza finora, riteniamo che sia necessario tenere conto in maniera distinta anche di una terza componente ontologica per gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica: si tratta della componente relativa alla matematica come disciplina, in cui gli oggetti matematici a cui si riferisce la didattica della matematica in prima istanza hanno definizioni e modi d'uso e di emergenza propri. Così, per esempio, un'ontologia della didattica della matematica relativa ai contenuti matematici non potrà prescindere, a nostro avviso, dallo spiegare in che modo gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica si collegano agli oggetti matematici definiti di solito in un linguaggio insiemistico formalizzato e inseriti in una concezione strutturale della matematica [si veda il criterio (2) nel paragrafo 7.2.].

[95] Per esempio, questo potrebbe essere il caso di ricerche relative alle concezioni degli studenti e/o degli insegnanti riguardo all'oggetto matematico "funzione", o all'oggetto matematico "probabilità" o all'oggetto matematico "dimostrazione" etc. Esempi concreti di studi di questo genere sono quelli da noi descritti nel capitolo 6, dati dagli oggetti matematici "funzione" e "dimostrazione".

[96] Naturalmente una tale analisi non ha alcuna pretesa di unicità, come già evidenziato nel capitolo 6, e nemmeno di completezza, in quanto può prendere in esame anche solo frammenti di acquisizione di conoscenza in didattica della matematica riguardo a uno specifico contenuto matematico, sia in verticale, in funzione ai livelli scolastici di riferimento, sia in orizzontale, in riferimento solo a certi approcci teorici e non ad altri.

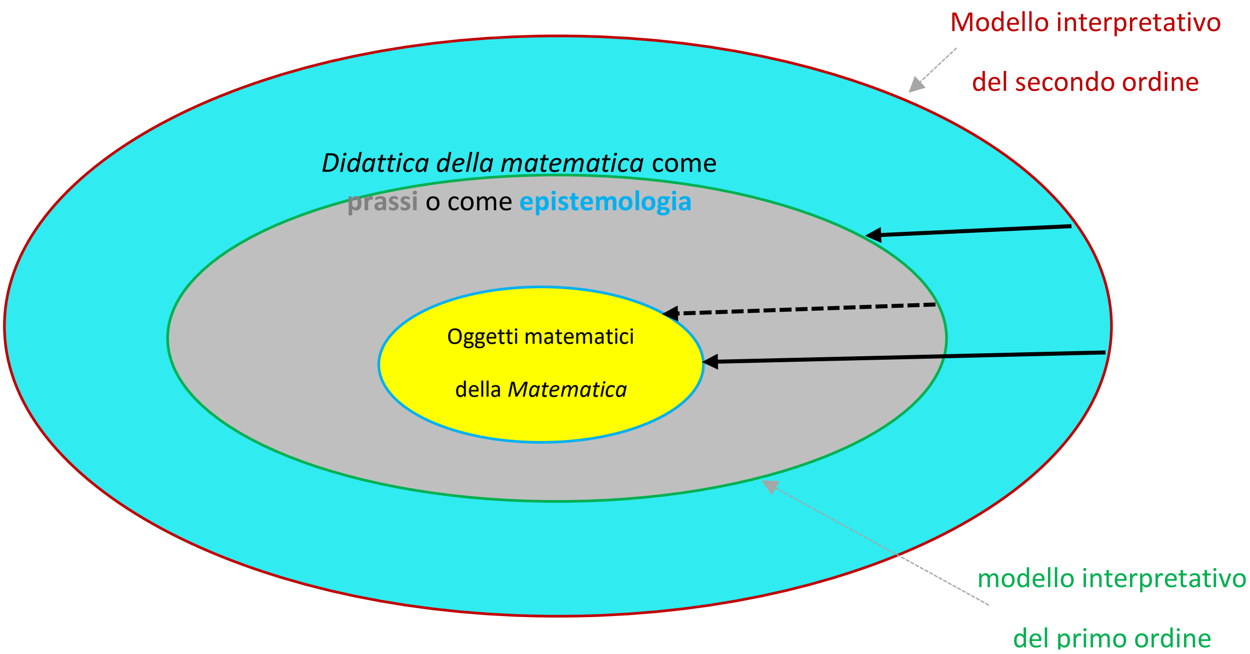



Figura 25. Le tre dimensioni ontologiche degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica e le rispettive dimensioni disciplinari.

I tre livelli ontologici qui descritti sono rappresentati nella Figura 25 attraverso i tre ovali (l'ovale più piccolo rappresenta la componente legata agli oggetti matematici della matematica come disciplina; l'ovale intermedio rappresenta la componente prasseologica relativa ai modelli interpretativi del primo ordine; l'ovale più grande rappresenta la componente epistemologica relativa ai modelli interpretativi del secondo ordine). Ogni ovale si riferisce a uno specifico ambito: gli oggetti matematici (ovale più piccolo) si riferiscono alla matematica come disciplina istituzionalmente riconosciuta; i modelli interpretativi del primo ordine (ovale intermedio) si riferiscono alla didattica della matematica come prassi di ricerca prasseologica; i modelli interpretativi del secondo ordine (ovale grande) si riferiscono all'epistemologia della didattica della matematica.[97] Le frecce rappresentano invece le relazioni tra le tre componenti: le relazioni tra gli oggetti matematici della matematica come disciplina e quelli della didattica della matematica come prassi; le relazioni tra quest'ultimi e gli oggetti

[97] Siamo consapevoli del fatto che anche gli oggetti matematici della matematica come disciplina sono oggetti soggetti a interpretazione e che questo implicherebbe la necessità di tenere conto di un ulteriore modello interpretativo. Esso dovrebbe coinvolgere anche la filosofia della matematica come modello interpretativo "di ordine zero". Questo è senz'altro lecito, opportuno e possibile, ma renderebbe il modello in questione eccessivamente complesso per il momento.

dell'epistemologia della didattica della matematica; le relazioni tra quest'ultimi e gli oggetti della matematica come disciplina.
La definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica che stiamo cercando di fornire nella presente tesi è riferita al livello relativo al modello interpretativo del secondo ordine, il quale interpreta dei modelli interpretativi del primo ordine (freccia nera continua corta). Le altre due frecce nere (quella tratteggiata corta e quella continua lunga) stanno a significare che il legame dei modelli interpretativi del secondo ordine con gli oggetti matematici può essere indiretto, cioè "filtrato" dai modelli interpretativi del primo ordine (freccia tratteggiata), ma anche diretto (freccia continua lunga). Infatti, al fine di poter caratterizzare la tipologia di relazione semantica nei complessi concettuali nel capitolo 6 è stato spesso necessario esaminare gli oggetti matematici di riferimento. Per esempio, abbiamo dovuto riferirci agli insiemi numerici $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ al fine di caratterizzare il complesso concettuale "zero".
Notiamo che, data la complessità delle relazioni tra le componenti ontologiche degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica, per questioni metodologiche può essere opportuno prenderle in considerazione separatamente, come evidenzieremo nel prossimo paragrafo.

## 8. 2. Questioni metodologiche

Nel capitolo precedente abbiamo esaminato le diverse modalità con cui in didattica della matematica si intendono i concetti e abbiamo potuto constatare che in tali approcci è raramente esplicitata la dimensione di modello interpretativo del primo ordine (infatti, nella maggior parte dei casi si parla di "concetti" come se fossero le effettive conoscenze possedute dagli studenti e non delle interpretazioni di tali conoscenze inferite sulla base di modelli concettuali supposti del ricercatore, i cui impliciti vengono esplicitati solo a livello epistemologico generale) e in ogni caso non è mai presa in considerazione la dimensione di modello interpretativo del secondo ordine.
Sulla base delle considerazioni fatte nel paragrafo precedente e dell'esame degli approcci ai concetti nel capitolo 7 possiamo circoscrivere in maniera più dettagliata alcuni concetti espressi nei criteri (1)-(2)-(3)-(4) esposti nel paragrafo 7.4, il che ci induce a riformulare tali criteri.
Dato che in questo capitolo i criteri in questione verranno confrontati con delle definizioni di oggetto matematico in didattica della matematica, essi verranno riformulati per maggiore chiarezza sotto forma di domande fatte sul senso della parola "definizione":

*(1') La definizione tiene conto della dinamicità e transitorietà degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica in termini di una loro evoluzione nel tempo? Se sì, è possibile scorgere in essa un'ontologia transitoria,*

*cioè una caratterizzazione della modalità con cui gli oggetti passano da uno stato all'altro?*
*(2') La definizione riconosce l'esistenza di oggetti matematici istituzionali distinti in matematica e in didattica della matematica e se sì, chiarisce il legame tra essi?*
*(3') La definizione tiene conto, e in maniera distinta, dei modelli interpretativi del primo e del secondo ordine e quindi degli aspetti ontologici specifici della didattica della matematica come disciplina, oltre che di quelli più prettamente concettuali, legati alla prasseologia?*
*(4') La definizione è "assolutamente generale", cioè prescinde da riferimenti a una qualche posizione epistemologica o a una qualche teoria dell'apprendimento?*
*(5') La definizione è in grado di inquadrare tecnicamente la modalità relazionale con la quale si formano i complessi concettuali che costituiscono gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica?*

Nella domanda (1') abbiamo circoscritto il concetto di "dinamicità" espresso nel criterio (1) attraverso il riferimento all'evoluzione nel tempo e l'abbiamo collegato alla presenza di una dimensione transitoria degli oggetti, sull'esempio di quanto esposto riguardo al concetto di *procept* nel capitolo 7; in questo senso parleremo di "ontologia transitoria". Non facciamo espressamente riferimento al criterio della staticità degli oggetti, in quanto diamo per scontato che trattandosi di definizioni di *oggetti* matematici, si dia per scontata una loro dimensione oggettuale.
Nella domanda (2'), riferibile al criterio (2) abbiamo circoscritto il concetto di relazione tra oggetti matematici e oggetti matematici della didattica della matematica come una relazione tra due ambiti scientifici istituzionalmente distinti a cui le due tipologie di oggetti appartengono. Tale relazione può essere esemplificata nel diagramma relativo alle tre dimensioni ontologiche (Figura 25, vedi sopra) attraverso la relazione tra la parte riferita alla matematica come disciplina e la parte riferita alla didattica della matematica come disciplina, astraendo dalle distinzioni tra le dimensioni interne alla didattica della matematica e relativi modelli interpretativi (Figura 26).

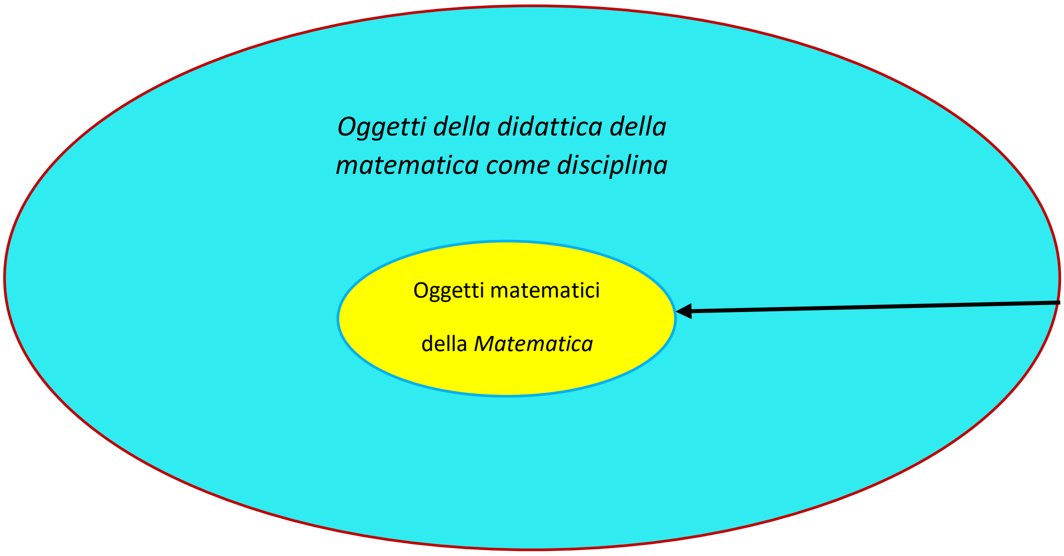



Figura 26. Le due dimensioni ontologiche degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica in cui non vi è una distinzione tra dimensione della didattica della matematica come prassi di ricerca e come epistemologia disciplinare.

Nella domanda (3') abbiamo esplicitato in maniera più dettagliata che cosa si deve intendere per "tenere conto degli aspetti ontologici specifici della didattica della matematica come disciplina, oltre che di quelli più prettamente concettuali", come specificato dalla domanda di ricerca (3): significa tenere conto in maniera distinta dei punti di vista relativi alla prassi relativa alla prasseologia d'aula e all'epistemologia in didattica della matematica e quindi dei modelli interpretativi del primo e del secondo ordine. Tale relazione può essere esemplificata nel diagramma relativo alle tre dimensioni ontologiche (Figura 25, vedi sopra) attraverso la relazione tra le dimensioni interne alla didattica della matematica e i relativi modelli interpretativi, astraendo dalla parte riferita alla matematica come disciplina (Figura 27).

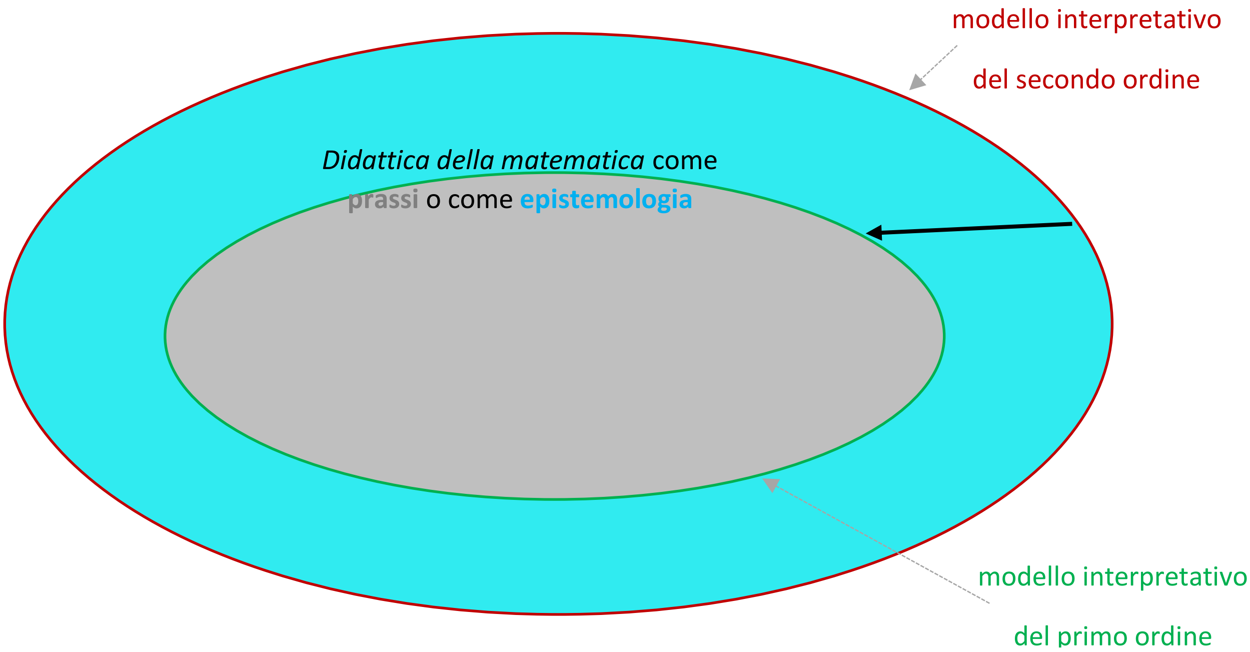



Figura 27. Le due dimensioni ontologiche degli oggetti specifici della didattica della matematica riferite solo alla didattica della matematica come disciplina, senza riferimento alla matematica come disciplina.

Nella domanda (4') abbiamo introdotto il termine "assolutamente generale" per esprimere l'indipendenza della definizione da una specifica epistemologia in didattica della matematica che impedirebbe di poterla considerare una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica *in senso generale*, in linea con il criterio (4).
La domanda (5') è semplicemente la formulazione del criterio (5) in riferimento al senso della parola "definizione".
Come già anticipato, riteniamo opportuno aggiungere ai criteri già formulati e circoscritti finora anche altri due criteri.
Contrassegneremo questi due criteri con (6) e (7).
Il criterio (6) è relativo alla presa in considerazione dell'aspetto semiotico nella caratterizzazione degli oggetti matematici in didattica della matematica.
Tale criterio può essere formulato attraverso la seguente domanda:

(6') *La definizione di oggetto matematico tiene conto del ruolo delle rappresentazioni semiotiche nella caratterizzazione degli oggetti matematici?*

Il criterio (7) è relativo alla modalità con cui è inquadrato il significato degli oggetti matematici nelle diverse definizioni.
Per gettare luce su questo aspetto facciamo riferimento a D'Amore (2001a).

Secondo questo Autore, vale la seguente distinzione tra teorie del significato con approccio *realista* e teorie del significato con approccio *pragmatico*:

- nelle *teorie realiste* il significato è "una relazione convenzionale tra segni ed entità concrete o ideali, indipendenti dai segni linguistici" (D'Amore, 2001a, p. 13) ed è quindi considerato assoluto e oggettivo;
- nelle *teorie pragmatiche* il significato "dipende dal contesto e dall'uso" (D'Amore, 2001a, p.13) ed è quindi considerato relativo e soggettivo.

In questo senso possiamo parlare di approccio realista e approccio pragmatico al significato, dove nel primo caso il significato è assoluto e oggettivo, mentre nel secondo caso esso è personale e soggettivo.
Il criterio (7) può dunque essere formulato come segue:

*(7') La definizione di oggetto matematico si riferisce a oggetti il cui significato è inteso in senso realista o in senso pragmatico?*

Evidenziamo il fatto che in questo capitolo faremo ricorso alla strategia del confronto tra teorie, cioè al *comparing theories* (Prediger, Bikner Ahsbahs, & Arzarello, 2008).
Ricordiamo che, come già evidenziato nel paragrafo 4.3., il *confronto* tra teorie ha un importante ruolo di propulsore nell'incremento della conoscenza: "As the comparison often leads to make implicit assumptions and priorities in the core of the theories and in their empirical components explicit, the comparison contributes to a better understanding [of the theories]" (Prediger, Bikner Ahsbahs, & Arzarello, 2008, p. 9).
Nello specifico, il confronto tra "teorie" a cui ci riferiamo qui è un confronto tra le definizioni di oggetto matematico fornite nelle varie teorie sulla base dei criteri stabiliti nel presente paragrafo, anche se nel fare ciò le definizioni verranno per la maggior parte esaminate in riferimento al loro contesto teorico più ampio.
Prima di procedere con la trattazione sottolineiamo il fatto che il termine *definizione* viene qui usato in senso molto ampio, come una descrizione che mette in evidenza i tratti distintivi di un'entità oppure, in alcuni casi, il modo con cui essa emerge o viene costruita.

## 8. 3. Analisi

### 8. 3. 1. Le sette definizioni esaminate

Di seguito proporremo sette definizioni (nel senso del termine "definizione" specificato sopra) di oggetto matematico, tutte endogene, cioè formulate nell'ambito della didattica della matematica e quindi emergenti dalle necessità

specifiche della disciplina stessa e non mutuate da altre discipline, come per esempio dalla filosofia della matematica.
Con le sette definizioni che esamineremo di seguito non intendiamo avanzare alcuna pretesa di esaustività delle definizioni presenti in didattica della matematica, ma crediamo di aver scelto quelle più diffuse e significative, con lo scopo di proporre una gamma sufficientemente ampia di posizioni presenti nella disciplina.
Per rendere più chiaro il significato delle definizioni sarà spesso necessario inserirle nel contesto teorico in cui sono nate. A tale scopo, prima di discutere la corrispondenza delle singole definizioni con i criteri evidenziati in precedenza forniremo, ove necessario, una descrizione e discussione del loro contesto teorico di riferimento.

**Definizione 1**

> [un oggetto matematico è] un emergente da un sistema di prassi dove sono manipolati oggetti materiali che si scompongono in differenti registri semiotici: registro orale, delle parole o delle espressioni pronunciate; registro gestuale; dominio delle iscrizioni, ovvero ciò che si scrive o si disegna (grafici, formule, calcoli eccetera), vale a dire, registro della scrittura"; essendo il "praxema" un oggetto materiale legato alla prassi, l'oggetto è allora un "emergente da un sistema di praxema". (Chevallard, 1991, p. 8)

La definizione qui fornita si colloca all'interno della teoria antropologica della didattica (TAD) (Chevallard,1992).
L'impostazione pragmatista sulla quale si basa la teoria in questione pone al centro dell'attenzione l'azione dell'essere umano, aprendo la strada a quella che si può chiamare una antropologia cognitiva, sulla base della quale Chevallard (1991, 1992, 1999) fornisce la definizione di oggetto matematico appena citata.
Seguendo la TAD, che pone "l'attività matematica, e dunque l'attività di studio in matematica, nell'insieme delle attività umane e delle istituzioni sociali" (Chevallard, 1999, p. 221), non è possibile parlare di significato in senso generale, ma è necessario distinguere tra significato istituzionale (relativo agli oggetti accettati come tali da parte di un'istituzione, come per esempio la scuola, l'università etc.) e significato personale (relativo al rapporto che il singolo individuo instaura con un dato oggetto istituzionale), cioè il *rapport à l'objet*. Nella TAD, il concetto di significato si scinde in una molteplicità di significati, dipendenti dal contesto e dagli individui che interagiscono all'interno di un'istituzione. Di conseguenza anche l'oggetto stesso subisce una tale scissione; anzi, la sua stessa esistenza non è un fatto oggettivo ma dipende dall'azione intenzionale di riconoscimento da parte di un soggetto o di un'istituzione:
Un oggetto esiste dal momento in cui una persona X (o una istituzione I) riconosce questo oggetto come esistente (per essa). Più esattamente, si dirà che l'oggetto O esiste per X (rispettivamente per I) se esiste un oggetto, rappresentato da R(X,O) (rispettivamente

R(I,O) e detto relazione personale da X ad O (rispettivamente relazione istituzionale da I ad O). (Chevallard, 1992, p. 76)

Nella TAD il significato personale degli oggetti matematici è dato dalla gamma più o meno ampia di rapporti che il soggetto ha stabilito con l'oggetto durante la prassi nonché della tecnologia che è in grado di attivare per descrivere, giustificare e motivare i loro usi. Considerazioni analoghe valgono per il significato istituzionale di tali oggetti.

### *Discussione in riferimento alle domande (1')-(7')*

Per quanto riguarda la domanda relativa alla considerazione di oggetti matematici istituzionali distinti per la matematica e per la didattica della matematica, possiamo affermare che la definizione tiene conto di una componente personale e una componente istituzionale del sapere matematico, ciascuna riferita al rapporto all'oggetto personale o istituzionale, ma non vi è una distinzione tra diverse tipologie di oggetti istituzionali. Cioè nella TAD la componente istituzionale della didattica della matematica si sovrappone a quella della matematica e questo non consente alla specificità della conoscenza matematica in didattica della matematica di emergere. In essa non è quindi esplicitamente presa in considerazione una dimensione ontologica specifica degli oggetti matematici della didattica della matematica rispetto a quelli della matematica.

Possiamo notare che la TAD non ha come obiettivo quello che ci siamo posti noi qui, cioè il suo obiettivo non è quello di caratterizzare o definire un costrutto specifico della didattica della matematica, ma quello di mettere in evidenza il carattere intrinsecamente umano della matematica, senza perciò dover distinguere tra matematica prodotta e matematica appresa. La TAD è la prima teoria specifica della didattica della matematica che mette in evidenza tale carattere antropologico della produzione matematica. Essa è tuttavia una teoria molto generale e non fornisce strumenti operativi per la lettura e l'analisi dei fenomeni relativi all'apprendimento. Ancor meno essa è una teoria che si occupa di aspetti relativi all'epistemologia della didattica della matematica, dunque le questioni relative all'acquisizione di conoscenza non fanno parte delle domande a cui la TAD cerca di fornire una risposta. Infatti, si tratta di una teoria che risale agli inizi degli anni '90 del secolo XX, periodo in cui la didattica della matematica aveva appena iniziato a crescere come disciplina, ma non aveva ancora un'evoluzione sufficientemente storicizzata per poter evidenziare una dimensione epistemologica propria. Come abbiamo notato invece nei capitoli precedenti, è proprio la dimensione epistemologica a far sì che emerga la necessità di distinzione tra oggetti matematici della matematica come disciplina e oggetti matematici specifici della didattica della matematica, in quanto è solo attraverso la storicizzazione dell'acquisizione di conoscenza in una disciplina che è possibile individuare delle tendenze in tale evoluzione.

La definizione tiene esplicitamente conto della caratteristica essenzialmente semiotica dell'attività matematica, in quanto parla espressamente di "registri semiotici".
Una componente importante nella TAD, che non emerge tramite la definizione di oggetto qui fornita, è il concetto di *prasseologia*, che si struttura su due livelli: (1) la *prassi*, cioè il *know-how*, che include diversi tipi di problemi nonché le tecniche disponibili per risolverli; (2) il *logos*, cioè la conoscenza che include il discorso che descrive, spiega e giustifica le tecniche e che viene chiamato appunto *tecnologia*, la quale a sua volta è giustificata dalla teoria che rappresenta una specie di modello del secondo ordine di descrizione, spiegazione e giustificazione (García, Gascón, Ruiz Higueras, & Bosch, 2006).
Il concetto di prasseologia mette in evidenza, attraverso il concetto di logos, la netta distinzione tra la conoscenza dello studente e l'interpretazione che di essa dà il ricercatore (che può anche coincidere con l'insegnante) nonché la natura di modello interpretativo del primo ordine di quest'ultima interpretazione (spiegazione di un fenomeno osservato sulla base di supposizioni sul suo funzionamento). Non vi è, invece, per i motivi già evidenziati in precedenza, una distinzione tra modelli interpretativi del primo e del secondo ordine. In questo senso la definizione non può nemmeno inquadrare tecnicamente la modalità relazionale con la quale si formano i complessi concettuali che costituiscono gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica, dato che non tiene conto della dimensione relativa ai modelli interpretativi del secondo ordine.
Riguardo alla questione relativa alla dinamicità degli oggetti matematici possiamo affermare che la definizione qui esaminata contempla implicitamente una loro evoluzione temporale, in quanto parla di oggetti che *emergono* da un sistema di prassi, la quale si dovrebbe quindi protrarre nel tempo. Inoltre possiamo affermare che la definizione fornita da Chevallard tiene conto in maniera implicita sia dei processi sia degli oggetti, in quanto l'oggetto (risultato) emerge da un sistema di prassi, cioè emerge da attività usuali all'interno dell'istituzione in cui avviene l'attività matematica (nel nostro caso l'apprendimento) che si protrae nel tempo. Tuttavia, non vi è presente un'*ontologia transitoria* che tenga conto del modo in cui l'oggetto si modifica nel tempo.
La definizione si colloca chiaramente in una prospettiva pragmatica riguardo al significato, come già sottolineato in precedenza. Il significato degli oggetti matematici risiede dunque nel loro uso; più in particolare il significato è dato, a nostro avviso, dalla gamma più o meno ampia di rapporti che il soggetto ha stabilito con l'oggetto durante la prassi nonché della tecnologia che è in grado di attivare per descrivere, giustificare e motivare i loro usi.
Si tratta dunque di un significato che è personale o istituzionale, come evidenziato nella TAD, a seconda che sia il soggetto individuale o una comunità a compiere le prassi e a stabilire un rapporto all'oggetto.
Infine, la definizione non può essere considerata come assolutamente generale. Infatti, la sua accettazione da parte di posizioni differenti da quelle della TAD

stessa richiederebbe per esempio l'accettazione di una terminologia specifica, come per esempio l'accettazione del termine *praxema* che non è necessariamente traducibile e reinterpretabile negli altri approcci in didattica della matematica.

**Definizione 2**

> (…) l'insieme degli "usi" determina (…) il significato degli oggetti. (…) Gli oggetti matematici sono dunque simboli di unità culturali che emergono da un sistema di utilizzazioni che caratterizzano le pragmatiche umane (o, almeno, di gruppi omogenei di individui) e che si modificano continuamente nel tempo, anche a seconda dei bisogni. (D'Amore, 2001a, pp. 15–16)

Questa seconda definizione non si colloca esplicitamente all'interno di una specifica teoria in didattica della matematica, anche se risulta come frutto di un'analisi della TAD dal punto di vista del suo ruolo nel contrapporre una prospettiva pragmatica a una realista in didattica della matematica (D'Amore, 2001a; D'Amore, Fandiño Pinilla, & Sbaragli, 2017) o dall'esame delle sue relazioni con altri approcci (D'Amore & Godino, 2006).

***Discussione in riferimento alle domande (1')-(7')***

Possiamo affermare che tale definizione è implicitamente collocata nel quadro più ampio della TAD, ma che essa ha il pregio di prescindere dal ricorso alla terminologia specifica di quest'ultima, il che la rende più generale della definizione 1. Tuttavia, in un contesto più ampio essa eredita le caratteristiche epistemologiche della TAD e quindi non può essere considerata assolutamente generale. In questo senso non è possibile dunque fare affermazioni riguardo alla possibilità di inquadrare tecnicamente la modalità relazionale con la quale si formano i complessi concettuali che costituiscono gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica, per il motivo già esposto in riferimento alla TAD. La definizione non riconosce l'esistenza di oggetti matematici istituzionali distinti per la matematica e per la didattica della matematica e quindi non soddisfa il corrispondente criterio in maniera analoga alla definizione 1, a cui si ispira. Non ci è possibile affermare nulla di specifico riguardo alla considerazione dei modelli interpretativi del primo e del secondo ordine.
La definizione risulta interessante per la nostra trattazione per due motivi: (1) essa mette al centro il concetto di unità culturale, che va oltre una condivisione di prassi e prasseologie tipiche di un'istituzione, e che sarà centrale in altre definizioni che presenteremo successivamente; (2) essa mette in risalto la componente temporale e quindi l'idea degli oggetti matematici come entità dinamiche *in evoluzione*, facendo così intuire la necessità di un'ontologia transitoria nella definizione degli oggetti matematici.

Il primo motivo è di un certo interesse, ma non è fondamentale per la nostra trattazione, mentre il secondo sì. Infatti, esso consente di affermare che la definizione soddisfa il requisito relativo alla considerazione della dinamicità degli oggetti e all'ontologia transitoria in maniera più esplicita rispetto a quanto ne faccia la definizione 1. Infatti, notiamo che l'Autore parla di simboli di unità culturali che *si modificano continuamente nel tempo* e quindi l'evoluzione temporale e la transitorietà degli oggetti matematici è evidenziata in essa in maniera esplicita.
Notiamo che la definizione rimanda a un significato degli oggetti matematici che risiede sì nel loro uso, ed è quindi di natura pragmatica, ma che risiede anche nel loro essere simboli di unità culturale. Si tratta di un uso di simboli che è culturalmente determinato e che contribuisce a sua volta alla determinazione dell'identità del soggetto nel senso evidenziato da Vygotskij (1934). Inoltre, il richiamo al fatto che gli oggetti matematici "si modificano (…) a seconda dei bisogni" (D'Amore, 2001a), richiama esplicitamente l'attenzione sull'inevitabile mutevolezza, oltre che soggettività, del significato stesso di tali oggetti.
Il richiamo agli oggetti matematici intesi come *simboli* è anche un rinvio al ruolo della semiotica, che viene evidenziata da D'Amore (2005b) come la base stessa della noetica, cioè della concettualizzazione.

**Definizione 3**

> (…) mathematical objects are fixed patterns of reflexive human activity encrusted in the ever changing world of social practice mediated by artifacts. (Radford, 2008a, p. 222)

La definizione qui proposta si colloca all'interno della teoria dell'oggettivazione (TO) (Radford, 2008a, 2018). Data la complessità delle basi filosofiche e ontologiche della TO, riteniamo necessario esporre in dettaglio il percorso che segue la costruzione della sua ontologia. A tale scopo ci serviremo soprattutto di Radford, 2014a, 2019.
Ciò che rende diversa la concezione di oggetto matematico nella TO rispetto a quella in altre teorie è la *natura* stessa del concetto di ontologia. Di seguito ci soffermeremo dunque sugli aspetti che ci sembrano necessari per comprendere questa sua specificità, in maniera tale da gettare luce sulla definizione di oggetto matematico nella TO.
L'ontologia a cui fa riferimento la TO (Radford, 2014a) si fonda su una prospettiva fenomenologica, ma tale prospettiva non risale alla fenomenologia husserliana, essa deriva piuttosto dalle posizioni di Hegel e Marx.
Per delineare tale ontologia, Radford traccia un percorso che ha la sua prima tappa importante nei lavori di Kant. Tale tappa serve sia per mettere in evidenza il punto di partenza per una teoria della conoscenza di stampo socioculturale, sia per

spiegare in che senso la posizione della TO si distingue da una posizione di fondo kantiana.
La fenomenologia kantiana è considerata importante da Radford per la didattica della matematica per via dell'influenza che ha avuto sui lavori di Piaget (1970, citato in Radford, 2014a, p. 125) e sulla corrente costruttivista in didattica della matematica (p.e. Cobb, Yackel e Wood, 1992; Yackel e Cobb, 1996, citati in Radford, 2014a, p. 125), ma anche in quanto con Kant si ha per la prima volta una teoria della conoscenza che *pone al centro l'individuo* (Radford 2014a, p. 125).
Radford mette in evidenza due aspetti fondamentali: (1) il fatto che attraverso la distinzione tra fenomeno (entità che "popola" il mondo sensibile) e noumeno (entità che "popola" il mondo intelligibile), Kant mantiene in sostanza un'ontologia platonista, in cui gli oggetti della conoscenza hanno una loro esistenza ideale, ma che allo stesso tempo (2) nell'acquisizione di conoscenza l'essere umano ha sempre bisogno sia di rappresentazioni accessibili tramite i sensi sia della conoscenza intellettuale che va oltre il sensibile. Infatti, quest'ultimo aspetto si evince dal fatto che pur necessitando del particolare per accedervi, ciò che viene appreso, lo si apprende dal generale che viene letto nel particolare (Radford, 2014a).[98]
Introducendo nella sua teoria della conoscenza il soggetto conoscente (un soggetto epistemico astratto), ma mantenendo allo stesso tempo una netta separazione tra fenomeno e noumeno, Kant è ontologicamente platonista ed epistemologicamente anti-platonista:

> To sum up, while Kant moves into new directions through the insertion of an abstract sensing constructive epistemic subject, and elaborates a sophisticated phenomenological account around the manner by which we intuit things, he remains, as ontology is concerned, a Platonist who, although acknowledging the importance of sensuous experience, makes sure to keep phenomena and noumena separate. Although controversial, his epistemology is clearly innovative. His ontology, by contrast, is squarely traditional. In his ontology, Kant is a Platonist. In his epistemology, he is anti-Platonist. (Radford, 2014a, p. 131)

La maggior parte delle teorie in didattica della matematica sono implicitamente o esplicitamente kantiane, afferma Radford, il che diventa evidente già dalle metafore alle quali di solito si ricorre in tali teorie quando si parla di conoscenza: si ricorre per esempio alla metafora "manufatturiera", secondo cui lo studente *costruisce* la sua conoscenza, oppure alla metafora del "raggiungere", secondo cui l'oggetto della conoscenza deve essere *scoperto* o *disvelato* (Radford, 2014a, p. 125).

[98] A tale proposito Radford cita il ben noto esempio del triangolo isoscele a cui ricorre Kant ne *La critica della Ragion pura* (Kant, 1781/2000) per mostrare come in geometria noi tracciamo un triangolo particolare, ma nel ragionare su esso in realtà facciamo riferimento non a quel triangolo particolare ma a un concetto generale di triangolo (notiamo che qui la posizione di Kant è chiaramente platonista).

La TO, invece, poggia su un genere di idea di oggetto e di conoscenza che sono completamente diverse, in quanto si basano su una fenomenologia diversa che passa, come già evidenziato, da Hegel, per arrivare a Marx, coinvolgendo prospettive psicologiche derivanti dalla scuola russa (qui il riferimento è principalmente a Vygotskij e Leont'iev).
Procediamo però con ordine, in maniera tale da rendere esplicite non solo la natura, ma anche le origini dell'ontologia della TO.
Avevamo già messo in evidenza nel capitolo 7, in cui abbiamo discusso i concetti in filosofia, che per Hegel l'idea di concetto è diversa da quella classica. Infatti, avevamo sottolineato che per Hegel il *C*oncetto è sia la cosa conosciuta (cioè l'oggetto conosciuto) sia lo strumento di conoscenza (Hegel, 1830).
L'ontologia legata a una tale posizione non può essere statica, dato che l'identificazione tra strumento e oggetto della conoscenza presuppone che l'oggetto evolva durante la conoscenza. Infatti, Radford evidenzia che: "To the static ontology of Kant, Platonists and Idealists, Hegel opposes an ontology of movement, in which things and beings react in a mutual or dialectical manner" (Radford, 2014a, p. 131). La fenomenologia hegeliana è diversa da quella kantiana poiché seguendo Kant (o altri autori che si collocano nella corrente idealista, cui appartiene Kant in questa circostanza), il soggetto non può che cogliere dell'oggetto solo ciò che esso stesso vi ha "messo dentro", evitando in realtà qualsiasi possibilità di evoluzione, mentre per Hegel la coscienza si sviluppa tramite la dialettica della contraddizione tra concetti già posseduti e aspetti nuovi derivanti dai fenomeni percepiti: "Hegel offers an account of consciousness's development. In its development, consciousness first finds sensuous immediacy, followed by perception, then understanding" (Radford, 2014a, p. 132).
Vi sono dunque tre stadi nell'evoluzione della coscienza, secondo Hegel: (1) allo *stadio dell'immediatezza sensoriale* per la coscienza, *la mente e la cosa conosciuta non sono ancora distinte*; questo è lo stadio più ricco di contenuto e sensazioni e più povero di pensiero; (2) allo *stadio della percezione*, l'oggetto e la mente appaiono separate, nel senso *che ciò che viene conosciuto appare come "cosa"* al soggetto, anche se non come "cosa singola", cioè come un particolare, ma come un *universale*; (3) infine, allo *stadio della comprensione,* la coscienza considera gli oggetti come *assoggettati a leggi* (nel caso di Hegel, leggi di necessità) (Radford, 2014a, p. 133, enfasi nostra).
Dunque, in Hegel non solo "la cosa", l'oggetto, ma anche l'essere, attraverso l'unitarietà tra oggetto e concetto, espressa tramite i tre stadi di evoluzione della coscienza, è assoggettato alla fenomenologia, ed è dunque esso stesso *fenomeno*. Rispetto a Kant non vi è quindi, in Hegel, la dualità tra fenomeno e noumeno.
Un aspetto importante della fenomenologia hegeliana, che la collega alle posizioni di Vygotskij espresse in *Pensiero e linguaggio* (Vygotskij, 1934), è il fatto che essa si basa fortemente sul linguaggio. Infatti, per Hegel l'universo del senso per la coscienza è costituito dal linguaggio, così come per Vygotskij il pensiero non è

semplicemente espresso per mezzo della parola, ma *è realizzato da essa* (Radford, 2014a, p. 135).

Concludendo, Radford riassume come segue gli aspetti principali della fenomenologia hegeliana:

> To sum up, Hegel (1977) elaborated a phenomenology based on a dialectical relationship between universals and particulars, between things and beings. In this phenomenology, things and beings exist as phenomena. One distinctive trait of this phenomenology is the fundamental role that is ascribed to language. Language is not merely considered a system of signs. It constitutes the universe of sense, where things and beings are reflected by and reflect each other. Rather than being a medium of communication, language is the material in which things, thought, and consciousness come into being in a unitary manner. (Radford, 2014a, p. 135)

È proprio questa base linguistica della fenomenologia hegeliana, sottolinea Radford (2014a), a essere criticata da Feuerbach prima e da Marx poi, nelle loro impostazioni materialiste, in cui *realtà* e *essere* non sono limitati al, e determinati dal, linguaggio: Feuerbach elabora un approccio materialista in cui il reale è equiparato al sensibile e in cui la pratica diventa la relazione sensoriale di esseri sensoriali con una realtà sensoriale; Marx compie un ulteriore passaggio, in cui problematizza l'idea di "reale" in Feuerbach, mettendo in evidenza che il "reale" non è semplicemente un insieme di cose sensibili, ma è una realtà storicamente e culturalmente determinata (Radford, 2014a, p. 136).

Un aspetto che Marx considera in più rispetto a Feuerbach è la relazione tra la conoscenza storicamente determinata e il suo agire sugli esseri umani che tramite l'interazione con essa diventano ciò che sono. Tale relazione si stabilisce tramite la *praxis*, *l'attività*, che non è semplicemente l'agire del soggetto sulla realtà sensibile, ma è un'attività sociale etica e comunitaria, che rappresenta la vera categoria ontologica di base:

> Marx had then to answer the question of what constitutes the nature of beings and things whose conditions of possibility cannot be located in the intuitions and workings of the mind (…): the conditions of possibility of things and beings, of knowledge and consciousness, reside in human praxis—an entirely new conception of practice. (…) This new conception of practice, to which Marx refers as praxis, is not, hence, a kind of ancillary background where people get in touch or gather for some purpose (as in modern versions of interactionism). Praxis is rather the foundation from which consciousness arises; *praxis is the ultimate ontological founding category* (…) Through the introduction of this new materialist and historical conception of practice, Marx moves away from the idealist and abstractionist conceptions of practices of his time. (Radford, 2014a, p. 137, enfasi nostra)

Radford nota che il concetto marxiano di praxis o attività è stato sviluppato dal punto di vista psicologico nell'activity theory di Leont'ev ma che, oltre questo fatto, ciò che sembra particolarmente interessante del lavoro di Leont'ev per la didattica della matematica è "how the human psyche arises out of the contradictions, the transformations, and all the elements that come into play in activity" (Radford, 2014a, p. 138). Centrale appare in questo senso il concetto di oggetto/motivo, che richiama la relazione sociale dinamica tra individuo e società:

The *object* is that which drives and sets the activity into motion. An object, "(fishing, for instance) is what endows the activity with a particular *intent*" (Roth & Radford, 2011, p. 6). The *motive* is both sociocultural and subjective (or individual): it is sociocultural in the sense that fishing has a sociocultural signifying valence attached to it; it is subjective in the sense that a motive is "determined by the sense of the child [or the individual] for a given task, a given situation" (Leont'ev, 1978, p. 178). The motive responds to a need that is not merely organic; it belongs also to the emotional realm. (Radford, 2014a, p. 138)

Dunque, l'idea di *motivo* introduce una componente teleologica nella dinamica che collega l'individuo alla dimensione socioculturale, facendo sì che la praxis non sia una semplice attività contrattuale e utilitaristica, ma che sia quello che Hegel e Marx chiamano *labour* e che si configura come una sorta di "forma di vita" (Radford, 2012, 2014a).

Nella TO in realtà non si parla semplicemente di *labour*, ma di *joint labour* (Radford, 2014a, 2016, 2018), nel quale l'insegnante e lo studente congiungono i propri sforzi in uno sforzo etico comune per la riuscita della pratica comunitaria di insegnamento-apprendimento. Ed è proprio attraverso l'intreccio tra oggetto e motivo, evidenziata da Leont'ev, che l'attività educativa acquisisce una dimensione in accordo con il concetto di *joint labour*, in cui la dualità tra oggetto e soggetto viene definitivamente superata (Radford, 2014a).

C'è da chiedersi ora che cosa si debba intendere per conoscenza e per apprendimento nell'ambito della TO, dato che l'oggetto che si conosce non ha più una conformazione statica e rappresentabile, p. e. sotto forma di concetto, ma è *una variabile* della praxis. La conoscenza è vista in questo quadro di riferimento come pura *possibilità*, cioè come ciò che Hegel intende per *generale*, che non è rappresentabile e che necessita sempre di essere rivestito di concretezza per potersi attualizzare; attualizzazione che non può che avvenire nel *particolare* (Radford, 2014a). Dunque è l'attività, vista come *praxis comunitaria*, che consente alla conoscenza, presente come pura potenzialità, di manifestarsi concretamente nel particolare. Questo chiarisce anche in che senso per Radford sia la praxis (nel caso della TO il *joint labour*) a costituire la categoria di base per l'ontologia nella TO: *è la praxis comunitaria che conforma, attraverso il motivo, l'intreccio tra oggetto e soggetto, che si manifesta come attualizzazione della conoscenza potenziale*.

A proposito dell'ontologia della TO e del modo di considerare la conoscenza, di recente Radford ha evocato l'immagine dell'aula di matematica come una sala da concerto in cui la matematica, in modo simile a quanto avviene con la musica, si materializza attraverso l'attività sociale degli esseri umani che agiscono nell'aula (studenti e docente):

> To spell out the similarity between playing music and doing mathematics in school (…) I outlined an ontology in which mathematics and music are considered as something general in Hegel's sense; that is, as culturally and historically constituted generative capacities to engage in the world in certain ways. Phenomenologically speaking, through human activity, these generative capacities become materialized.

> They become singular evolved forms of something general that before being set into motion by activity were potentiality, pure possibility. It is through activity that mathematics and music come into sensible existence as something that can be now an object of feeling, thought, consciousness, critique, and transformation. (Radford, 2019, p. 82)

### *Discussione in riferimento alle domande (1')-(7')*

Riassumendo quanto esposto, possiamo affermare che la componente istituzionale della matematica come disciplina è presente nella TO in termini di conoscenza potenziale che necessita della pratica comunitaria per essere attualizzata e diventare conoscenza del singolo. Tuttavia, nella TO vi è una sovrapposizione tra la componente istituzionale della matematica come disciplina e la componente istituzionale della didattica della matematica come disciplina, che non consente di mettere in evidenza la specificità epistemologica degli oggetti di quest'ultima. Ci sarebbe infatti da chiedersi se lo studente oggettiva la conoscenza potenziale prodotta dai matematici o quella dei didatti della matematica, dato che le pratiche che consentono tali oggettivazioni sono molto diverse tra loro.[99] In questo senso non è presente nemmeno una esplicitazione degli aspetti ontologici specifici della didattica della matematica espressi tramite l'evidenziazione e la distinzione di modelli interpretativi del primo e del secondo ordine. Dunque, nemmeno in questo caso è possibile fare affermazioni riguardo alla possibilità di inquadrare tecnicamente la modalità relazionale con la quale si formano i complessi concettuali che costituiscono gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica.
La sovrapposizione delle due componenti istituzionali, quella della matematica e quella della didattica della matematica, è dovuta, a nostro avviso, al fatto che l'ontologia proposta da Radford (2014a, 2019), è un'ontologia molto generale, così come lo è la teoria dell'apprendimento che da essa consegue. In altre parole: gli oggetti a cui essa si riferisce non sono necessariamente oggetti matematici, ma possono essere oggetti di discipline anche molto diverse dalla matematica. In questo senso, nella TO la dimensione epistemologica specifica della disciplina "matematica" sembra sparire completamente. La TO fornisce lenti formidabili per comprendere aspetti del processo di insegnamento-apprendimento in generale, che

[99] Si potrebbe controbattere che le pratiche a cui si riferisce l'oggettivazione sono pratiche della comunità di appartenenza di coloro che partecipano al *joint labour* e quindi gli oggetti matematici in questione saranno specifici di quella comunità che è la classe. Tuttavia bisogna allora chiedersi se e come questi oggetti si relazionano con quelli della comunità dei matematici e se per inquadrare anche tali oggetti non sia necessaria una prospettiva ontologica non solo mista, cioè che contempli sia una posizione pragmatista sia una realista, complementari tra loro, ma che possa passare all'occorrenza da una all'altra. Solo in una tale prospettiva, a nostro avviso, è possibile tenere conto sia della dimensione socioculturale dell'epistemologia dell'apprendimento dello studente, su cui si focalizza l'attenzione della prassi della didattica della matematica, sia di quella epistemologica della didattica della matematica come disciplina.

prima di essa rimanevano celati; tuttavia, proprio a causa della sua focalizzazione su tali aspetti più generali del processo educativo, essa non può tenere conto di altri aspetti più specifici della disciplina.
Per il nostro proposito questo significa che assumere una prospettiva epistemologica riguardo agli oggetti matematici specifici in didattica della matematica non è in contraddizione con la TO, ma che una tale prospettiva epistemologica è secondaria rispetto a quella generale sulla conoscenza. È vero che nella TO la parte del *joint labour* che viene svolta dallo studente consiste nella sua accezione più concreta nel "becoming fluidly conversant with the various layers of generality of the object and their enabling forms of action" (Radford, 2008a, p. 226), il che mette in evidenza la presenza di diversi livelli di generalità, caratteristica specifica degli oggetti matematici evidenziata già in D'Amore (2001a), ma questo aspetto non è sufficiente per tenere conto di altre caratteristiche specifiche della conoscenza matematica, come per esempio il carattere estensionale dei suoi oggetti, la necessità logica delle relazioni tra essi nonché della specificità sintattica dei suoi linguaggi.
Concludendo, possiamo affermare che la sovrapposizione tra quelli che sono gli oggetti istituzionali per la matematica e per la didattica della matematica non consente di mettere in evidenza le specificità degli oggetti matematici della didattica della matematica. Inoltre, l'ontologia che si cela dietro alla definizione di oggetto matematico nella TO non tiene conto della specificità epistemologica della conoscenza matematica, il cui conformarsi in termini di pattern fissi nelle pratiche sociali e la cui oggettivazione tramite le pratiche comunitarie richiede strumenti e linguaggi con carattere specifico, i quali a loro volta la conformano in termini di sistemi di conoscenze basati su relazioni di natura logica.
Nella definizione di oggetto matematico nella TO non vi sono delle considerazioni riguardo alla conoscenza in didattica della matematica intesa in termini di modelli interpretativi del primo o del secondo ordine e tali caratteristiche non emergono nemmeno dal contesto più ampio della definizione. Infatti, in essa non vi è alcun riferimento al punto di vista del ricercatore in didattica della matematica, né inteso come colui che analizza i fenomeni d'aula, né tantomeno inteso come colui che analizza la produzione di conoscenza in didattica della matematica dal punto di vista della sua evoluzione epistemologica.
Riguardo al criterio relativo alla dinamicità degli oggetti matematici, possiamo affermare che la definizione di oggetto matematico nella TO tiene conto in maniera esplicita della dualità dinamicità/staticità, in quanto in essa non solo è presente il fattore temporale (si noti infatti che il mondo della pratica sociale dal quale emergono i pattern fissi, chiamati oggetti matematici, è *ever-going*, cioè in continua evoluzione, ma anche che i *pattern fissi* che emergono dalle pratiche sociali sono delle *immagini istantanee* di tale evoluzione. Inoltre, come già messo in evidenza, l'ontologia della TO è un'ontologia transitoria poiché l'ultima categoria fondante per la sua ontologia è la praxis, cioè un processo che è necessariamente transitorio e in evoluzione. È possibile affermare dunque che la

definizione di oggetto matematico qui discussa fa riferimento a un'ontologia transitoria, anche se tale concetto non è esplicitamente espresso nella TO.
L'idea di oggetto matematico nella TO è chiaramente di natura pragmatica, in quanto il significato degli oggetti non è assoluto, ma emerge dalle pratiche sociali umane. Ma tale significato ha un'altra particolarità, a nostro avviso, in quanto esso non è circoscritto a un oggetto concettuale ma, attraverso la soggettivazione, coinvolge il soggetto stesso.
Il significato a cui si riferisce la definizione di oggetto matematico della TO è perciò, a nostro avviso, *il soggetto stesso*, visto nel suo rapporto all'oggetto. Il significato non può dunque essere espresso solo dall'*uso* che il soggetto fa dell'oggetto, nel senso evidenziato da Wittgenstein (1953/2003), ma deve tenere conto prima di tutto del soggetto, visto attraverso il suo ricorrere all'oggetto. Notiamo come, essendo gli oggetti matematici nella TO dei prodotti culturali, l'idea del ruolo che l'uso dell'oggetto matematico ha nella determinazione dell'identità del soggetto, messa già in evidenza nella definizione 2, trova qui una articolazione specifica nel concetto di soggettivazione.
L'aspetto semiotico è fondamentale nella TO, in quanto è attraverso i mezzi semiotici di oggettivazione che gli oggetti culturalmente costituiti come pattern fissi vengono oggettivati dai soggetti durante le pratiche sociali (Radford, 2003a; D'Amore & Radford, 2017).
Infine, la definizione di oggetto matematico nella TO non può essere considerata come assolutamente generale poiché per la sua accettazione è necessario accettare quanto meno una fenomenologia come quella hegeliana, in cui oggetto conosciuto e soggetto conoscente formano un'unità.

**Definizione 4**

> (…) l'exigence épistémologique et la prise en compte des conditions d'accessibilité conduisent à donner la priorité aux couples {objet, représentation sémiotique} sur les concepts: *l'objet mathématique est l'invariant d'une multiplicité possible de représentations sémiotiques*. [(…) l'esigenza epistemologica e la presa in carico delle condizioni di accessibilità inducono a dare priorità alle coppie {oggetto, rappresentazione semiotica} sui concetti: *l'oggetto matematico è l'invariante di una molteplicità possibile di rappresentazioni semiotiche*] (Duval, 2009, p. 105, enfasi e traduzione nostre).

La definizione fornita (evidenziata in corsivo) si colloca all'interno della teoria semio-cognitiva di Duval (1993, 1995, 2011/2017).
Vediamo più in dettaglio i significati di alcuni concetti presenti nella definizione proposta, in maniera tale da poter comprendere meglio se e in che senso essa soddisfa i diversi criteri da noi evidenziati nelle domande poste all'inizio del capitolo.
Secondo Duval, per apprendere una nozione è necessario cogliere la distinzione che essa introduce e che si esprime o tramite l'opposizione lessicale di due parole

oppure tramite l’opposizione che si rileva per mezzo di una costruzione discorsiva, introdotta con un’argomentazione, oppure tramite un’analisi scientifica (Duval, 2009).
Di conseguenza, al fine di poter cogliere la nozione di oggetto, egli ritiene necessario distinguere tre diverse modalità d’impiego di tale termine, che corrispondono a tre diversi tipi di esigenza nella spiegazione della natura delle opposizioni discorsive: (1) un’esigenza epistemologica; (2) un’esigenza pratica o manipolativa; (3) un’esigenza fenomenologica di coscienza.
Queste tre diverse esigenze implicano rispettivamente tre diverse modalità di interpretare l’oggetto: (1’) come invariante di molteplicità; (2’) come cosa concreta utilizzabile; (3’) come bersaglio di un atto intenzionale.
Per quanto riguarda la prima esigenza, cioè quella epistemologica, l’opposizione alla parola “oggetto” può essere data da diversi termini, ciascuno dei quali richiama diversi generi di molteplicità, i quali a loro volta chiamano in campo concezioni di diversi autori (Tabella 4).

| Tipo di presentazione immediatamente accessibile | Determinazione della nozione di oggetto in funzione del tipo di rappresentazione immediatamente accessibile alla quale esso viene opposto |
|---|---|
| **Immagine (icona) vs. …** | «'les ayant été imités' (…) ou 'ETANTS EUX-MEMES' (ta onta autous)» [ciò che è stato "imitato" (…) o gli 'ESSERI STESSI' (ta onta autous)]. (Platone 2002, 510b4, 515b5) |
| **Idea vs. …** | «Tout ce que nous concevons comme étant les objets des idées, tout cela est objectivement, ou par représentation, dans les idées même» [Tutto ciò che concepiamo come oggetto di idee, tutto questo è oggettivamente, o per rappresentazione, nelle idee stesse]. (Descartes, 1967, p. 587) |
| | «L'être objectif de l'idée doit avoir UNE CAUSE RÉELLE» [L'essere oggettivo dell'idea deve avere una causa reale]. (Descartes, 1967, p. 925) |
| **Concetto vs. …** | «La connaissance suppose deux éléments: le concept par lequel un OBJET (GEGENSTAND) est pensé (la catégorie), et l'intuition par laquelle il est donné» [La conoscenza suppone due elementi: il concetto tramite il quale un OGGETTO (GEGENSTAND) è pensato (la categoria), e l'intuizione tramite la quale esso è dato]. (Kant 1976, § 22 p.162) |
| | «OBJET (GEGENSTAND). Opposition de deux types de dénotation resp. pour le prédicat et l'argument d'une proposition» [OGGETTO (GEGENSTAND). Opposizione di due tipi di denotazione rispettivamente per il predicato e per l'argomento di una proposizione]. (Frege 1971, p. 133) |
| **Segno, parola (onoma) vs. …** | «PRAGMA (chose)» [PRAGMA (cosa)]. (Platone, 1993, 218c; 1997, 349 b) |
| | «Un signe (nom, groupe de mots) comporte, outre CE QU'IL dé-signe et qu'on pourrait appeler sa DÉNOTATION, ce que je voudrais appeler le sens du signe, où est contenu le mode de donation de L'OBJET» [Un segno (nome, gruppo di parole) comporta oltre a ciò che designa e che potremmo chiamare DENOTAZIONE, ciò che vorrei chiamare il senso del segno, dove è contenuto il modo di denotazione dell'OGGETTO]. (Frege, 1971, p. 103) |
| **Fenomeni (variabili) vs. …** | «(...) la multiplicité des perceptions qui se rapportent à un seul et MÊME OBJET (einen und selben Gegenstand)» [(…) la molteplicità delle percezioni che si rapportano a uno STESSO OGGETTO] (einen und selben Gegenstand)]. (Husserl 1974, § 10 p. 57) |

Tabella 4. Opposizioni terminologiche che mobilitano l'impiego della parola "oggetto" (Duval, 2009, p. 84).[100]

[100] I riferimenti bibliografici nella tabella sono quelli riportati da Duval (2009).

In questo senso l'oggetto si può contrapporre a:

(i) *immagini* (Platone: l'immagine è un'imitazione dell'oggetto e si contrappone alla sua autenticità);
(ii) *idee* (Descartes: l'idea, soggettiva, si contrappone all'oggetto, che ha cause reali);
(iii) *concetti* (Kant: conoscere presuppone il concetto tramite il quale un oggetto è pensato, oltre all'intuizione tramite la quale è dato; Frege: nella contrapposizione tra concetto e oggetto si ha sostanzialmente una contrapposizione tra due tipi di denotazione, una per il predicato e l'altra per il soggetto);
(iv) *segni* (Platone: contrapposizione tra segno e *pragmata*, cioè "cose reali"; Frege: contrapposizione tra oggetto e segno che lo designa, nonché tra l'oggetto e il suo senso espresso dal segno);
(v) *fenomeni variabili* (Husserl: contrapposizione tra la molteplicità di percezioni che si rapportano allo stesso oggetto e l'oggetto stesso) (Duval, 2009).

Il problema che sorge dall'esigenza epistemologica è la necessità di spiegare come si ha accesso agli oggetti, cioè come dalla molteplicità di idee, immagini, concetti, segni o fenomeni variabili si possa passare all'oggetto. Una possibilità è quella suggerita da Piaget: agli oggetti si passa tramite l'astrazione dalle azioni.[101] Il passaggio dalle azioni con oggetti concreti alle operazioni astratte si colloca nell'ambito della seconda esigenza espressa tramite opposizioni, cioè quella della manipolazione concreta di oggetti, in cui le opposizioni si esprimono in termini di concreto-astratto, azione-linguaggio, pratico-formale (Duval, 2009).
Secondo Duval, il passaggio dalle manipolazioni concrete alle operazioni matematiche astratte non può avvenire per continuità perché la differenza fondamentale tra gli oggetti di qualsiasi genere, anche astratti, e quelli matematici è che gli oggetti matematici, oltre a non essere in alcun modo accessibili ai sensi, sono espressi tramite rappresentazioni semiotiche che *sono organizzate in sistemi semiotici in cui il loro significato è determinato per giustapposizione ad altre rappresentazioni dello stesso sistema semiotico e non semplicemente tramite una funzione di rappresentazione, come invece avviene nel caso di oggetti astratti di altro genere* (Duval, 2009).
L'Autore sottolinea inoltre, riguardo la nozione di oggetto presente in Piaget, che "cette notion d'objet est donc inseparable de la possibilité d'une action gestuelle du sujet [questa nozione di oggetto è quindi inseparabile dalla possibilità di un'azione gestuale del soggetto]" (Duval, 2009, p. 86, traduzione nostra).
L'affermazione di una congruenza tra l'azione gestuale sugli oggetti e le operazioni matematiche non è sostenibile, secondo Duval; ma essa è inoltre insidiosa dal punto di vista didattico:

[101] Ricordiamo che questa è la posizione classicamente costruttivista, come abbiamo evidenziato nel capitolo 7.

> Les situations où il y a une congruence forte entre les actions et certaines opérations mathématiques conduisent à occulter l'importance, dès le départ, des représentations sémiotiques. Elles ne donnent pas réellement l'accès aux objets mathématiques qui, eux, requièrent l'utilisation explicite et maîtrisée de systèmes de représentation [Le situazioni nelle quali c'è una forte congruenza tra le azioni e certe operazioni matematiche conducono a nascondere l'importanza, sin dall'inizio, delle rappresentazioni semiotiche. Esse non danno realmente accesso agli oggetti matematici che, a loro volta, richiedono l'uso esplicito e controllato di sistemi di rappresentazioni]. (Duval, 2009, p. 102, traduzione nostra)

Dunque, l'accesso all'"invariante cognitivo" (Duval, 2009, p. 99), come l'Autore chiama anche l'oggetto che sorge da un'esigenza epistemologica, non può essere considerato accessibile in matematica tramite un'analogia delle operazioni matematiche con le azioni compiute dal soggetto su oggetti concreti, ma solo per mezzo di trasformazioni semiotiche tra diversi registri semiotici.[102]
Per quanto riguarda l'ultima esigenza, cioè l'esigenza fenomenologica di coscienza che porta a una cristallizzazione di un'opposizione discorsiva del termine "oggetto" con altri termini, Duval mette in evidenza, citando Husserl (1962, citato in Duval, 2009, p. 87), il fatto che secondo la fenomenologia husserliana la coscienza:

> Loin d'être réductible à un contenu cognitif ou à un état émotionnel ou autre, (…) est un acte de visée qui est toujours focalisé sur quelque chose. [Lontana dall'essere riducibile a un contenuto cognitivo o a uno stato emotivo o altro, (…) è un atto di vedere che è sempre focalizzato su qualche cosa]. (Duval, 2009, p. 87, traduzione nostra)

Secondo Duval, nella fenomenologia husserliana tutto l'apparire consapevole viene analizzato per mezzo dell'opposizione tra un atto visivo in cui il soggetto non è consapevole e qualcosa di visto che concentra tutta la coscienza del soggetto. La cosa vista per mezzo di un atto di coscienza è chiamata da Husserl "l'oggetto apparente" (*das erscheinende Objekt*) oppure "l'oggetto intenzionale" (*der intentionale Gegenstand*) (Duval, 2009, p. 87).[103] L'oggetto intenzionale, che è per

---

[102] Ricordiamo che, secondo Duval, l'attività matematica si svolge attraverso due tipologie di trasformazioni semiotiche: trasformazioni all'interno dello stesso registro semiotico (i trattamenti) e trasformazioni da un registro semiotico a un altro (le conversioni) (Duval, 1993). Sia la comprensione sia la capacità di produrre pensiero matematico nonché la capacità di risolvere problemi si basano sulla capacità di coordinare efficacemente registri semiotici diversi e l'apprendimento avviene dunque solo se lo studente è in grado di effettuare una tale coordinazione (D'Amore, 2015; Duval, 2011/2017).

[103] Non ci soffermiamo qui sulla distinzione nella lingua tedesca tra *Objekt* e *Gegenstand*, entrambi termini traducibili con "oggetto" in italiano e con "object" in inglese, ma mettiamo in evidenza che questa distinzione è presente già in Kant (1781/2000) e che in Husserl (2020) essa contraddistingue un senso logico-ontologico, nel caso del termine *Objekt*, da un senso più concreto e pratico, nel caso del termine *Gegenstand*. L'oggetto inteso come *Objekt* è per Husserl, in senso formale, ogni cosa che può fungere da soggetto di un predicato vero, cioè qualcosa (astratto o concreto, individuale o generale, reale o ideale) di cui è possibile affermare qualcosa o che possiede una

Husserl l'oggetto di conoscenza, non ha un'esistenza precedente all'atto in cui è colto e quindi non va inteso in senso ontologico classico, cioè come oggettivamente esistente, ma piuttosto come un oggetto transitorio. Esso è, secondo l'interpretazione fornita da Duval, non una rappresentazione intermediaria tra il soggetto e uno degli altri due tipi di oggetto (quello che sorge da un'esigenza epistemologica e quello che sorge da un'esigenza di manipolazione concreta), ma è ciò che rende trasparente, esplica, la natura degli atti che fanno sì che questi due tipi di oggetti siano presenti al soggetto:

> On comprend alors pourquoi Husserl, à la suite de Brentano, n'hésitait pas à parler d'«inexistence» pour l'objet intentionnel, et non pas d'existence comme pour les deux autres types d'objet. Cela signifie que l'objet intentionnel n'est pas une représentation intermédiaire entre le sujet et les deux autres types d'objets qui eux existent, mais seulement la transparence des actes qui permettent au sujet que ces deux types d'objets lui soient d'une certaine manière présente. [È comprensibile quindi perché Husserl, seguendo Brentano, non esiti di parlare di "inesistenza" per l'oggetto intenzionale, e non di esistenza, come per gli altri due tipi di oggetti. Ciò significa che l'oggetto intenzionale non è una rappresentazione intermediaria tra il soggetto e gli altri due tipi di oggetti esistenti, ma solamente la trasparenza degli atti che permettono al soggetto che questi due tipi di oggetti gli siano presenti in qualche modo]. (Duval, 2009, p. 89, traduzione nostra)

Dunque, per Duval, che cita Husserl a tale proposito (si veda Tabella 4), anche dal punto di vista fenomenologico la molteplicità delle percezioni è riferita a un invariante chiamato oggetto, mentre l'oggetto intenzionale, che non è un oggetto in senso classico, in quanto esiste solo nell'atto percettivo intenzionale e non prima o dopo di esso, è un'entità variabile che, almeno in matematica, non è affatto riducibile alla pura percezione.
La domanda che si pone Duval è quindi la seguente: dato che gli oggetti matematici sono accessibili solo attraverso le loro rappresentazioni semiotiche, è possibile che una rappresentazione diventi oggetto? La risposta è affermativa, nel senso che è proprio questo il problema con il quale si scontra di solito lo studente nell'apprendimento della matematica e che spesso non è riconosciuto da parte dell'insegnante: si tratta del cosiddetto "paradosso di Duval" (1993, p. 38), secondo cui, proprio a causa dell'inaccessibilità diretta degli oggetti matematici, chi apprende matematica non può fare a meno di confondere l'oggetto matematico con la sua rappresentazione.[104] Infatti, affinché uno studente riconosca, dietro le molteplici rappresentazioni, un unico oggetto, che si presenta come un invariante cognitivo (Duval, 2009, p. 99), egli dovrebbe essere prima consapevole del fatto che quelle che egli vede o sente (rappresentazioni grafiche, definizioni etc.) sono

---

certa proprietà, mentre l'oggetto inteso come *Gegenstand* è l'oggetto di conoscenza che sta di fronte (gegen: "di fronte", stehen: "stare") al soggetto nell'atto di conoscere (Moran & Cohen, 2012, p. 228).

[104] Il cosiddetto "paradosso di Duval" ha in realtà una lunga storia epistemologica e filosofica, come mostrato da D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori e Matteuzzi (2015).

appunto delle *rappresentazioni* di oggetti (che però ancora egli non conosce) e non degli oggetti. Ma l'accesso agli oggetti matematici non è diverso rispetto a quello in altri ambiti del sapere scientifico solo a causa della loro inaccessibilità diretta, cioè per via della loro accessibilità solo attraverso delle rappresentazioni semiotiche, ma anche per il fatto che le rappresentazioni semiotiche in matematica sono organizzate in sistemi di rappresentazioni che si basano su regole di produzione e trasformazione, aspetto che invece non è caratterizzante per le rappresentazioni semiotiche di altri settori disciplinari.
Accedere a un oggetto matematico significa, secondo Duval (1993, 2009), accedervi tramite un certo registro semiotico che offre certe possibilità di trattamento ed esclude altre, e per il quale esistono delle relazioni che consentono di passare da esso a un altro registro, con regole di produzione e trattamento propri. Quello che Husserl chiama *l'oggetto intenzionale* è fondamentale proprio in questo punto, poiché esso rappresenta non un aspetto particolare dell'oggetto ma un modo di entrare intenzionalmente in un contesto in cui si è confrontati con una rappresentazione. In questo senso esso non è infatti né un invariante cognitivo né un invariante concettuale e non è nemmeno il frutto della pura percezione:

> Prendre en compte l'objet intentionnel (…) revient donc à prendre en compte le point de vue de la conscience d'un sujet. Non pas tant avec ses conceptions explicites ou implicites, ou dans son vécu individuel, mais dans ce qu'il reconnaît immédiatement et dans ce qu'il ne parvient pas reconnaître. La conscience constitue le champ de reconnaissance immédiate à l'intérieur duquel se déploie l'activité du sujet. Or ce champ varie selon l'appropriation du système sémiotique dont relèvent les représentations à partir desquelles il faut travailler et selon sa coordination synergique avec un autre système (Duval 2007, p. 39). (…) Tout ce que la conscience d'un sujet peut viser s'inscrit dans un tel champ qui n'est ni perceptif ni conceptuel. [Prendere in considerazione l'oggetto intenzionale (…) rimanda dunque alla considerazione del punto di vista della coscienza del soggetto. Non tanto nelle sue concezioni esplicite o implicite, né nella sua esperienza individuale, ma in ciò che riconosce immediatamente e in ciò che non riesce a riconoscere. La coscienza costituisce il campo di riconoscimento immediato all'interno del quale si sviluppa l'attività del soggetto. Tuttavia, questo campo varia a seconda dell'appropriazione del sistema semiotico in cui ricadono le rappresentazioni a partire da cui è necessario lavorare e a seconda del suo coordinamento sinergico con un altro sistema. (…) Tutto ciò che la coscienza di un soggetto può vedere si iscrive in un tale campo che non è né percettivo né concettuale]. (Duval, 2009, p. 104, traduzione nostra)

Dunque, secondo Duval, l'oggetto intenzionale in matematica non può prescindere dalla spontaneità risultante da un'interiorizzazione del funzionamento dei sistemi semiotici, i quali costituiscono il campo d'azione di tale oggetto in matematica:
L'objet intentionnel nous invite à élucider la capacité de viser immédiatement quelque chose (c'est-à-dire de discriminer et reconnaître quelque chose) par le fonctionnement intériorisé et spontané des systèmes de représentation. [L'oggetto intenzionale ci invita a chiarire la capacità di vedere immediatamente qualcosa (vale a dire di distinguere e

riconoscere qualcosa) tramite il funzionamento interiorizzato e spontaneo dei sistemi di rappresentazione]. (Duval, 2009, p. 104, traduzione nostra)

Quindi se o quando la rappresentazione diventa oggetto, essa non lo diventa in termini di oggetto intenzionale che nasce e muore con l'atto percettivo, ma lo diventa in termini di una invarianza rispetto a dei trattamenti in uno specifico sistema semiotico. L'oggetto intenzionale rappresenta la capacità di cogliere un certo invariante di questo genere, a scapito di un altro. Come sottolinea Duval (2009), la capacità di risolvere problemi in matematica è fortemente legata a questa capacità di evocare l'oggetto intenzionale adatto per quel tipo di problema.

Riassumendo, possiamo dire che l'analisi proposta da Duval mette in evidenza aspetti interessanti per l'apprendimento in matematica per quanto riguarda il modo con cui viene affrontato l'approccio individuale agli oggetti matematici (in termini di invariante cognitivo e di oggetto intenzionale), che in didattica della matematica cade spesso, come evidenziato, sotto il termine *concetto*.[105] L'aspetto più interessante è che tale invariante è espresso esclusivamente in riferimento alle trasformazioni semiotiche e non in riferimento ad astrazioni mentali. È in questo senso che esso si configura quindi come qualcosa di oggettivo e oggettivato, piuttosto che come concetto.

### *Discussione in riferimento alle domande (1')-(7')*

Per quanto riguarda la distinzione tra la componente ontologica della didattica della matematica come disciplina e quella relativa agli oggetti matematici della matematica come disciplina e quindi la distinzione tra oggetti matematici istituzionali distinti per la matematica e per la didattica della matematica, la definizione in questione non ne tiene conto in maniera esplicita. Infatti, anche se Duval suppone che esista un oggetto matematico che lo studente riconosce come invariante per trasformazioni semiotiche durante l'apprendimento, il che farebbe pensare che si tratti di un oggetto che non deve essere necessariamente coincidente con il corrispondente oggetto matematico istituzionalmente riconosciuto, l'Autore non si sofferma sulla natura di tale oggetto matematico e in questo senso egli sembra supporre che i due oggetti coincidano.

Nella definizione non vi è alcun riferimento a dei modelli interpretativi, né del primo né tanto meno del secondo ordine. Infatti, in essa il punto di vista del ricercatore si sovrappone a quello dello studente.

L'idea di oggetto matematico contenuta nella definizione qui discussa tiene implicitamente conto della dinamicità degli oggetti matematici, in quanto

[105] Notiamo che l'Autore evidenzia come questa potrebbe essere una posizione privilegiata in didattica della matematica per almeno due motivi: (1) per la vicinanza che il termine "concetto" ha con quello di concezione, il quale a sua volta è molto vicino semanticamente a quello di "misconcezione"; (2) perché il termine "concetto" consente di mantenere una unitarietà di riferimento nella strutturazione longitudinale degli apprendimenti degli studenti secondo le esigenze dei curricoli (Duval, 2009, p. 96).

l'invariante (l'oggetto) *emerge da attività* riconducibili a *trasformazioni* semiotiche che si protraggono necessariamente nel tempo. In essa è contemplata implicitamente anche una ontologia transitoria, in quanto si suppone che lo studente passi da una trasformazione semiotica a un'altra e da queste all'idea di oggetto in sé, anche se questo passaggio rimane a un livello intuitivo in quanto non vi è uno strumento che spieghi come ciò avviene "tecnicamente".

Per quanto riguarda la possibilità di inquadrare tecnicamente la modalità relazionale con la quale si formano i complessi concettuali che costituiscono gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica, possiamo affermare che se fosse possibile estendere l'idea di trasformazione semiotica a una dimensione non strettamente legata ai registri semiotici del linguaggio matematico, cioè se fosse possibile estenderla in generale al linguaggio della didattica della matematica, allora in questo caso si potrebbe disporre di uno strumento tecnico in grado di cogliere l'aspetto relativo alla natura relazionale dei complessi concettuali. Tuttavia, la teoria dei registri semiotici si basa sull'invarianza della denotazione degli oggetti matematici in senso fregeano che naturalmente non vale per gli oggetti della didattica della matematica e quindi ciò non è possibile.

Per quanto riguarda la dimensione semiotica, essa è chiaramente presa in considerazione nella definizione, che parla di invariante per trasformazioni semiotiche, e inoltre il contesto in cui essa si colloca è quello della teoria dei registri *semiotici*.

È interessante chiedersi se la definizione in questione si basa su una concezione pragmatica o realista di significato. La risposta a tale domanda non è univoca poiché da un lato Duval parte dal presupposto che l'oggetto intenzionale sia un oggetto personale, quindi non oggettivo, anche se dipendente da certe modalità di "vedere" in matematica che possono essere considerate oggettive, ma dall'altro suppone che esista un oggetto matematico che lo studente può riconoscere come invariante delle diverse rappresentazioni. In questo secondo senso, il significato *è* tale invariante, che è oggettivo, mentre nel primo caso il significato è dato dall'*uso* che lo studente può fare di ciò che emerge come oggetto intenzionale. A nostro avviso, la caratterizzazione fornita da Radford riguardo alla teoria della conoscenza kantiana è utile per gettare luce su questa ultima questione; infatti, potremmo affermare che, in un certo senso, Duval è ontologicamente realista ed epistemologicamente pragmatista. Tuttavia mettiamo in evidenza che tale distinzione è a nostro avviso necessaria in didattica della matematica e che essa sta alla base del criterio ontologico da noi evidenziato, secondo cui l'idea di oggetto matematico specifico della didattica della matematica deve tenere conto della distinzione tra oggetti matematici della matematica e oggetti matematici della didattica della matematica, poiché i primi appaiono necessariamente come preesistenti ai secondi, almeno dal punto di vista del docente o del ricercatore in didattica della matematica.

Anche la questione relativa al significato subisce in questo contesto una scissione tra una posizione realista e una pragmatica, nel senso che da un lato Duval suppone che esista un oggetto che lo studente può riconoscere come invariante e che dunque è il significato oggettivo; dall'altro lato però egli vede tale attribuzione di significato come un atto dipendente dall'attività cognitiva dello studente, cioè dalla sua capacità di generare l'oggetto intenzionale. Potremmo concludere che, nella definizione qui esaminata, il significato è dato sia tramite una funzione referenziale all'oggetto, in maniera oggettiva, sia tramite l'uso delle rappresentazioni semiotiche che il soggetto è in grado di mettere in atto, in maniera soggettiva.
Infine, la definizione qui discussa non può essere considerata come assolutamente generale in quanto, per condividerla, sarebbe prima di tutto necessario accettare che l'attività matematica sia un'attività semiotica, posizione non necessariamente condivisa da tutte le correnti in didattica della matematica.

**Definizione 5**

> (…) any entity which is involved in some way in mathematical practice or activity and which can be separated or individualized (Font, Godino, & Gallardo, 2013, p. 13);
>
> (…) objeto matemático es cualquier entidad material o inmaterial que interviene en la práctica matemática, apoyando y regulando su realización. (…) Los símbolos, las representaciones externas y manipulativos están implicados en la actividad matemática escolar y profesional, por tanto, se consideran objetos matemáticos, en el sentido de que intervienen en las prácticas matemáticas. [(…) oggetto matematico è qualsiasi entità materiale o immateriale che interviene nella pratica matematica, appoggiando e regolando la sua realizzazione. (…) I simboli, le rappresentazioni esterne e manipolative sono implicate nell'attività matematica scolastica e professionale, perciò si considerano oggetti matematici, nel senso che intervengono nelle pratiche matematiche]. (Godino, Batanero, & Font, 2020, pp. 6–7, traduzione nostra)

Le due definizioni/descrizioni qui fornite si inseriscono entrambe nell'ambito dell'approccio ontosemiotico (enfoque ontosemiótico: EOS) (Godino & Batanero, 1994; Godino, 2002; Font, Godino, & Gallardo, 2013), all'interno del quale nascono importanti definizioni di concetti fondamentali per un'impostazione pragmatista, come per esempio quelli di *pratica* (personale e matematica), di *istituzione*, di *oggetto personale* e *istituzionale* (Godino & Batanero, 1994, 1998b). Rispetto alla seconda definizione, nella prima è sottolineata l'esigenza che l'oggetto abbia la caratteristica di un'entità oggettificata o oggettificabile.
Rispetto alla TAD, l'EOS sposta il punto focale della tensione tra rapporto istituzionale e rapporto personale all'oggetto, agli aspetti maggiormente legati alla

cognizione e alla sfera mentale dell'essere umano, pur senza trascurare la dualità istituzionale-personale.
Di seguito caratterizzeremo brevemente la risposta che l'EOS fornisce alla questione ontologica in matematica, cioè alla questione relativa alla natura degli oggetti matematici.
All'interno dell'EOS la questione del significato e della rappresentazione della conoscenza viene affrontata a partire da basi antropologiche (Bloor, 1983; Chevallard, 1992), semiotiche e socio-culturali (Ernest, 1998; Presmeg, 1998; Sfard, 2000; Radford, 2003a, b, 2006), assumendo una relatività socio-epistemica per la conoscenza matematica, supponendo che quest'ultima sia indissolubilmente e fortemente legata all'istituzione culturale e al contesto sociale in cui si inserisce (Font, Godino, & D'Amore, 2007, p. 1).
Nel concetto di *pratica matematica*, secondo Godino e Batanero (1998a), si iscrivono tutte le attività delle quali un soggetto o una collettività fa uso per risolvere problemi, comunicare la soluzione ad altri, validare e generalizzare i risultati ad altri contesti. Le pratiche matematiche si svolgono all'interno di *comunità di pratiche* che agiscono come istituzioni che condividono determinate pratiche sociali e l'uso di certi strumenti. Un'indagine dettagliata in chiave sociologica sulla classe come comunità di pratiche e sulle diverse tipologie di pratiche che in essa vengono condivise, si trova in Bagni e D'Amore (2005) e in D'Amore (2005a).
La risposta che l'EOS fornisce alla domanda su che cosa sia un oggetto matematico, è riferita alle pratiche matematiche (discorsive o operative) che un soggetto o un'istituzione mette in atto nella risoluzione di situazioni problematiche che si basano sulla necessità di elaborare un certo tipo di risposta che è caratterizzante per quel dato frammento di conoscenza matematica.
Così, per esempio, l'oggetto matematico "media aritmetica" è:

> the system of practices that a person carries out (personal meaning) or when shared institutionally (institutional meaning) to solve a type of problem situation in which it is necessary to find a representative value of a set of data. (Font, Godino & D'Amore, 2007, p. 3)

Ciò che è fondamentale dal punto di vista dell'EOS non è dunque la singola pratica ma è il sistema di pratiche che viene messo in atto da parte di un soggetto o di un'istituzione quando si trova ad affrontare un certo tipo di situazione problematica.
Per comprendere meglio questo aspetto è necessario però fare alcune premesse.
Innanzi tutto introduciamo sei tipologie di entità (o oggetti) di base che vengono messe in evidenza nell'approccio ontosemiotico: *situazioni*, *procedure*, *linguaggio*, *concetti*, *proprietà* e *argomenti*. Le relazioni tra queste entità di base creano delle configurazioni, delle reti, le quali possono essere epistemiche (reti di oggetti istituzionali) o cognitive (reti di oggetti personali).

Notiamo che l'idea base di oggetto matematico nell'EOS è molto diversa rispetto a quella di concetto: gli oggetti matematici di base sono delle categorie[106] e solo una di tali categorie si riferisce ai concetti. Infatti, scrivono Godino, Batanero e Font (2007) a tale proposito:

> Initially we use the expression "mathematical object" as synonymous of "mathematical concept". Later we extend the use indicating any entity or thing to which we refer, or talk about it, be it real or imaginary and that intervenes in some way in mathematical activity. (Godino, Batanero, & Font, 2007, p. 129)

A tale categoria "concettuale" appartengono dunque le conoscenze matematiche concettuali (per esempio quelle di derivata, di numero reale, di retta, ...). Ma le categorie relative agli oggetti matematici di base sono anche molto diverse da quest'ultima; per esempio, la categoria "linguaggio" come oggetto matematico comprende tutti i tipi di linguaggi: grafico, algebrico, discorsivo … che vengono usati in matematica, ma li comprende come singole istanziazioni di quell'oggetto globale di base che qui è chiamato "linguaggio"; in maniera analoga si può pensare strutturata la categoria oggetto di base "procedura" e così via. Le pratiche matematiche che possono far emergere delle configurazioni (o reti), sono pratiche discorsive o operative, e lo strumento teorico che spiega come questi oggetti-configurazioni emergono dalle pratiche è la nozione di *funzione semiotica*. Questo concetto ha origine nella *funzione di segno* di Hjelmslev (1943/1961), usato anche da Eco (1979) proprio con lo stesso nome.
All'interno dell'EOS, la funzione semiotica è un insieme di relazioni funzionali tra un antecedente (espressione, significante) e un conseguente (contenuto, significato), costituite da parte di un soggetto (individuo, istituzione) in base a certi criteri o regole di corrispondenza (p. e. atteggiamenti o accordi in base ai quali il soggetto sa quali termini deve mettere in corrispondenza in date circostanze).
Le relazioni tra antecedente e conseguente della funzione semiotica possono essere di tipo *rappresentazionale*, *strumentale* (Font, Godino, & D'Amore, 2007) o *strutturale* (Godino, Batanero, & Font, 2007).
La funzione semiotica "assume" dunque un contenuto, che può essere un oggetto di qualsiasi tipo tra quelli caratterizzati dalle entità di base (linguaggio, concetto, procedura, argomento, …) oppure a sua volta un oggetto composto da diversi sotto-oggetti di base, e lo associa a un altro oggetto, emergente da tale relazione, facendo riferimento a una *relazione di rappresentazione* (la funzione sostituisce un oggetto con un altro sulla base per esempio di una relazione di appartenenza della parte al tutto o di traduzione in un altro registro semiotico etc.) oppure sulla base di una *relazione strumentale* (la funzione modifica l'oggetto in ingresso agendo su di esso, come per esempio quando si esegue una trasformazione semiotica di un'espressione algebrica) oppure ancora sulla base di una *relazione*

[106] Notiamo che qui il termine "categoria" non è inteso in senso matematico, cioè come l'oggetto base della teoria delle categorie, ma in senso filosofico, cioè come concetto generale.

*strutturale* (uno o più oggetti formano un sistema, dal quale emergono nuovi oggetti).

Si hanno dunque degli oggetti che intervengono nella funzione semiotica, durante le pratiche matematiche, come espressione o significante o antecedente, e altri che emergono da tali pratiche e si configurano come contenuto o significato o conseguente della funzione semiotica. La relazione sulla base della quale essi emergono è una delle tre summenzionate: rappresentazionale, strumentale o strutturale.

Il ruolo che un oggetto svolge in un dato contesto, cioè se esso è antecedente o conseguente nella funzione semiotica, non è predeterminato e non dipende dalle caratteristiche dell'oggetto. Ogni oggetto matematico, sia quelli che intervengono nei, sia quelli che emergono dai, sistemi di pratiche, può appartenere a una qualsiasi delle categorie di base di oggetti matematici.

Ogni oggetto matematico, sia primario sia secondario, può essere inoltre considerato sulla base di cinque dimensioni duali: personale – istituzionale, unitario – sistemico, espressione – contenuto, ostensivo – non ostensivo, estensivo – intensivo (Godino, 2002).

Parafrasando le due definizioni fornite all'inizio del paragrafo, possiamo dire che un oggetto matematico è una configurazione di relazioni tra oggetti che emerge da un sistema di pratiche matematiche all'interno di una comunità di pratiche che si occupa di matematica, come configurazione istituzionale (oggetto istituzionale) o come configurazione personale (oggetto personale).

Un'altra nozione importante nella caratterizzazione delle pratiche matematiche ma anche degli oggetti matematici stessi all'interno dell'EOS è quello di *gioco linguistico* (Wittgenstein, 1953/2003), a cui abbiamo già accennato in precedenza. Le pratiche matematiche si sviluppano in termini di adesione a un gioco linguistico ed è in riferimento a esso che gli oggetti matematici acquisiscono un significato. Dunque, la conoscenza delle regole del gioco linguistico è un presupposto per la partecipazione alle pratiche matematiche e per l'effettiva emergenza di configurazioni come oggetti matematici attraverso la messa in atto di una rete di funzioni semiotiche (Font, Godino & D'Amore, 2007). Per esempio, è proprio una delle regole del gioco linguistico tipico della matematica che consente di accettare l'azione su un oggetto specifico come implicitamente riferita all'oggetto generale di cui tale elemento specifico è un rappresentante.[107]

Dunque, l'EOS: (i) amplia il concetto di rappresentazione rispetto al senso consueto di un'espressione linguistica (o comunque segnica), la quale viene usata al posto di qualcos'altro, inquadrando il concetto di rappresentazione nell'ottica della funzione semiotica come "a relation between an expression and a content established by 'someone'" (Font, Godino & D'Amore, 2007) e mettendo in evidenza come l'antecedente e il conseguente della funzione semiotica non siano

[107] In questo senso, il gioco linguistico sembra avere molte analogie con il concetto di sistema di razionalità di Habermas (1998), soprattutto se si considera la peculiarità dei sistemi di razionalità matematici come sistemi di razionalità puramente linguistici.

necessariamente degli oggetti concettuali ma possono essere anche oggetti appartenenti a una qualsiasi delle sei categorie di base, citate sopra; (ii) mette in evidenza come la questione dell'unicità dell'oggetto rispetto alle sue molteplici rappresentazioni sia ingenua (o forse mal posta all'interno di questa teoria più ampia), in quanto una rappresentazione non ha un senso di per sé ma solo in quanto facente parte di un sistema con significati e convenzioni stabilite.
Questo ultimo aspetto viene affrontato dall'EOS attraverso la dualità unitario–sistemico, secondo la quale è vero che:

> (…) the object, considered as emergent from a system of practices, can be considered as unique and with a holistic meaning. However, in each subset of practices, the object/representation pair (...) is different, in the sense that it makes different practices possible. (Font, Godino, & D'Amore, 2007, p. 6)

Formulato in modo diverso:

> The introduction of the unitary–systemic duality in the analysis of the representations permits the reformulation of this vision in the following way: What there is, is a complex system of practices in which each one of the different object/representation pairs (...) permits a subset of practices of the set of practices that are considered as the meaning of the object. (Font, Godino, & D'Amore, 2007, p. 7)

### *Discussione in riferimento alle domande (1')-(7')*

Le dimensioni istituzionali della matematica e della didattica della matematica sono entrambe presenti nelle definizioni in questione tramite la dimensione istituzionale degli oggetti matematici, che possono essere oggetti istituzionalmente riconosciuti sia nell'ambito di un'istituzione scolastica, o di istruzione non privata in generale, sia nell'ambito di un'istituzione in cui si produce matematica da parte di comunità di matematici professionisti. Tuttavia, nella definizione di oggetto matematico nell'EOS la componente istituzionale della didattica della matematica come disciplina si sovrappone per lo stesso motivo a quella istituzionale della matematica come disciplina e questo non consente alla componente ontologica specifica della didattica della matematica di emergere. Infatti, nella definizione che stiamo discutendo si includono sia i casi in cui la matematica viene appresa sia i casi in cui essa viene costruita per così dire "ad hoc" dai matematici e non vi è appunto una distinzione tra i due contesti.
Più in dettaglio possiamo affermare che tale componente ontologica specifica della didattica della matematica come disciplina emerge in termini prasseologici, cioè tramite un certo tipo di configurazioni, chiamate *configurazioni didattiche* (Godino, Batanero, & Font, 2007). Esse sono viste come le componenti che costituiscono il processo d'istruzione. Le configurazioni didattiche sono determinate dalle interazioni tra insegnante e studente, incluso l'uso condiviso di tecnologie specifiche per un dato contenuto matematico, e includono a loro volta

una *configurazione epistemica* (costituita da un problema matematico, dal linguaggio adeguato alla sua soluzione, dalle regole, nel senso di concetti e proposizioni impiegati, dalle argomentazioni messe in atto dal docente o condivise con gli studenti nel contesto di risoluzione del problema specifico) e una *configurazione d'istruzione* (instructional configuration) (costituita dalle interazioni tra insegnante e studenti, dalle risorse e da oggetti vari, legati al contenuto matematico specifico).

Nell'EOS il processo d'istruzione è visto come una successione di configurazioni didattiche, mentre l'apprendimento è visto come un insieme di *configurazioni cognitive* (reti di oggetti emergenti da, o coinvolti nei, sistemi di pratiche personali che gli studenti svolgono durante l'implementazione della configurazione epistemica) (Godino, Batanero, & Font, 2007).

Le configurazioni didattiche stanno alla base di quelli che gli stessi autori chiamano "modelli teorici per l'istruzione matematica" e che sono delle configurazioni specifiche delle sei dimensioni espresse tramite le sei dualità che modellizzano un processo d'istruzione in matematica come un processo stocastico con un suo spazio di stati possibili e le sue possibili traiettorie (epistemica, didattica, mediante, cognitiva ed emozionale) (Godino, Batanero, & Font, 2007).

Nel senso appena evidenziato, possiamo dunque affermare che nell'EOS, attraverso i concetti di configurazione didattica, configurazione epistemica e modelli teorici per l'istruzione matematica, sono contemplati anche gli aspetti ontologici specifici della didattica della matematica in termini di modello interpretativo del primo ordine, cioè come modello interpretativo degli aspetti legati alla prasseologia d'aula della didattica della matematica. Non è invece contemplata la dimensione epistemologica della didattica della matematica e quindi non è presente l'idea di modello interpretativo del secondo ordine.

Infatti, il processo che caratterizza la successione di configurazioni didattiche non è visto a sua volta come un oggetto specifico di studio epistemologico della didattica della matematica. Dunque, l'approccio tiene esplicitamente e dettagliatamente conto delle componenti personale e istituzionale in didattica della matematica, ma la loro considerazione rimane come ancorata a un livello prasseologico e mai a un livello epistemologico.

Come già evidenziato, nell'EOS si suppone implicitamente che le pratiche matematiche svolte dagli studenti e dai matematici siano, se non sovrapponibili, almeno analoghe, e comunque completamente inquadrabili tramite le stesse categorie, cioè tramite la dualità personale-istituzionale che in un caso si riferisce allo studente e alla scuola come istituzione, mentre nell'altro caso si riferisce al matematico e alla comunità dei matematici vista come istituzione (p.e. le comunità delle istituzioni universitarie etc.).

È vero che gli autori affermano che: "the actions (didactical practices) implemented, their sequencing (didactical processes) and the emergent objects from these systems of practices (didactical objects) will be different from those arising in solving mathematical problems" (Godino, Batanero, & Font, 2007, p.

132). Tuttavia, questi “oggetti didattici”, a cui essi fanno riferimento, sono caratterizzati tramite le configurazioni didattiche, cioè le configurazioni didattiche costituiscono delle successioni temporali interpretabili come dei processi matematici specifici della didattica della matematica ma, come abbiamo evidenziato, le configurazioni didattiche si collocano sempre comunque a un livello interpretativo degli aspetti prasseologici e mai a un livello interpretativo epistemologico, cioè di oggetti matematici specifici della didattica della matematica come disciplina.
A nostro avviso è la mancata distinzione strutturale tra il livello prasseologico della didattica della matematica e la sua interpretazione, da un lato, e il livello epistemologico della didattica della matematica come disciplina e la sua interpretazione, dall’altro, a condurre a una mancata distinzione tra oggetti istituzionali specifici della didattica della matematica e oggetti istituzionali specifici della matematica come disciplina. Questo, a sua volta, fa sì che nell’ontologia dell’EOS non sia contemplata la relazione strutturale tra queste due dimensioni della didattica della matematica. Dunque, sottolineiamo il fatto che, anche se si accettasse il fatto che l’EOS tiene conto di oggetti matematici specifici della didattica della matematica dal punto di vista prasseologico, a causa dall’implicita sovrapposizione tra pratiche personali e istituzionali nel caso in cui si apprende la matematica e nel caso in cui si produce matematica, non sembra possibile mettere in evidenza la relazione che lega tali oggetti con gli oggetti matematici della matematica.
Per quanto riguarda la dinamicità degli oggetti matematici, possiamo affermare che l’EOS tiene conto in maniera esplicita sia dei processi, e quindi dell’evoluzione nel tempo degli oggetti, sia dei prodotti. Questo diventa evidente per esempio dalla considerazione dell’apprendimento come un insieme (statico, quindi interpretabile in termini di oggetto) di configurazioni cognitive, cioè come reti di oggetti emergenti da, o coinvolti in, sistemi di pratiche personali che gli studenti svolgono durante l’implementazione della configurazione epistemica, ma anche, nello stesso tempo, degli “oggetti didattici” come delle successioni (dinamiche, quini interpretabili in termini di processo che evolve nel tempo) di configurazioni didattiche (Godino, Batanero, & Font, 2007). Tale dinamicità è presente naturalmente solo in riferimento al livello prasseologico e non a quello epistemologico, non essendo quest’ultimo contemplato nell’approccio.
L’idea di un’ontologia transitoria è presente nell’EOS tramite il concetto di funzione semiotica che rappresenta quindi anche uno strumento tecnico in grado di tenere conto di tale transitorietà. Inoltre, questo significa che, anche se nel testo della definizione ciò non emerge esplicitamente, nell’idea di oggetto matematico dell’EOS è insita l’assunzione che l’attività matematica sia un’attività essenzialmente semiotica, come del resto si evince dal nome stesso dell’approccio.
Per quanto riguarda la possibilità di inquadrare tecnicamente la modalità relazionale con la quale si formano i complessi concettuali che costituiscono gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica, la definizione di per

sé non ne tiene conto, ma il concetto di funzione semiotica potrebbe essere uno strumento utile per inquadrare il problema dal punto di vista tecnico.
Ci sembra di poter affermare che la definizione di oggetto matematico nell'EOS sia molto generale, in quanto coinvolge tutte le tipologie di entità che intervengono durante l'attività matematica, e che essa possa essere accettata senza grandi difficoltà da un'ampia gamma di approcci o teorie in didattica della matematica, ammesso che si accetti che quest'ultimi emergono dalle pratiche umane e non sono esclusivamente delle costruzioni mentali dell'individuo, come per esempio supposto in un approccio di tipo costruttivista. In questo senso l'idea di oggetto matematico nell'EOS, pur essendo molto generale, non può essere considerata assolutamente generale nel senso da noi evidenziato.
Riguardo alla natura del significato a cui si riferisce l'idea di oggetto matematico nell'EOS, esso è chiaramente definito nel senso di Wittgenstein (1953/2003), cioè in termini *d'uso*, anche se non necessariamente solo nel linguaggio, ma in generale nelle pratiche matematiche. Di conseguenza possiamo dire che il significato di un oggetto matematico in questo contesto è l'insieme degli usi che il soggetto è in grado di farne.
Concludendo possiamo affermare che nell'EOS emerge un'ontologia molto articolata e ricca e con caratteristiche di transitorietà. Tuttavia è necessario sottolineare che tale ontologia transitoria rimane a un livello ancora intuitivo e si riferisce solo ai modelli del primo ordine, ma non a quelli del secondo ordine.

**Definizione 6**

> The new discourse started emerging when people realized that a number of routines displayed the same pattern (…) each of the practical routines (…) could be interpreted as a particular concrete object (…). All these concrete objects might now be said to constitute realizations of the new signifier (…) the signifier itself, together with all its possible mathematical object realizations, could be viewed as a new mathematical object. (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019, p. 164)

La definizione, o meglio la caratterizzazione, poiché non ci sembra di poter affermare che si tratti di una vera e propria definizione, di oggetto matematico appena fornita, si colloca nell'ambito dell'approccio commognitivo (Sfard, 2008). Si tratta di un approccio che, pur avendo avuto una notevole evoluzione, sulla quale ci soffermeremo di seguito, ha le proprie radici in quella concezione duale delle nozioni matematiche che abbiamo messo in evidenza ripetutamente nel presente lavoro e che risalgono principalmente a Sfard (1991).
Ciò che rimane nella posizione successiva di Sfard e collaboratori (p.e. Sfard, 2000, Sfard, 2008, Lavie, Steiner, & Sfard, 2019) della doppia natura delle nozioni matematiche è certamente la loro caratterizzazione in termini di processi e oggetti, anche se alla seconda di queste dimensioni viene attribuito un ruolo più ridotto e il riferimento alla dimensione strutturale non è più orientato a mettere in evidenza

l'organizzazione bourbakista della matematica come disciplina, ma si focalizza maggiormente sugli aspetti cognitivi degli oggetti matematici.
Nei lavori più recenti, la dicotomia tra processi e oggetti si presenta come contrapposizione tra routine orientate al processo (*process-oriented*), chiamate *rituali*, e routine orientate al prodotto (*product oriented*), chiamate *explorations*. In tale senso, leggiamo nell'abstract di Lavie, Steiner e Sfard (2019) che: "the distinction between process-oriented and product-oriented routines is introduced. The former type of routine is called *ritual* and the latter *deed* or *exploration*, depending on whether the routine is practical or discursive" (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019, p. 153).
Prima di discutere la questione ontologica in questo approccio, riteniamo importante premettere una esposizione dettagliata sia dell'evoluzione sia delle caratteristiche di alcuni dei suoi concetti base, poiché riteniamo che siano indispensabili alla comprensione dell'idea di oggetto matematico in questo contesto.
In particolare ci sembra importante mettere in evidenza l'evoluzione nel tempo di alcuni di tali concetti, come per esempio quello di comunicazione, di discorso e di pensiero, poiché di solito le prime caratterizzazioni sono più operative e consentono di comprendere meglio il senso di quelle più mature, che hanno caratteristiche più strutturali, cioè espresse attraverso le proprietà e le relazioni e non attraverso il contesto d'uso. Questa ci sembra una caratteristica importante della *Commognition*, che ha subito e subisce evoluzioni notevoli, anche se queste non portano quasi mai a un rigetto delle posizioni precedenti, ma piuttosto a una loro reinterpretazione in termini diversi. Tuttavia, è solo attraverso un esame accurato di caratterizzazioni o definizioni di concetti simili forniti a distanza di tempo, che diventa possibile individuare tale continuità. Per questo motivo forniremo, almeno per alcuni dei concetti coinvolti, due definizioni/caratterizzazioni, riferibili a momenti diversi dell'evoluzione dell'approccio commognitivo.
Due concetti base della *Commognition* (Sfard, 2008) sono quello di *comunicazione* e quello di *discorso*. Essi sono fondamentali per comprendere come si intendono in questo contesto i termini *matematica* e *pensiero* poiché, come vedremo di seguito, la matematica è definita in termini di *discorso* e il pensiero in termini di *comunicazione*.
La comunicazione può essere intesa come:

> (a) "the use and production of means intended to make an interlocutor act or feel in a certain way" (Sfard & Kieran, 2001, p. 47);
>
> ma anche come:
>
> (b) a collectively performed pattern activity in which action *A* of an individual is followed by action *B* of another individual so that: *A* belongs to a certain well-defined repertoire of actions known as communicational [;] action *B* belongs to a repertoire of re-actions that fit *A*, that is, action recurrently observed in conjunction with *A*. This

> latter repertoire is not exclusively a function of *A*, and depends, among others, on factors such as the history of *A* (what happened prior to *A*), the situation in which *A* and *B* are performed, and the identities of the actor and the reactor. (Sfard, 2008, p. 296)

La prima definizione di comunicazione (a) è più operativa della seconda (b) e nasce dallo sforzo di individuare un criterio operativo per l'*efficacia* della comunicazione. Riportiamo qui di seguito una caratterizzazione del contesto in cui tale definizione emerge.
Nelle consuete definizioni di comunicazione il successo comunicativo è stabilito sulla base della comparazione dei discorsi dei soggetti coinvolti in essa, al fine di stabilire se essi hanno "inteso nello stesso modo"; una tale comparazione è però assai problematica, dato che potrebbe produrre circolarità, sottolineano Sfard e Kieran (2001), dato che l'efficienza della comunicazione dipenderebbe dall'efficienza della comparazione dei discorsi. La definizione di cui alla lettera (a) consente invece di evitare tale circolarità, in quanto l'efficienza viene valutata non tramite un confronto dei discorsi dei partecipanti, ma tramite un controllo unilaterale da parte di ciascuno di loro sul grado di soddisfazione delle proprie aspettative (Sfard & Kieran, 2001). Questa concezione di comunicazione è in effetti molto vicina all'esperienza quotidiana; infatti, è probabile che ognuno di noi valuti la qualità della comunicazione con gli altri non sulla base di principi astratti di comparazione dei significati dei discorsi coinvolti (tra l'altro difficile da effettuare), ma attraverso il grado di concordanza che le azioni dell'altro hanno con le nostre attese riguardo a esse, attraverso le interpretazioni che noi stessi abbiamo dato a tali azioni.[108] La valutazione dell'efficacia della comunicazione può essere effettuata sia direttamente dal soggetto stesso, sia indirettamente da un terzo che analizza le azioni di uno degli interlocutori in funzione di quelle dell'altro. A tale proposito, Sfard e Kieran citano Levinson:

[108] In Sfard e Kieran (2001), le autrici descrivono come il punto di partenza per una definizione del pensiero come comunicazione sia stata una sperimentazione in classe iniziata nel 1993, il cui scopo era quello di supportare e sviluppare il pensiero algebrico di studenti di età media di 13 anni. Durante una parte della sperimentazione, gli studenti hanno lavorato in coppie. Nonostante il successo che essi hanno raggiunto nei compiti di verifica finali, le autrici riferiscono di aver avvertito una sensazione di inadeguatezza delle risposte fornite dalla ricerca e che questa sensazione ha fatto sorgere in loro un dubbio relativo al ruolo della comunicazione matematica durante le interazioni. Sostanzialmente esse si sono chieste prima se le attività di gruppo possano essere considerate di per sé come garanzia di un migliore o più efficace apprendimento oppure se ci sono delle condizioni che le rendono tali e se sì, quali siano tali condizioni. In Sfard e Kieran (2001), le autrici mettono in evidenza come l'analisi mirata di ciò che avviene durante l'apprendimento nell'interazione tra gli studenti necessita di due strumenti metodologici e concettuali diversi: uno che esse chiamano "focale" (chiamato anche "livello oggetto") e che segue l'evoluzione del concetto matematico dello studente durante l'interazione con gli altri, e uno che esse chiamano "preoccupazionale" e che riguarda la metacomunicazione e più precisamente il modo con cui gli studenti si impegnano nelle interazioni durante le attività matematiche.

> if a second utterance can be interpreted as following on a first utterance, in a sense that they can be 'heard' as being concerned with the same topic, then such an interpretation of the second utterance is warranted, unless there are overt indications to the contrary. (Levinson, 1983, p. 51, citato in Sfard & Kieran, 2001, p. 49)

Questa posizione è coerente con quella di Wittgenstein il quale, insieme a Vygotskij, rappresenta una delle figure di riferimento base per l'approccio di Sfard e coautori, e secondo cui il significato di un termine è il suo uso nel linguaggio (Wittgenstein, 1953/2003). Il confronto tra i significati attribuiti dagli interlocutori ai termini coinvolti nella comunicazione viene dunque ridotto al confronto tra l'uso dei termini nella comunicazione e l'efficacia della comunicazione viene ridotta alla congruenza tra azione e reazione in essa.

L'approccio di Wittgenstein consente di tenere conto solo dell'aspetto epistemologico, mentre in un contesto educativo, come quello in cui si inseriscono le riflessioni delle autrici, se si vuole indagare il ruolo della comunicazione è necessario tenere conto anche della componente personale, psicologica, del soggetto, che investe l'ambito delle motivazioni alla comunicazione. In questo senso è importante tenere conto delle *intenzioni*, chiamate chiaramente in causa dalla domanda sul *perché* un soggetto compie un certo atto comunicativo. Tuttavia, tale attenzione rivolta alle intenzioni potrebbe essere considerata non coerente con il punto di vista sul linguaggio come costitutivo del pensiero, nel senso messo in evidenza da Vygotskij, ma anche nel senso inteso da Wittgenstein, dato che la supposizione della necessità di un'intenzione che preceda l'atto comunicativo significherebbe che il soggetto deve sempre già aver pensato ciò che poi esprimerà nel linguaggio, mentre per Vygotskij (1934) il linguaggio è costitutivo del pensiero e per Wittgenstein (1953/2003) i confini del linguaggio di un soggetto sono i confini del suo mondo, il che significa che è il linguaggio a costituire il mondo di cui il soggetto è in grado di parlare.

Infatti, per mostrare che l'intenzione non precede necessariamente l'atto comunicativo, le autrici propongono l'esempio di quando un soggetto pronuncia una frase e poi, subito dopo, esclama che non era quello che intendeva dire, il che mostra, a loro avviso, che in questo caso l'atto comunicativo, e quindi il pensiero, non è preceduto da un'intenzione.[109]

Per evitare che il ruolo attribuito all'intenzione possa dare luogo a critiche di mancanza di coerenza con le posizioni di Vygotskij e Wittgenstein, Sfard e Kieran forniscono la seguente definizione di intenzione: "intention is the property of utterance that allows it to be followed by some kinds of responses, but not by others" (Sfard & Kieran, 2001, p. 49). Dunque, l'intenzione non viene definita nel senso consueto, cioè in termini di grado di consapevolezza del soggetto nel compiere un atto (in questo caso comunicativo), ma in termini di relative *attese* del soggetto; essa diventa quindi una proprietà delle proposizioni, valutabile dal soggetto. Questo significa però, in ultima istanza, che l'efficacia della

[109] Facciamo notare che per Sfard il pensiero è comunicazione, cioè è inteso come una versione intrapersonale di comunicazione interiorizzata (Sfard, 2008).

comunicazione non può essere stabilita in maniera oggettiva e che individuare criteri oggettivi per essa è impossibile: ogni soggetto, sia coloro che sono coinvolti nella comunicazione, sia un eventuale osservatore esterno, non possono che fornire *interpretazioni soggettive* di tale efficacia, basate sulle loro aspettative (Sfard & Kieran, 2001). Tuttavia, ci sembra possibile affermare che, essendo le attese di un soggetto legate alla sua esperienza intersoggettiva pregressa, è anche vero che le attese collegate a una data affermazione saranno simili in soggetti appartenenti alla stessa comunità, intesa come società in cui si instaurano pratiche e metapratiche condivise (D'Amore, 2005a).

La questione dell'efficacia della comunicazione è molto importante per la valutazione di quella che Sfard e Kieran chiamano "the educational productivity", la quale misura il successo dell'interazione educativa e che deve sempre essere confrontabile con obiettivi esterni, fissati in precedenza e quindi considerati come oggettivi (Sfard & Kieran, 2001). La soluzione che offrono le autrici consiste nello scegliere un criterio di valutazione "in negativo" dell'efficienza della comunicazione, stabilendo che una comunicazione è da considerarsi efficiente fino a quando non vi sono indizi evidenti che essa non lo sia: "an act of communication should be regarded as effective as long as there is no evidence to the contrary" (Sfard & Kieran, 2001, p. 49). Dunque, gli interlocutori o un osservatore esterno possono presumere che la comunicazione "funzioni", fino a quando non rilevano una mancanza di coerenza tra gli atti comunicativi.

Come già accennato, la seconda definizione di comunicazione (b) ha caratteristiche più strutturali e meno operative, in quanto prescinde dalle *intenzioni* comunicative dell'individuo, ponendo in evidenza le condizioni necessarie affinché la comunicazione possa avvenire, prima che possa essere giudicata efficace o meno. Infatti, tale definizione inquadra la comunicazione come una successione temporale di azioni e reazioni, legate da determinate regole.[110] In tale senso è indispensabile che gli atti comunicativi degli interlocutori appartengano allo stesso universo del discorso e che quest'ultimo sia ben definito (*patternd activity*, *well defined* repertoir of actions) e noto agli interlocutori (actions *known* as communicational). La dimensione relativa alle *attese*, presente nella seconda definizione, introduce anche una componente soggettiva, sottolineando che la relazione che lega azione e reazione non è di tipo funzionale, cioè che a un'azione possono seguire diverse reazioni. Complessivamente possiamo affermare che la definizione (b) fornisce tutti gli *elementi* caratterizzanti il concetto di comunicazione nel contesto della *Commognition*, mentre la definizione (a) sposta l'attenzione sull'intenzione dell'atto comunicativo, mettendo in evidenza la necessità di individuare dei *criteri di efficacia* della comunicazione.

[110] Non è chiaro come quello che potremmo chiamare "la componente minima della comunicazione", che è costituita da azione e reazione, si estenda nel tempo, cioè in che modo si concatenano i singoli elementi o moduli, ma presumiamo che questo possa accadere considerando la reazione come una nuova azione e così via.

Anche del termine *discorso* forniamo due definizioni, che rappresentano due immagini istantanee di tale concetto nell'ambito della *Commognition*, scattate a distanza di quasi 20 anni.

> (a) The word *discourse* is used to denote any specific instance of communicating, whether diachronic or synchronic, whether with others or with oneself, whether predominantly verbal or with the help of any other symbolic system. (Sfard & Kieran, 2001, p. 47)
>
> (b) The word *discourse* itself denotes a particular type of communication, distinguishable from any other by its keywords and the ways they are used, by the perceptually accessible aspects of material reality that are being employed as "helpers" (we call them visual mediators), and yes, its routines. (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019, p. 163)

Un aspetto comune a entrambe le definizioni è il fatto che il discorso è visto come una istanziazione della comunicazione. La definizione di comunicazione mette in effetti in evidenza il fatto che la componente minima della comunicazione è composta da atti comunicativi, ma nulla afferma riguardo ai *contenuti* di tali atti comunicativi. La dimensione che prende in considerazione tali contenuti è la dimensione del discorso; i partecipanti al discorso comunicano, producendo narrative su un dato frammento di realtà (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019). In questo senso, una comunicazione su contenuti matematici è un discorso matematico e dunque *la matematica è un discorso*.
La scuola ha il ruolo di consentire agli studenti di partecipare a diversi discorsi storicamente stabiliti:

> School is a place for fostering different types of historically established discourses, such as biology, in which stories are told about living creatures; history, the discourse that produces accounts of past generations; or mathematics, where the protagonists of the narratives are abstract mathematical objects. (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019)

La seconda definizione è, anche in questo caso, come in quello della definizione di comunicazione, di natura più strutturale. Essa fornisce gli *elementi* fondanti per la nozione di discorso, dopo aver caratterizzato il concetto per genere prossimo e differenza specifica. Infatti, un discorso particolare è definito come un caso particolare di comunicazione (quindi per genere prossimo), che si differenzia da un altro discorso *per le sue parole chiave* (cioè gli argomenti chiave che esso tratta, che per la matematica potrebbero essere per esempio numero, spazio, relazioni etc.); *per il tipo di mediatori visivi a cui fa ricorso* (per il discorso matematico questi potrebbero essere i simboli matematici e le rappresentazioni semiotiche visivamente percettibili di cui ci si serve in matematica: segni sul foglio o sulla lavagna, rappresentazioni geometriche sul computer etc.); *per le sue routine* (per la matematica potrebbero essere tutte le modalità consuete della pratica matematica, come per esempio dimostrare un enunciato o risolvere un'equazione o anche semplicemente stabilire corrispondenze biunivoche tra insiemi).

La prima definizione di *discorso* evidenzia un criterio importante, il quale amplia tale nozione fino a comprendere produzioni che vanno ben oltre quelle intese nel senso consueto di "atto del discorrere, dell'esprimere il pensiero per mezzo della parola" (Treccani, n. d.). Il discorso non è, ci dice la definizione, necessariamente legato alla dimensione verbale, ma si realizza in maniera multimodale: "although communication is often carried out in words, there are other means as well- gestures, concrete objects, pictures, and many more. Verbal language is neither an exclusive nor indispensable means of communication" (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019, p. 164).
Vediamo dunque che il concetto di discorso richiede una definizione di linguaggio, non potendo dare per scontato il concetto consueto di linguaggio come linguaggio ordinario espresso verbalmente.[111]
Per *linguaggio* Sfard intende un sistema usato a scopi comunicativi, il quale comprende un insieme finito di simboli arbitrari e un insieme di regole che rappresentano la grammatica del linguaggio, la quale è necessario conoscere per poter usare i simboli (Sfard, 2008).[112]
Il lettore attento si sarà già posto probabilmente la seguente domanda: ma se la matematica è vista da Sfard come un discorso e il discorso è un'istanziazione del concetto di comunicazione, la quale è costituita da azione e reazione, dove trova posto l'attività matematica del singolo, assorto nei propri pensieri, mentre fa matematica? La risposta a tale domanda è fornita dalla definizione stessa di *pensiero* nell'ambito della *Commognition*, a cui abbiamo già accennato e di cui forniamo due definizioni, una risalente al 2001, l'altra risalente al 2008. La prima è, come anche nei casi precedenti, più operativa e assomiglia più a una descrizione, ma fornisce molti elementi utili alla comprensione del concetto in contesto; la seconda è invece più strutturale e si limita, come anche nei casi precedenti, a evidenziare gli elementi distintivi del concetto.

> Here, we no longer regard thinking as a self-sustained, stand-alone individual function, prior to and independent of the activity of communication in its various manifestations (cf. the late work of Wittgenstein, 1953, 1969). In fact, our basic epistemological belief goes farther than that: We propose that thinking, which is sometimes described as "talking to oneself," may be usefully conceptualized as a variant of the activity of communicating. Of course, this "self-discourse" does not

[111] Questa posizione sembra infatti l'unica coerente con la posizione vygotskiana sul ruolo costitutivo del linguaggio per il pensiero poiché se limitassimo il linguaggio al solo linguaggio verbale, ogni pensiero necessiterebbe di una preventiva formulazione in parole, escludendo così che si possa pensare per esempio per immagini o gesti.
[112] Notiamo che si tratta di una definizione di linguaggio molto ampia, che può comprendere sia sistemi simbolici come quelli della logica formale, sia sistemi linguistici formali in cui si organizzano i risultati della matematica come quello della teoria degli insiemi, sia sistemi linguistici non formali, come quelli delle lingue parlate. Necessariamente il concetto di simbolo deve dunque essere inteso in senso molto ampio, come unità sintattica minima nella costruzione delle frasi del linguaggio, e vi possono rientrare sia simboli matematici sia parole del linguaggio comune.

> have to be in any way audible or visible, and does not have to be conducted in words. Paraphrasing Vygotsky's ideas, we would say that whatever the means, thinking does not "express" itself through them but rather comes into being in their use. If so, *thinking that takes place within conversation with others becomes an activity of communication embedded into another communication activity*, as presented in Figure 3 [si veda Figura 28]. It is reasonable to assume that these simultaneous intra and interpersonal discourses inform and shape each other in a reflexive manner. (Sfard & Kieran, 2001, p. 47, enfasi nostra)

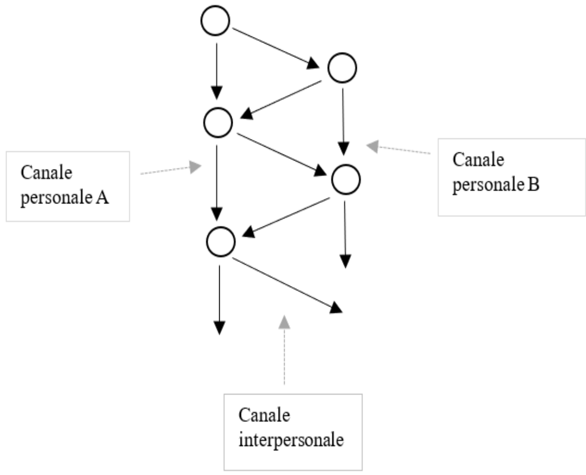



Figura 28. Il dialogo intrapersonale come una comunicazione a più livelli (Sfard & Kieran, 2001, p. 54).

Nella Figura 28 i cerchi rappresentano le affermazioni di due interlocutori (*A* e *B*), mentre le frecce continue rappresentano "il flusso" lungo quelli che le autrici chiamano "i canali privati", nonché lungo il canale interpersonale che si snoda tra quelli privati.

La prima definizione-descrizione di pensiero (a), fornisce un inquadramento del pensiero come un caso particolare di comunicazione e più in dettaglio come un "discorso con sé stessi" (*self-discourse*). Inoltre, tale discorso è inquadrato, come si evince dall'ultima parte della citazione, nell'ambito di una possibile dimensione interpersonale, costituita dalla comunicazione tra due interlocutori. In questo senso il canale personale (*personal channel*) (Figura 28) rappresenta il flusso del pensiero del rispettivo soggetto. Il pensiero è comunicazione e quindi deve essere costituito dall'unità minima della comunicazione, cioè da un modulo di azione-reazione. Nella rappresentazione in figura l'azione relativa al pensiero del soggetto *A* è intesa come l'affermazione rappresentata con il primo cerchietto in alto a sinistra, mentre la reazione è rappresentata dal cerchietto che si trova sotto di esso.

L’affermazione rappresentata da quest’ultimo cerchietto diventa a sua volta un’azione che provoca una reazione (l’affermazione rappresentata dal terzo cerchietto nella colonna a sinistra) e così via. Se il soggetto *A* non pensa (soltanto) tra sé e sé, ma comunica con il soggetto *B*, allora le affermazioni legate alle sue reazioni non sono determinate solo dalle proprie affermazioni che fungono da azioni, ma anche dalle affermazioni del soggetto *B*, che fungono anch’esse da azioni nell’attività comunicativa.[113]

Discutiamo ora la seconda definizione di pensiero:

(b) Thinking is the “individualization of interpersonal communication (the process of communicating between a person and herself, one that does not have to be verbal)” (Sfard, 2008, p. 302).

La seconda definizione è, come già evidenziato per le seconde definizioni di comunicazione e discorso, di tipo più strutturale della prima e mette in evidenza gli *elementi* distintivi del concetto di pensiero.

In tale definizione il pensiero non è caratterizzato soltanto come comunicazione o discorso con sé stessi, ma anche come una *versione interiorizzata di comunicazione interpersonale*. Si tratta di un aspetto importante per la presente discussione poiché ci porta a parlare delle basi epistemologiche della *Commognition*.

Per poter comprendere tali basi è necessario, prima ancora di parlare del concetto di apprendimento in questo contesto, spiegare sulla base di quali criteri è possibile affermare che un soggetto *conosce* (nel senso che *sa*) una data cosa, cioè dobbiamo caratterizzare il concetto stesso di conoscenza. Abbiamo già messo in evidenza il fatto che i due autori cardine per la *Commognition* sono (il secondo)[114] Wittgenstein (1953/2003) e Vygotskij (1934).

Dato che per Wittgenstein il significato di un termine è il suo uso nel linguaggio, conoscere il significato di un termine è saperlo usare nei *giochi linguistici* (Wittgenstein, 1953) in cui esso viene collocato. Per Sfard la matematica è un discorso e come tale è svolto in un dato linguaggio. Quindi conoscere qualcosa significa saper usare il termine (o i termini) che lo designa(no) in discorsi che riguardano questo qualcosa. Dunque, la dimensione del sapere in Sfard è sia *dialogica* (in quanto il discorso è una istanziazione della comunicazione, la quale a sua volta è chiaramente dialogica, in quanto basata su azione e reazione) sia *partecipazionista* (in quanto il sapere non può essere accolto passivamente dallo

[113] In questo senso diventa ora anche più chiara l’affermazione presente nella definizione (a) di discorso, nella quale il discorso è definito come un’istanza specifica di comunicazione che può essere sia sincronica sia diacronica. Infatti, nel caso in cui si considera il discorso globale, prodotto dal canale interpersonale dei due soggetti, la comunicazione è un discorso che si sviluppa nel tempo (aspetto diacronico) e così anche la comunicazione tra sé e sé dei due soggetti, cioè i loro pensieri, che si sviluppano nel tempo (aspetto diacronico). D’altro canto, il discorso complessivo tiene conto della contemporaneità dei due discorsi (pensieri) individuali ed è dunque sincronico.

[114] Dunque il Wittgenstein delle *Ricerche filosofiche* (1953/2003) e non il Wittgenstein del *Tractatus* (1922/2010).

studente, ma richiede la sua partecipazione attiva ai discorsi).[115] Il passaggio dalla partecipazione più o meno attiva a un discorso in cui si viene confrontati con i giochi linguistici tipici del discorso, alla partecipazione attiva a essi, quello che potremmo chiamare il passaggio di accesso alla conoscenza socialmente condivisa, richiede il riferimento all'internalizzazione del discorso secondo Vygotskij.[116] Infatti, è tramite l'internalizzazione che il soggetto accetta e fa proprie le regole e norme socialmente condivise (Vygotskij, 1934).

Abbiamo voluto mettere in evidenza alcuni concetti base su cui si fonda la *Commognition*, ma ricordiamo che la loro esposizione ci serve per poter illustrare il modo in cui in essa sono intesi e definiti gli oggetti matematici. Abbiamo già discusso ampiamente la concezione iniziale di oggetto matematico in Sfard, nella quale l'oggetto matematico è un oggetto strutturale in accordo con le definizioni nel linguaggio insiemistico (Sfard, 1991), ma avevamo anche notato che in quel contesto veniva messa in evidenza principalmente l'analogia tra l'evoluzione storico-epistemologica delle nozioni matematiche in matematica e la loro evoluzione nell'apprendimento di quest'ultima, senza un'articolazione delle modalità con cui si manifestano cognitivamente le fasi operativa e strutturale nonché del modo in cui il soggetto vi accede.

Questi aspetti sono stati oggetto di ricerche successive di Sfard e collaboratori e una tappa importante in tale percorso è Sfard (2000), in cui l'Autrice affronta esplicitamente la questione dell'emergenza e formazione degli oggetti matematici. Esaminiamo dunque ora tale posizione, prima di passare alla discussione della concezione attuale degli oggetti matematici in termini di routine, come riportato nella definizione iniziale del paragrafo.

In Sfard (2000), l'Autrice mette in evidenza un fatto ampiamente discusso già da Duval (1993), cioè la caratteristica intrinseca degli oggetti matematici come entità inaccessibili sensorialmente, chiamate dell'Autrice "entità elusive" (Sfard, 2000, p. 38). Partendo da tale caratteristica degli oggetti matematici, Sfard contrappone una "realtà virtuale" (*virtual reality*, VR), in cui "vivono" gli oggetti matematici, ai quali non è possibile riferirsi in maniera ostensiva e in cui le definizioni ostensive possono essere causa di fraintendimenti di natura ontologica, e una realtà attuale (*actual reality*, AR), che è caratterizzata dal fatto che in essa è possibile riferirsi agli oggetti in maniera percettiva (sono possibili rinvii ostensivi a oggetti reali e le definizioni ostensive non creano problemi). Sfard nota inoltre che la struttura grammaticale dei discorsi nelle due realtà è la stessa, anche se le attività

[115] Il termine *partecipazionista* (participationist) è infatti usato da Sfard per caratterizzare un approccio ispirato ai lavori di Vygotskij, e si contrappone al termine *acquisizionista* (acquisitionist), che caratterizza gli approcci ispirati ai lavori di Piaget (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019, p. 172).

[116] Notiamo qui l'analogia con i concetti di oggettivazione del sapere socialmente e storicamente costituito che è presente per l'individuo come pura potenzialità e che si attualizza attraverso l'attività nelle pratiche condivise, è la soggettivazione che porta a una trasformazione dell'individuo stesso (Radford, 2008a, 2016). A differenza di Sfard, Radford non inquadra però la pratica matematica come discorso, ma come attività.

descritte sono da un lato attività svolte su oggetti reali (o astratti, ma con referenti ostensivi) (nella AR), e dall'altro attività astratte governate da regole astratte su oggetti simbolici senza referenti ostensivi (nella VR).[117]
Secondo Sfard, i discorsi matematici sono spesso mediati dagli oggetti, cioè essi si articolano nella stessa maniera in cui si articolano i discorsi che hanno per soggetto degli oggetti della AR, anche se questo non significa che chi pronuncia tali discorsi si stia impegnando ontologicamente nei loro confronti.
In poche parole, il discorso matematico presuppone che il soggetto che lo articola sia in grado di "maneggiare" mentalmente l'oggetto (o gli oggetti) a cui si riferisce il suo discorso, come si farebbe in un discorso che coinvolge degli oggetti reali, anche quando questi ultimi non sono presenti fisicamente.
In un contesto di VR il soggetto conduce un discorso che *metaforicamente* è un discorso esterno agli oggetti cui si riferisce, nel senso che esso considera tali oggetti come esistenti, ma per comodità, in maniera tale che il discorso possa essere *mediato* da essi in maniera analoga a quanto accade nei discorsi interni alla AR.
L'impossibilità dell'accesso diretto agli oggetti matematici chiama inevitabilmente in causa la semiotica e una domanda che sorge spontanea è la seguente: a che cosa si riferiscono i simboli matematici, data l'elusività degli oggetti matematici, precedentemente evidenziata?
Sfard sottolinea che, secondo le teorie classiche del significato, i simboli sono delle entità che si riferiscono ad altre entità, le quali fungono da referenti per le prime; in questo senso, secondo Eco, i simboli sono delle "menzogne" perché stanno per altre cose (Eco, citato in Sfard, 2000). Le teorie del significato che assumono una tale posizione sono chiamate dall'Autrice "oggettiviste" e hanno le caratteristiche delle teorie del significato realiste, alle quali abbiamo accennato all'inizio del presente capitolo (si veda D'Amore, 2001). In tali teorie si presume che la rappresentazione o il simbolo o il segno siano delle *rappresentazioni* di *qualcosa* che debba necessariamente essere a esse *preesistente*. Sfard supera la difficoltà causata dalla circolarità dovuta alla "metafora oggettivista" (Sfard, 2000, p. 48), consistente nel doversi riferire a qualcosa di cui non si è a conoscenza, ricorrendo all'idea che gli oggetti matematici e il discorso matematico sono *mutuamente costitutivi* (Sfard, 2000, p. 47). Questo significa che è il discorso matematico che si focalizza su *qualcosa*, a far sì che questo qualcosa emerga come oggetto matematico e che è l'uso di simboli o termini specifici del linguaggio matematico a guidare spesso tale focalizzazione, ma che dall'altra parte l'introduzione di nuovi simboli e l'eventuale emergenza di nuovi oggetti matematici ricostituisce e indirizza il discorso matematico.

[117] Notiamo che la particolarità degli oggetti matematici, per i quali esistono procedure definite che permettono di mostrare che due rappresentazioni si riferiscono allo stesso oggetto matematico (per esempio esiste una procedura codificata per passare da $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{4}$), che sono messe in evidenza da Sfard (2000), corrispondono alle regole dei registri semiotici messe in evidenza dalla prospettiva semio-cognitiva di Duval (1993, 1995, 2011/2017).

Un aspetto importante è dato dal fatto che gli oggetti matematici sono generati, come scrive Sfard, "retroattivamente" (Sfard, 2000, p. 48), nel senso che l'introduzione di un nuovo simbolo non sancisce la nascita di un nuovo oggetto matematico, ma che tale oggetto emerge tramite la focalizzazione del discorso intorno a esso.[118] Rispetto alla posizione assunta in Sfard (1991), notiamo dunque che lo shift ontologico che caratterizza la reificazione non sembra essere centrato sull'introduzione di un nome o di un simbolo che lo suggellano. Inoltre, il legame tra l'oggetto e la sua rappresentazione non è una relazione di rappresentanza del secondo nei confronti del primo, in quanto la comparsa del simbolo si configura più come una prima realizzazione, una presa di coscienza, di qualcosa che potrebbe diventare un oggetto, che come un "battesimo" di qualcosa di già esistente (Wittgensein, 1953, citato in Sfard, 2000). Esprimendoci in altri termini: *essendo il discorso e gli oggetti mutuamente determinati, prima della comparsa dell'oggetto non vi è nulla di cui si possa parlare o che possa essere rappresentato*.[119]
Vediamo però più da vicino l'analisi semiotica che propone Sfard per l'interpretazione dell'emergenza "retroattiva" degli oggetti matematici, che evita la circolarità dell'approccio oggettivista/realista.
L'Autrice si appoggia alla terminologia di Saussure (1986, citato in Sfard, 2000, p. 97), ricorrendo ai termini segno (*sign*), significante (*signifier*) e significato (*signified*), ma con accezioni specifiche per l'approccio adottato, in cui significante e significato formano *insieme* l'oggetto:

> To be able to tackle the process through which the objects represented by the symbols come retroactively into being, I need a vocabulary that can be trusted to minimize the impact of the objectivist metaphors for meaning. Not having much choice, I decided to use the words sign, signifier, and signified in the sense similar to those of Saussure and Lacan. The word *sign* should be understood as anything experienced as meaningful, whether it is a spoken word, a written symbol, or any other artifact used in communication. The words *signifier* and *signified* refer to two inseparable aspects of human relation to signs: The former implies that a sign must have a perceptually accessible form, and the latter makes it clear that from the user's point of view there is more to the sign than that meets the eye (or ear). In this chapter I refer mainly to the three types of mathematical signifiers: names (words), algebraic symbols, and graphs. (Sfard, 2000, p. 48)

[118] Per far comprendere meglio il concetto di focalizzazione del discorso come origine di un oggetto matematico, possiamo ricorrere alla metafora dell'attrattore in un sistema dinamico: in un tale sistema un insieme (punto, curva etc.) è un attrattore se il sistema dinamico evolve verso esso dopo un tempo sufficientemente lungo.
[119] Notiamo che questa è una posizione nella quale il soggetto che fa il discorso e il soggetto che lo "osserva" non sono tra loro distinti, in quanto l'oggetto, che per il primo non esiste, può essere un obiettivo cognitivo che il secondo ha prefissato per il primo, come nel caso in cui il soggetto che fa il discorso è lo studente, mentre il soggetto "osservante" è l'insegnante. Torneremo su questo aspetto quando parleremo delle routine (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019).

Dunque, il significante (*signifier*) sembra essere una sorta di "concretizzazione" del segno, in quanto garantisce la sua percettibilità sensoriale e può essere per esempio un simbolo del linguaggio matematico, un nome di un oggetto matematico o una rappresentazione grafica. Il significato (*signified*), che in Saussure è l'oggetto, il referente, un elemento extra-linguistico, è infine quella parte dell'oggetto che costituisce l'uso discorsivo del significante.
I *significanti* possono essere o strutturali (*structural signifier*) o operazionali (*operational signifier*). Di per sé, sottolinea Sfard, un simbolo non è né strutturale né operazionale ma, in accordo con il concetto di *procept* (Gray & Tall, 1994), esso può essere usato come un significante strutturale o operazionale. Per esempio, $\sqrt{2}$ può essere visto come l'operazione di estrazione di radice quadrata del numero 2 (*operational signifier*) o come il numero irrazionale "radice di 2" (*structural signifier*); nello stesso modo, 2+3 può essere visto come l'operazione di addizione di 2 e 3 (*operational signifier*) o come il numero 5 (*structural signifier*).
Ci sono vari motivi che possono influenzare l'andamento e la direzione del discorso matematico, ma data la mutua determinazione tra oggetti matematici e discorso matematico, uno di tali motivi è indubbiamente l'introduzione di un nuovo significante: "Introduction of a new signifier (…) I(i)n the long run (…) is bound to bring about the development of a new signified" (Sfard, 2000, p. 54). Come afferma l'Autrice, il (o gli) significato(i) che deriverà(nno) dall'uso discorsivo di un nuovo significante di solito non è(sono) noti a chi introduce per la prima volta il significante (il simbolo, il termine etc.), dato che i significati emergono solo sulla base dell'evoluzione successiva del discorso matematico. Questo è un aspetto importante per la didattica della matematica poiché si tratta di un passaggio significativo per l'apprendimento.
Anche se si condivide la metafora costruttivista che, secondo Sfard è la più accettata come alternativa a quella realista o platonista, rimane comunque un'importante differenza tra l'interpretazione della questione ontologica nell'evoluzione storica e in quella individuale. Infatti, a differenza dell'evoluzione storica degli oggetti matematici, nella quale sono i matematici stessi a introdurre nuovi significanti, che emergono prima come significanti operazionali per esigenze ben note a chi opera per loro mezzo, nel caso dell'apprendimento a scuola, lo studente viene di solito catapultato direttamente in un discorso matematico in cui l'interpretazione dei simboli è subito strutturale. Così, per esempio, di solito lo studente non ha preso parte in precedenza a un discorso matematico in cui $3-5$ non ha ancora uno statuto ontologico, ma è accettato per comodità, per arrivare poi a sancire "l'esistenza" di -2 come oggetto matematico a pieno titolo, alla pari, per esempio, di 2. Molto probabilmente -2 sarà introdotto come elemento di un insieme ottenuto per estensione da quello dei numeri naturali, cioè come un significante strutturale.
Questo accade naturalmente anche perché non è possibile far ripercorrere agli studenti tutta l'evoluzione storica dei concetti matematici, ma ciò non toglie nulla al fatto che si tratta di una differenza importante e non trascurabile tra l'evoluzione

storica e l'evoluzione individuale della conoscenza, di cui è necessario tenere conto in didattica della matematica.[120]
La repentina esposizione a *signifier* strutturali durante il percorso scolastico sembra dunque essere una delle motivazioni principali per Sfard nel cercare, attraverso la *Commognition*, uno strumento utile alla *disoggettificazione* (disobjectification) del discorso sul pensiero nell'apprendimento della matematica (Sfard, 2008, pp. 71–76).[121] Infatti, se è quasi inevitabile che gli studenti vengano esposti in maniera repentina a significanti strutturali in matematica, come è possibile (a) spiegare come funziona il pensiero in un contesto in cui lo studente non può ancora avere conoscenza dell'oggetto matematico, ma riesce comunque a lavorare con esso, a usarlo; (b) spiegare che molti studenti apprendano comunque? La posizione assunta da Sfard fornisce una risposta a tali interrogativi affermando che il significato è da cercarsi nell'*uso* e che è tale uso che contribuisce a formare, insieme al simbolo, l'oggetto matematico e non viceversa.
Infatti, in Sfard (2008), l'Autrice articola in dettaglio il concetto di significante (*signifier*) attraverso il concetto di *realizzazione*, che è una coppia formata da un *signifier* e un oggetto primario (*p-object*), il quale ha la caratteristica di essere accessibile ai sensi. L'oggetto matematico, detto anche "oggetto discorsivo" (Sfard, 2008, p. 166), è dunque formato dalle coppie *signifier-p-object* (le realizzazioni del *signifier*) e dal *signifier* stesso, dove le realizzazioni rappresentano l'*uso* del *signifier*.
Dunque, è attraverso la relazione tra significante e significato che Sfard spiega l'emergenza dell'oggetto matematico: fino a quando non c'è un significante, semplicemente non c'è alcun oggetto di cui parlare. Nel momento in cui compare un nuovo simbolo, che viene usato come significante strutturale, inizia un processo che porterà il simbolo a diventare una rappresentazione di una *coppia significante-significato* (Sfard, 2000, p. 58). Tale coppia significante-significato comprende in sé non solo la "cosa" in senso oggettuale, ma anche il suo significato, espresso tramite l'uso del significante nei discorsi.
Qui vediamo una differenza con quello che in Sfard (1991) era la dicotomia operazionale-strutturale: essa continua a essere presente sotto forma di significanti operazionali e strutturali ma, ciò che prima era considerato in un certo senso come il punto di arrivo per l'aspetto strutturale (il simbolo, il nome e soprattutto la rappresentazione grafica), ora è il punto di partenza della formazione discorsiva dell'oggetto. Anche se questo fatto sembra essere vero sia per l'evoluzione storica degli oggetti matematici sia per quelli che si formano durante l'apprendimento, rimane comunque tra i due l'importante differenza della mancanza di *signifier*

[120] Notiamo che è proprio questo il punto di vista che abbiamo messo in evidenza nel momento in cui abbiamo discusso l'esempio del caso della funzione come oggetto matematico specifico della didattica della matematica, evidenziato da Balacheff e Gaudin (2009).
[121] In Sfard (2008) con il termine "disobjectification" si intende una operazionalizzazione di termini linguistici oggettificati che denota un passaggio dall'oggetto in sé al suo uso.

operazionali che precedono quelli strutturali nel caso dell'evoluzione nell'apprendimento.

Come si può dunque inquadrare il problema dell'introduzione di significanti strutturali, non preceduti da significanti operazionali, tipico dell'istruzione a scuola? Per scogliere questo nodo, Sfard introduce un'altra distinzione, sempre sul modello della dicotomia tra processo e oggetto, questa volta però in riferimento alla *modalità* di attribuzione di significato, e non più in riferimento alla natura stessa del significato.

L'attribuzione di significato ai simboli introdotti come significanti strutturali può essere, secondo Sfard (2000): (a) improntato a un modello (*templete driven*) o (b) mediato da un oggetto (*object mediated*). Nel primo caso il soggetto, sulla base di indizi che è in grado di recuperare dal modo in cui un nuovo significante viene usato nei discorsi fatti da altri e sulla base di modi d'uso a esso già noti per categorie di significanti che giudica simili, è in grado di fare ricorso a dei template, cioè a dei modelli, secondo cui agire nell'uso del nuovo significante;[122] nel secondo caso, invece, il soggetto è in grado di usare il nuovo significante come entità autonoma, con caratteristiche specifiche di oggetto: esistenza, permanenza e manipolabilità (Sfard, 2000, p. 68). Secondo Sfard, durante l'apprendimento della matematica, una fase *template driven* precede sempre quella *object mediated*, anche se la durata e l'evidenza della prima fase può variare molto, fino anche a non essere percepibile: "when structural symbols (symbols that refer to objects) are introduced for the first time, their use is mainly template driven, and it is only some time later that it becomes object mediated" (Sfard, 2000, p. 58).

Una volta che un nuovo significante strutturale è stato introdotto (cosa che, ricordiamo, è usuale a scuola), esso crea un vuoto semantico che dovrà essere riempito tramite pratiche discorsive nuove. L'attribuzione di significato avviene tramite l'uso del nuovo significante nelle pratiche discorsive e ciò che dovrebbe accadere, secondo Sfard, è che con il tempo i vecchi usi, caratterizzati da template noti in precedenza, producano usi nuovi, creando una coppia significante-significato che costituirà un nuovo oggetto (Sfard, 2000, pp. 59–60).

Tuttavia questo passaggio non è immediato e la sua assunzione a principio richiede qualche approfondimento. Infatti, le domande alle quali bisogna rispondere sono almeno due: In che modo si attribuisce significato a una cosa che ancora non si conosce, cioè al nuovo significante? Come fa un uso (significato) vecchio a produrne uno nuovo?

Per quanto riguarda la prima domanda, Sfard ricorre al concetto di metafora.[123] Per l'Autrice la fonte primaria dalla quale noi traiamo le metafore per la costruzione

---

[122] Per esempio, se il soggetto classifica un significante come un oggetto matematico, lo userà in frasi proposizionali che lo contengono come soggetto e non come verbo o aggettivo; oppure, se sente che i nuovi simboli introdotti vengono denominati "numeri", riterrà normale compiere operazioni con essi, secondo le modalità che conosce fino a quel momento.

[123] Qui per "metafora" si intende l'effetto del trasferimento di modelli (template) tra discorsi (Sfrad, 2000).

di significato guidato da modelli (*template driven*) sono i discorsi appartenenti alla realtà attuale (AR). In altre parole: noi tendiamo a usare le nuove parole nel linguaggio matematico, relativo alla realtà virtuale della matematica (VR), con le stesse modalità linguistiche con cui usiamo parole che riteniamo appartenere alla stessa categoria grammaticale nei discorsi relativi alla realtà attuale (AR). Per esempio, se classifichiamo una nuova parola implicitamente come sostantivo, la useremo come soggetto nella frase e non come complemento oggetto o come verbo. Inoltre, dato che il concetto di metafora è inteso come l'effetto del trasferimento di modelli (template) tra discorsi, gli oggetti matematici stessi possono essere considerati come delle metafore risultanti da "trapianti" linguistici (Sfard, 2000, p. 68). In questo senso il primo template attivato da una nuova parola è quello che determina la natura del significante ed è dunque fondamentale per il modo in cui successivamente sarà inquadrato tutto il discorso intorno a esso; in mancanza di esempi d'uso espliciti, ci si basa su associazioni metaforiche fondate sulle esperienze pregresse (Sfard, 2000, p. 66).[124] Non la semplice introduzione di un nuovo significante strutturale, ma la sua introduzione seguita dall'attivazione di un template in cui tale significante funge da oggetto, seguita a sua volta da una fase di attribuzione di significato *object mediated*, cioè in cui al significante vengono legate caratteristiche di esistenza, permanenza e manipolabilità (Sfard, 2000, p. 68), segna di solito quell'importante shift ontologico chiamato dall'autrice *reificazione* (Sfard, 1991), di cui abbiamo avuto occasione di discutere in maniera estesa in precedenza.
È importante sottolineare che la natura della costruzione di significato guidato da modelli (*template driven*) è sostanzialmente sociale e le interazioni sociali sono quindi fondamentali in esso, sia per indirizzare verso l'attivazione di template idonei, per esempio attraverso la predisposizione di background discorsivi appropriati, sia per la successiva attribuzione di significato al significante. Infatti: "the template driven use becomes increasingly successful due to its being regulated by discursive negotiations" (Sfard, 2000, p. 66).
Per rispondere alla seconda domanda, cioè in che senso "vecchi" usi possono produrne dei nuovi, cioè in che senso il significato attribuito fino a un dato momento a un significante possa dare origine a un nuovo significato, Sfard (2000) ricorre al concetto di *attese*, intese come preconcetti o preconcezioni o pregiudizi o intuizioni, in linea con quanto Gadamer e Heidegger vedono come il presupposto per l'ingresso nel circolo ermeneutico (Sfard, 2000, p. 67).[125]
Attraverso l'evoluzione delle attese si generano usi nuovi, a partire da quelli vecchi. Le attese mutano sulla base delle risposte che il soggetto ottiene durante la partecipazione alle pratiche discorsive. A volte le attese possono essere anche di

[124] Si noti qui l'analogia del concetto di *template* con il concetto di *script*, visto come uno schema anticipatorio basato su delle strutture di aspettative (Schank & Abelson, 1977, citati in D'Amore, 1999).
[125] Ricordiamo il ruolo che le attese hanno nella valutazione dell'efficacia della comunicazione, come già esposto in precedenza.

impedimento per il passaggio a un nuovo uso del significante, soprattutto se si tratta di misconcezioni, cioè se la metafora a cui si ricorre per estendere l'uso del significante da un discorso precedente a uno nuovo, porta con sé significati che richiedono un inquadramento alternativo per il nuovo uso. Si tratta dunque di far sì che lo studente abbia attese (preconcezioni, pre-giudizi), che siano significative per un nuovo uso del significante introdotto e questo può essere garantito attraverso la sua partecipazione a pratiche discorsive propedeutiche opportunamente scelte. Le definizioni possono avere un'utilità in tale senso, ma secondo l'Autrice non si può partire dal presupposto che esse siano in grado di fornire a priori delle attese significative, come si suppone che avvenga nei discorsi formali in matematica (Sfard, 2000).

Soffermiamoci ora sulle caratteristiche della seconda fase della concettualizzazione[126] di un oggetto, la fase chiamata "object mediated", che dovrebbe seguire a quella appena descritta e chiamata "template driven".[127]

Una caratteristica principale della fase *object mediated* è il fatto che il significante inizia a essere percepito da chi lo usa come *stante-per-qualcos'altro* (standing for something else), aspetto che non è invece presente nella fase *template-driven*.

Riguardo alle modalità di passaggio dalla fase *template driven* alla fase *object mediated*, Sfard evidenzia soprattutto due possibilità: (1) creazione interdiscorsiva di oggetti matematici; (2) creazione extradiscorsiva di oggetti matematici.

Nel primo caso è centrale quello che l'Autrice chiama "isomorfismo discorsivo", cioè la possibilità di stabilire se due discorsi matematici che coinvolgono due significanti diversi sono equivalenti, nel senso che se si sostituisce l'uno al posto dell'altro il discorso continua a essere valido. Da una tale presa di coscienza risulta di solito una necessità di individuare un oggetto che emerge come referente per quelle che da allora in poi saranno due rappresentazioni diverse della stessa cosa, cioè dell'oggetto. Nel secondo caso si tratta di agevolare un passaggio alla fase *object mediated* attraverso "importazioni" di significanti dal discorso extra-matematico della AR, quando ciò è possibile, cioè quando lo stesso segno ha significanti sia nel linguaggio ordinario sia in quello matematico, come nell'esempio classico dei numeri naturali, i quali hanno un ruolo sia nella vita quotidiana sia in matematica. A volte, sottolinea Sfard (2000), questa fonte di significato per il discorso matematico è irrinunciabile, soprattutto nell'apprendimento.

Dunque, riassumendo, le due modalità di passaggio alla fase *object mediated* si distinguono per il fatto che nel primo caso il discorso matematico crea da solo il suo significato, rimanendo all'interno della VR e si realizza per una sorta di

[126] Come già sottolineato in precedenza, citando Wittgenstein, Sfard fa notare che l'introduzione di un nuovo nome o simbolo non rappresenta un battesimo di un nuovo oggetto, ma piuttosto una sua concettualizzazione (Sfard, 2000, p. 47).

[127] L'uso del condizionale è dettato dal fatto che, come sottolinea Sfard, un soggetto apprendente potrebbe anche non passare affatto, durante il suo percorso formativo, a una fase *object mediated*.

astrazione dai discorsi matematici, mentre nel secondo caso tale significato è in prima istanza mutuato da un discorso esterno alla matematica e relativo alla AR.
Più recentemente, Sfard e colleghe (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019) hanno definito una nozione "commognitiva" di apprendimento, introducendo così la Commognition nell'ambito delle teorie dell'apprendimento endogene alla didattica della matematica. La nozione tramite la quale le autrici definiscono l'apprendimento è quella di *routine*, centrale anche per la definizione di oggetto matematico fornita all'inizio del paragrafo.
L'idea di routine su cui si basano Sfard e colleghe ha molte analogie con il concetto di template discusso in precedenza. Infatti, le routine sono in generale dei pattern modellati su azioni compiute in precedenza in circostanze giudicate simili (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019) e i template sono, appunto, dei modelli basati su esperienze precedenti:[128]

> Learning is due to our ability to react to new situations by utilizing the memories they elicit. This tendency for modelling our present actions on what was done in the past results in patterns of actions that we term routines. Routinization of our actions is what learning seems to be all about. (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019, p. 156)

Per poter assolvere al compito di fungere da concetto base per l'apprendimento, la nozione di routine deve essere resa operativa, cioè deve essere possibile stabilire come le routine nascono ed evolvono, in maniera tale che sia possibile ricorrere a tale nozione per "diagnosi" e analisi nella ricerca empirica, trasformando le sue caratteristiche in proprietà accessibili a un osservatore (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019). L'idea di fondo seguita dalle autrici è stata quella di definire le routine tramite il concetto di compito (*task*). L'idea è tratta dal fatto che di solito le routine vengono nominate sulla base del compito al quale si assolve mettendole in atto.[129]
Tuttavia, emergono due problematiche nel cercare di rendere operativa la nozione di routine attraverso la sua definizione in riferimento al compito (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019): (1) le routine *evolvono* e quindi non è possibile fare riferimento a esse esclusivamente come a degli oggetti; (2) le routine messe in atto dallo studente non sono necessariamente le stesse che ha in mente l'insegnante, anche se il compito è testualmente identico per entrambi.
Per quanto riguarda il primo punto, la problematica è insita nell'idea stessa di apprendimento, che è un processo che si protrae nel tempo; quindi l'idea di routine non fa che mettere in evidenza questo aspetto.
Per quanto riguarda il secondo punto, le autrici ricorrono al concetto di "boundary object", concetto già introdotto da noi nel capitolo 5. Ricordiamo qui che il *boundary object* è un'entità materiale percettivamente accessibile "constituting a

---

[128] Notiamo che, secondo le autrici, l'idea di routine è in realtà presente in molti concetti in uso in didattica della matematica, come per esempio in quella di pratica o attività (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019).
[129] Le autrici fanno l'esempio della routine di "confronto di cardinalità di insiemi", la quale si basa sulla messa in corrispondenza biunivoca tra gli elementi degli insiemi.

sort of arrangement that allow[s] different groups to work together without consensus" (Star, 2010, p. 602).
Il ruolo di *boundary object* viene svolto in questo contesto dal concetto di "situazione di compito" (*task situation*). Una *task situation* è "any setting in which a person considers herself bound to act–to do something" (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019, p. 159).
Le autrici distinguono tra *task setter* (p.e. l'insegnante) e *task performer* (lo studente), ciascuno dei quali può dunque fornire una diversa interpretazione della *task situation*, la quale però è in grado di tenere conto di entrambe le posizioni e che inoltre può essere vista come in evoluzione nel tempo, proprio in quanto intesa come *boundary object*.
Nel contesto qui introdotto una routine è definita quindi come segue: "*routine performed in a given task situation by a given person is the task, as seen by the performer, together with the procedure she executed to perform the task*" (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019, p. 161, in corsivo nel testo).
Attraverso questa definizione, che articola il concetto di routine come la coppia compito - procedura, vista dal punto di vista di un dato soggetto in una data situazione, si ottiene quella che Sfard e coautrici chiamano "la disoggettificazione" della routine:

> the task and the procedure have been disobjectified, that is, they are no longer agentless phenomena that must be the same for all participants; rather, they are somebody's vision of what is going on: They depend on the task situation and on who is doing the job of interpreting. (…) we no longer speak about routines as time independent. (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019, p. 161)

La disoggettificazione delle routine consiste dunque nel fatto che esse sono non più oggettivamente esistenti per i soggetti, cioè non hanno un'esistenza intersoggettiva, ma che appartengono a una dimensione soggettiva.
Dal punto di vista dell'evoluzione storico-epistemologica in matematica, le routine che evolvono sono di due tipi: pratiche e discorsive.
Una routine è *pratica*:

> if a person interprets the task situation as requiring a change, re-organization or re-positioning of objects. (…) physical actions such as biking or swimming, and such everyday activities as preparing breakfast, dressing or cleaning one's teeth are good examples. (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019, p. 163)

Una routine è *discorsiva* "if a person interprets the task situation as requiring a communicational action" (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019, p. 163).
Le routine pratiche e discorsive sono intrecciate storicamente, nel senso che quelle pratiche portano col tempo a un'evoluzione storica dei discorsi, e si supportano a vicenda nella loro evoluzione (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019). Per quanto riguarda la matematica, gli esempi possono andare dal conteggio di oggetti concreti al discorso sui numeri naturali oppure dal tracciamento della traiettoria di un

proiettile al modo di ricavare una legge del moto che descrive una tale traiettoria etc.
Secondo le autrici, i discorsi matematici esistenti, o almeno buona parte di essi, sono originati da un certo numero di routine discorsive che li hanno generati. Tali discorsi emergono per astrazione dello stesso schema da un certo numero di routine: “The new discourse started emerging when people realized that a number of routines displayed the same pattern” (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019, p. 164).
Un discorso matematico nuovo che emerge in questo modo porterà con sé la necessità di introduzione di un nuovo significante. Le singole routine dalle quali è emerso il nuovo discorso possono essere viste come delle realizzazioni del nuovo significante (vediamo dunque come qui si inverte l’ordine consueto nelle posizioni realiste sul significato, in quanto è il significante a creare la sua realizzazione concreta e non viceversa). Il significante, insieme alle realizzazioni in questione, potrà evolvere verso un nuovo oggetto matematico, costituito dal significante e dal significato.
Storicamente le fasi dell’emersione degli oggetti matematici sono due: (1) l’introduzione di un nuovo significante che eventualmente porterà alla formazione di un nuovo oggetto matematico; (2) il ricorso al nuovo significante per collegare diverse routine “germinali” individuando un invariante nei compiti che le contraddistinguono (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019, p. 165). Dunque, è attraverso il nuovo significante, emerso per astrazione da più routine, che tali routine vengono successivamente collegate in un unico oggetto matematico.
Dal punto di vista individuale, quindi non storico, ma ontogenetico, la questione è un po’ diversa, come abbiamo già messo in evidenza nel momento in cui abbiamo parlato dell’esposizione immediata degli studenti a significanti strutturali, tipici per i curriculi scolastici. A tale proposito le autrici sottolineano infatti che a scuola, nonostante gli sforzi di proporre il più possibile contesti motivanti e significativi per l’introduzione dei nuovi significanti strutturali, le routine vengono presentate senza che si generi nello studente un bisogno genuino che le possa originare. L’unica motivazione che il soggetto apprendente può trovare per il loro apprendimento è legata ad aspetti sociali, cioè all’esigenza di appartenere a una data microsocietà e di “fare come gli altri” (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019, p. 165).
Questo tipo di routine, originate nel “fare come gli altri”, hanno le caratteristiche stereotipiche dei *rituali*, cioè esse sono portate avanti solo a causa di motivazioni esogene (per esempio volere un buon voto, temere una punizione etc.) e di solito non in maniera autonoma, ma perché stimolati da altri a performarle.
Più precisamente, un rituale è definito come “a fully process-oriented routine, appreciated for its performance and not for its product” (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019, p. 166).
Un secondo tipo di routine, le routine come esplorazione (*explorative routines*), ha invece caratteristiche diverse dai rituali, in quanto il soggetto che le pratica è interessato al risultato che esse consentono di produrre e trova in esso la motivazione endogena di perpetrarle. Dal punto di vista dell’evoluzione storica

delle routine matematiche è chiaro che i matematici che hanno prodotto il discorso matematico hanno sempre perpetrato delle routine esplorative e non dei rituali, mentre a scuola sembra, come già evidenziato, inevitabile, almeno nell'introduzione delle routine, fare riferimento alle routine intese come rituali e a un tipo di apprendimento ritualizzato.

Veniamo ora alla definizione di oggetto matematico fornita all'inizio e cerchiamo di evidenziare le sue caratteristiche sulla base dell'analisi del contesto in cui essa nasce, fornita nelle pagine precedenti.

Dalla definizione si evince che l'emergenza dell'oggetto matematico è un processo che si protrae nel tempo e che si presenta sotto forma di un nuovo discorso (matematico). Tale nuovo discorso è una routine discorsiva che emerge per astrazione dalle azioni compiute tramite un certo numero di routine pratiche. L'astrazione dalle routine pratiche è sancita dalla comparsa di un nuovo significante e ciascuna delle routine pratiche che hanno portato a tale astrazione è un'attualizzazione o realizzazione del nuovo significante e rappresenta un oggetto concreto riferibile al significante in questione. Infine, il significante stesso (di solito un simbolo matematico), insieme a tutte le sue realizzazioni, intese come oggetti concreti, costituisce un nuovo oggetto matematico.[130]

Dato che le realizzazioni a cui si riferisce la definizione possono essere viste come diversi usi o applicazioni del significante, l'oggetto è costituito dal simbolo e da tutti i suoi possibili usi. Dato che gli usi sono però definiti in termini di routine, un oggetto matematico è costituito da un significante e dalle routine a esso associate. D'altro canto, essendo una routine formata da una coppia compito-procedura, un oggetto matematico è l'insieme formato da un significante (quindi un simbolo) e dai compiti a esso associabili, comprese le procedure che tali compiti richiedono per essere svolti. Essendo però le routine non oggettive, ma soggettive, in quanto il compito richiede un'interpretazione personale e fa mettere in atto procedure che possono differire da soggetto a soggetto, ed essendo esse anche in costante evoluzione nel tempo, l'oggetto matematico è in realtà un oggetto matematico personale, cioè riferito a un dato soggetto, in un dato momento e in una data situazione. La nozione di *task situation* come *boundary object* consente tuttavia di creare un'unità tra le routine di soggetti diversi, anche senza che ci sia un accordo tra le loro interpretazioni del compito e delle procedure da esso attivate. Infine, l'oggetto matematico è ciò che emerge nel passaggio dalle routine intese come rituali alle routine intese come esplorazioni, cioè attraverso la de-ritualizzazione delle routine, ed è quindi il prodotto finale (non sempre realizzato) di un lungo

[130] Come esempio di oggetto matematico, Lavie, Steiner e Sfard (2019) propongono le frazioni. Per esempio, la frazione 3/8, che emerge dal compito astratto "determinare 3/8 di un intero", il quale a sua volta emerge da routine pratiche come le seguenti, tutte riconducibili allo stesso pattern: "Preparing three portions of soup from a recipe for eight portions. From the provision of pencils meant to be shared equally by two teams of three and five people, respectively, separating a portion that should be given to the team of three. While planning an 8-day-long journey to be made in equal daily segments, finding the location at which the traveler will find herself at the end of the third day" (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019, p. 164).

processo durante il quale si apprendono regole d'uso e si pratica la partecipazione a discorsi che coinvolgono dei significanti.
D'altra parte, notiamo però che Sfard e collaboratori distinguono tra routine nel senso consueto, cioè "personali", riferibili a una data task situation, e routine "canoniche", cioè, performate da esperti, e alle quali è possibile riconoscere un certo grado di oggettività, esprimibile con il fatto che tali routine possono semplicemente essere chiamate con il nome del compito che servono per risolvere:

> in certain contexts, we may still indicate some routines by just naming their tasks and without a reference to a particular task situation or a specific performer. Whenever we do this, as would be the case if we said "routine for a quantitative comparison of two sets", we are to be understood as referring to the routine performed by experts in task situations that they interpret as requiring canonically understood quantitative comparison. (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019, p. 161)

Vi è dunque, anche nella visione degli oggetti matematici come routine d'uso di significanti, la necessità e la possibilità di un ancoraggio a delle routine "canoniche", cioè riferibili a norme stabilite e quindi oggettive. Notiamo che l'aggettivo "canonico" si dovrebbe riferire alla coppia compito-procedura e quindi presuppone che a un dato compito considerato oggettivo si possa abbinare una procedura standard, cioè canonica.

### ***Discussione in riferimento alle domande (1')-(7')***

Nella concezione di oggetto matematico nella *Commognition* la componente ontologica relativa ai modelli interpretativi del primo ordine è chiaramente espressa attraverso l'idea di *task situation*. Essa è anche molto ben articolata dal punto di vista operativo attraverso il concetto di *boundary object*. Infatti, all'interno della *task situation* sono distinti il modo di interpretare il compito da parte dello studente e la natura delle procedure da lui attivabili, viste dal punto di vista dell'insegnante. In questo modo il modello interpretativo del primo ordine è il risultato dell'unione, tramite il *boundary object*, di due sottomodelli interpretativi del primo ordine.
Per quanto riguarda la possibilità di inquadrare tecnicamente la modalità relazionale con la quale si formano i complessi concettuali che costituiscono gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica, la definizione di per sé non ne tiene conto e nemmeno il suo contesto più ampio, ma il concetto di *boundary object* potrebbe essere uno strumento utile in riferimento alla costituzione dei complessi concettuali, in quanto potrebbe permettere di considerare la relazione semantica come un *boundary object* che consente di collegare due elementi che formano un complesso concettuale. Il *boundary object* è tuttavia uno strumento concettuale e non tecnico, come lo è anche quello di *procept*, il che limita decisamente la sua operatività, nel senso che è possibile pensare una determinata "cosa" come un *boundary object* che consente una

"comunicazione tra due o più elementi, non necessariamente compatibili", ma che il costrutto "boundary object" non dispone di una struttura che consente di esplicitare le relazioni che si costituiscono al suo interno.
La dimensione istituzionale della didattica della matematica è presente solo a livello prasseologico poiché il ruolo del *task setter* è di solito quello del docente o al più del ricercatore che interviene nella prasseologia d'aula e mai quello del ricercatore che interpreta l'acquisizione di conoscenza in didattica della matematica. Manca dunque anche in questo caso un riferimento a un modello interpretativo del secondo ordine, in quanto anche la *Commognition*, come le altre teorie o gli altri approcci finora esaminati, è in prima linea una teoria dell'apprendimento della matematica e non una teoria epistemologica della didattica della matematica.
La dimensione istituzionale della matematica come disciplina è presente in maniera marginale, principalmente come fonte per la messa in evidenza di analogie o differenze tra l'evoluzione storica delle routine nella matematica e l'evoluzione ontogenetica delle stesse, ma la dimensione strutturale e formale della matematica non è più chiamata in causa in questo contesto, a differenza da quanto avviene in Sfard (1991). Riteniamo che questo avvenga perché risulta difficile collegare l'idea dinamica degli oggetti matematici come routine e quella degli oggetti matematici strutturali, nell'ambito di una prospettiva bourbakista statica, come invece inteso in Sfard (1991). Rimane tuttavia la possibilità di riferirsi a delle routine "canoniche", relative alle performance degli esperti. Dunque il riferimento agli oggetti matematici istituzionalmente riconosciuto è presente nella *Commognition*, ma è dato solo in riferimento alla *pratica* degli esperti e non in riferimento all'aspetto strutturale della matematica.
La concezione di oggetto matematico nella *Commognition* tiene conto sia dei processi sia degli oggetti, ma con una prevalenza dell'aspetto legato ai processi, mentre gli oggetti rimangono spesso dei limiti verso i quali tendono le routine personali. In particolare notiamo che in questa concezione di oggetto matematico è presente in maniera esplicita l'idea di dinamicità degli oggetti, espressa attraverso la messa in evidenza dell'evoluzione temporale delle routine. Ci sembra dunque di poter affermare che in questo caso sia presente, almeno implicitamente, un'ontologia transitoria, che coinvolge sia la componente ontologica personale sia in parte quella legata alla didattica della matematica come prasseologia e che la loro unione sia garantita dalla natura di *boundary object* riferito alla *task situation*.
Riguardo alla natura del significato che sottostà alla definizione di oggetto matematico qui esaminato, esso è chiaramente pragmatico, in linea con la definizione del significato come uso nel linguaggio, secondo Wittgenstein (1953/2003). Dato che in questo contesto la matematica è un discorso, l'idea del significato inteso come l'uso nel linguaggio è pienamente coerente con l'idea di significato in Wittgenstein. Inoltre, la definizione degli oggetti in termini di routine rende il concetto pragmatico di significato più operativo, in quanto fornisce la possibilità di osservare tale significato nella realtà, sia in riferimento al singolo

soggetto, sia in riferimento alla comunità in cui le routine sono perpetrate (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019). In questo senso, sottolineano le autrici, attraverso il concetto di routine si elude la necessità di ricorrere all'idea di concetto per definire il significato, in quanto l'oggetto di ricerca è il discorso, mentre l'unità minima di significato del discorso è la routine: "In our studies, it is the discourse in its entirety that constitutes the object of research, whereas routine is the unit of analysis - the smallest manifestation of the discourse considered in analyses" (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019, p. 172). Possiamo dunque concludere che il significato di un oggetto matematico in questo contesto è dato dall'insieme delle routine che il soggetto è in grado di mettere in moto in riferimento a esso.
Il ruolo della semiotica è preso in considerazione nella *Commognition* attraverso la semiotica strutturale di Saussure, in quanto la matematica è vista in questo contesto come un discorso.
Notiamo infine che la definizione degli oggetti matematici attraverso le routine non può essere considerata una definizione assolutamente generale poiché la sua accettazione presuppone l'accettazione di molti aspetti specifici della *Commognition*, come per esempio la concezione della matematica come discorso e quella del pensiero come caso particolare della comunicazione.

**Definizione 7**

> An object is constructed from a process when the individual becomes aware of the process as a totality and realizes that transformations can act on it. (Dubinsky & McDonald, 2001, p. 279)

> We have discussed the ways in which mental objects can be constructed in mathematics and have distinguished three types of object construction, each of which operates in an increasingly sophisticated manner: (1) *perceived objects*, arising through empirical abstraction from objects in the environment (…), (2) *procepts*, which first involve processes on real-world objects, using symbols which can then be manipulated as objects, upon which operations may be performed and symbolized in the same way, and (3) *axiomatic objects*, conceived by specifying criteria (axioms or definitions) from which properties are deduced by formal proof). (Tall, Thomas, Davis, Gray, & Simpson, 2000, p. 19)

La due definizioni/caratterizzazioni qui riportate si collocano entrambe in un contesto costruttivista.
La prima caratterizzazione è fornita nell'ambito della APOS Theory (Dubinsky, 1991; Dubinsky & McDonald, 2001) di Dubinsky e collaboratori, alla quale abbiamo già avuto modo di accennare in vari contesti nei capitoli 5 e 6. La seconda citazione, nella quale sono caratterizzate tre tipologie di oggetti matematici, si basa fortemente sulla prima, almeno per quanto riguarda l'idea di *perceived object* e si colloca nell'ambito dei lavori di Tall e collaboratori (Tall, Thomas, Davis, Gray, & Simpson, 2000). Per gli scopi da noi perseguiti abbiamo ritenuto opportuno

proporre queste due caratterizzazioni di oggetti matematici insieme, assumendo la seconda come un'articolazione della prima.
Soffermiamoci dunque prima sull'idea di oggetto matematico nell'APOS Theory. Ricordiamo che APOS sta per Action-Process-Object-Schema; tale denominazione intende sottolineare il fatto che la concettualizzazione percorre una successione di passaggi tramite i quali l'*azione* interiorizzata diventa un *processo* dinamico, la cui reiterazione culmina, tramite l'incapsulamento, con la formazione di un *oggetto* statico e con il consolidamento di uno nuovo *schema* (Dubinsky & McDonald, 2001).
L'ipotesi sulla quale si basa l'APOS è la seguente:

> mathematical knowledge consists in an individual's tendency to deal with perceived mathematical problem situations by constructing mental actions, processes, and objects and organizing them in schemas to make sense of the situations and solve the problems. In reference to these mental constructions we call it APOS Theory. (Dubinsky & McDonald, 2001, p. 274)

Vediamo più in dettaglio che cosa sono e come si articolano le quattro componenti di *azione*, *processo*, *oggetto* e *schema* nell'APOS Theory:

> An *action* is a transformation of objects perceived by the individual as essentially external and as requiring, either explicitly or from memory, step-by-step instructions on how to perform the operation. (…) When an action is repeated and the individual reflects upon it, he or she can make an internal mental construction called a *process* which the individual can think of as performing the same kind of action, but no longer with the need of external stimuli. An individual can think of performing a process without actually doing it, and therefore can think about reversing it and composing it with other processes. (…) An *object* is constructed from a process when the individual becomes aware of the process as a totality and realizes that transformations can act on it. (…) Finally, a *schema* for a certain mathematical concept is an individual's collection of actions, processes, objects, and other schemas which are linked by some general principles to form a framework in the individual's mind that may be brought to bear upon a problem situation involving that concept. (Dubinsky & McDonald, 2001, pp. 274–275)

Secondo Dubinsky e McDonald, tutte le "entità matematiche" possono essere concepite come rappresentate in termini di azioni, processi, oggetti e schemi; l'idea di schema alla quale gli autori fanno riferimento è molto simile a quella di *concept image* di Tall e Vinner (1981).[131] Tuttavia, l'idea di schema alla quale essi ricorrono si distingue dal concept image per il fatto che lo schema deve soddisfare certi criteri di coerenza che nel caso del concept image non sono richiesti (Dubinsky & McDonald, 2001). Infatti, gli autori sottolineano che uno schema deve consentire di stabilire se un dato fenomeno è riconducibile a esso, il che significa che uno schema ha un dominio d'azione, mentre il concept image è un'immagine mentale che un soggetto ha di un oggetto matematico, ma che non

---

[131] A proposito di tali concetti si veda il capitolo 7.

ha un ruolo operativo e quindi non ha un dominio d'azione che lo "costringe" a soddisfare criteri di coerenza di tal genere.
Come notiamo dalla definizione/caratterizzazione di oggetto matematico nell'APOS, essa non ha per così dire una funzione ontologica, cioè non stabilisce che cos'è un oggetto matematico, ma spiega come un tale oggetto viene costruito. Anche se nella caratterizzazione compare la copula "è", essa non introduce delle proprietà del termine definito, ma è seguita da una descrizione del modo di realizzarsi, di essere costruito, di quest'ultimo.
D'altra parte è necessario tenere conto del fatto che l'APOS Theory è una teoria costruttivista, nella quale, come abbiamo già sottolineato, l'idea di oggetto ha senso solo in termini di oggetto mentale di qualcuno, cioè di essenza del pensiero di un soggetto, con la caratteristica della staticità e maneggevolezza mentale come un'entità a sé stante.
Procediamo ora con la discussione della seconda definizione di oggetto matematico fornita all'inizio del paragrafo.
Entrambe le definizioni/caratterizzazioni da noi fornite sono fortemente legate alla dualità processo-oggetto. Come sottolineano Tall, Thomas, Davis, Gray e Simpson (2000), tale dualità ha in realtà una lunga storia (si veda la Tabella 5) che ha le sue origini nei lavori di Piaget e più precisamente nella contrapposizione tra azioni e operazioni da un lato e oggetto di pensiero tematizzato dall'altro. Essa prosegue poi con i lavori di altri autori come Dienes (dualità tra predicato e soggetto), Davis (dualità tra una successione di passi e una cosa, un'entità, un sostantivo), Greeno (dualità tra procedura e entità concettuale), Dubinsky (dualità tra azione e oggetto incapsulato), Sfard (dualità tra processo interiorizzato e oggetto reificato), Gray e Tall (dualità tra procedura e procept).

| | **Process** | **…** | **Object** |
|---|---|---|---|
| **Piaget (50s)** | action(s), operation(s) … | … | thematized object of thought. |
| **Dienes (60s)** | predicate … | … | subject. |
| **Davis (80s)** | visually moderated sequence … | integrated sequence … seen as a whole, and can be broken into sub-sequences | a thing, an entity, a noun. |
| **Greeno (80s)** | procedure … | input to another procedure … | conceptual entity. |
| **Dubinsky (80s)** | action … each step triggers the next | interiorized process … | encapsulated object. |
| **Sfard (80s)** | interiorized process process performed | condensed process … self-contained | reified object. |
| **Gray & Tall (90s)** | procedure … | process … conceived as a whole, irrespective of algorithm | procept. Symbol evoking process or concept |

Tabella 5. La transazione tra processo e oggetto in una prospettiva storica (tratto da Tall, Thomas, Davis, Gray, & Simpson, 2000, p. 4).

Ciò che questi approcci hanno in comune, secondo Tall e coautori, è che: "(…) each passes through a development of growing sophistication from some kind of procedure/process usually performed step-by-step and ending with an object/concept that can be manipulated as an entity in its own right" (Tall, Thomas, Davis, Gray, & Simpson, 2000, p. 4).
Dunque, ciò che sembra essere fondamentale per tutti questi approcci, in riferimento all'oggetto matematico, è che esso è il culmine di un processo e che consente di maneggiare mentalmente la conoscenza a esso legata, come se fosse un'entità a sé stante.
Infatti, seguendo la definizione di oggetto nell'APOS Theory, è evidente che la modalità di costruzione degli oggetti è quella dell'incapsulamento di processi, ma in realtà nell'APOS Theory sono presenti almeno due modalità diverse di costruzione di oggetti: una è quella mediante incapsulamento, già esposta e ben nota, l'altra è invece la modalità di riflessione su uno schema già presente (Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas, & Vidakovic, 1996). D'altro canto,

quest'ultima idea è presente anche in altri lavori, per esempio in Scheiner (2017), ampiamente discusso da noi nel capitolo 7, in cui l'Autore propone un'idea simile; secondo Scheiner, accanto all'astrazione dalle azioni, che egli associa a Dubinsky (1991), Sfard (1991) e Gray e Tall (1994), è possibile pensare anche a un'astrazione dagli oggetti, cioè per esempio a partire dalle proprietà espresse nelle definizioni.[132] Quest'ultima modalità di costruzione di oggetti matematici ha molte analogie con la riflessione sulla versione strutturale delle nozioni matematiche in Sfard (1991), la quale, in seguito alla reificazione, consente di procedere con la concettualizzazione di versioni strutturali sempre più astratte.
A partire dall'idea di oggetto come incapsulamento nell'APOS Theory, dalla dualità tra aspetto operativo e strutturale delle nozioni matematiche e dal concetto di *procept*, Tall e coautori delineano tre diverse tipologie di oggetti:

> (1) *perceived objects*, arising through empirical abstraction from objects in the environment (and later may be given successively subtler meaning through focusing also on verbal descriptions and definitions to construct platonic objects), (2) *procepts*, which first involve processes on real-world objects, using symbols which can then be manipulated as objects, upon which operations may be performed and symbolized in the same way, and (3) *axiomatic objects*, conceived by specifying criteria (axioms or definitions) from which properties are deduced by formal proof). (Tall, Thomas, Davis, Gray, & Simpson, 2000, p. 19)

In riferimento all'APOS Theory, gli stessi autori mettono in evidenza il fatto che l'oggetto percepito (*perceived object*) a cui essi fanno riferimento, è in realtà l'oggetto che viene formato tramite l'incapsulamento processo-oggetto nel senso di Dubinsky.
Un altro caso di costruzione tramite la dualità processo-oggetto è quello dell'oggetto definito (*defined object*), che ha molte caratteristiche in comune con l'aspetto strutturale nel senso di Sfard (1991), dove "strutturale" è inteso dagli autori in sintonia con le idee bourbakiste (Tall, Thomas, Davis, Gray, & Simpson, 2000). Tali *defined objects* sono in realtà una fase di passaggio per giungere agli *axiomatic objects*, ma non hanno uno statuto di oggetti a sé stante. I *defined object*

[132] Le riflessioni sulle diverse modalità di costruzione degli oggetti portano in questo contesto Tall, Thomas, Davis, Gray e Simpson, (2000) e Tall (2013) a una teorizzazione di due distinti percorsi nella costruzione di oggetti durante l'apprendimento della matematica, e più precisamente uno per la geometria e uno per l'aritmetica e l'algebra.
In geometria il punto di partenza sono degli oggetti concreti a cui lo studente fa riferimento (forme concrete quadrate o triangolari reali, disegni di figure geometriche etc.), prima di passare a quelli che gli autori chiamano "oggetti platonici" (Tall, 2013, p. 8), cioè oggetti astratti che sono caratterizzati solo tramite le loro proprietà. Nel caso dell'aritmetica, invece, il primo approccio è quello tramite l'astrazione dalle azioni (operazioni con i numeri etc.). Notiamo che questi due percorsi (in geometria e in aritmetica) possono apparire come molto diversi nel corso della loro evoluzione storica, ma dal punto di vista della matematica moderna tali differenze non sono più così evidenti.
Entrambi i percorsi sfociano poi, secondo questa teoria, con il procedere dell'apprendimento, ma probabilmente solo a livello universitario, in concezioni di oggetti assiomatici.

hanno la caratteristica di essere dati tramite descrizioni delle proprietà riconosciute degli oggetti, delle loro relazioni con altri oggetti e tramite ciò che con essi è possibile fare. Il passaggio dagli *defined objects* agli *axiomatic objects* è dato da un processo di astrazione dalle descrizioni delle loro proprietà. Gli *oggetti assiomatici* sono oggetti le cui proprietà sono esclusivamente quelle dimostrabili nel sistema assiomatico in cui sono inseriti come oggetti formali. Infine, l'oggetto come *procept* costituisce un passaggio necessario, secondo gli autori, nel percorso che va dagli oggetti percepiti a quelli assiomatici.
Come già sottolineato, le definizioni di oggetto percepito, oggetto come *procept* e oggetto assiomatico, si basano sull'idea di incapsulamento e di oggetto dell'APOS Theory e sulle idee iniziali di Sfard (principalmente Sfard, 1991), ma ciò che da esse emerge è sostanzialmente una gradazione in livelli di sofisticazione e astrazione delle costruzioni mentali degli studenti, in linea con gli stadi evolutivi di Piaget e con i livelli proposti da Van Hiele (1986), che rappresentano uno dei riferimenti teorici principali per Tall, non solo in riferimento alla geometria (Tall, 2013).
D'altro canto, notiamo che l'APOS non può essere considerata una *grand theory*, nella quale è necessario assumere posizioni epistemologiche e filosofiche di fondo, ma si configura come una *middle range theory* nel senso di Assude, Boero, Herbst, Lerman e Radford (2008). Si tratta di una teoria che si basa su raffinamenti successivi del modo di conoscere del ricercatore stesso e della ricerca di conferme o smentite di tali modalità tramite la raccolta di dati sperimentali, in riferimento all'apprendimento o alla conoscenza di singoli oggetti matematici. La motivazione principale nella sua evoluzione è data, secondo Dubinsky e McDonald, dall'intenzione di estendere il lavoro di Piaget sull'astrazione riflettente dei bambini all'apprendimento "adulto", cioè anche nell'ambito della matematica universitaria:

> The ideas arise from our attempts to extend to the level of collegiate mathematics learning the work of J. Piaget on reflective abstraction in children's learning. (…) We will argue that this theoretical perspective possesses, at least to some extent, the characteristics listed above and, moreover, has been very useful in attempting to understand students' learning of a broad range of topics in calculus, abstract algebra, statistics, discrete mathematics, and other areas of undergraduate mathematics. (Dubinsky & McDonald, 2001, p. 274)

Infatti, come già sottolineato, l'APOS Theory si colloca nella corrente costruttivista che funge per essa da *grand theory*.
In questo senso ci sembra di poter affermare che la forza maggiore dell'APOS Theory sia il suo ruolo come strumento d'analisi e predizione e meno come teoria che inquadra la natura ontologica degli oggetti matematici.
D'altro canto non ci sembra di poter considerare nemmeno le definizioni di *oggetto percepito*, *procept* e *oggetto assiomatico* come basi per una discussione ontologica in didattica della matematica poiché ciò che esse forniscono non sono informazioni su che cosa si debba intendere per oggetto matematico in didattica

della matematica, ma su come un soggetto percepisce mentalmente ciò che apprende.
Tuttavia riteniamo di poter esaminare le due impostazioni nel loro complesso in riferimento ai criteri da noi evidenziati come caratterizzanti per un'ontologia in didattica della matematica.

### *Discussione in riferimento alle domande (1')-(7')*

Riguardo alla corrispondenza della definizione di oggetto matematico nel senso dell'APOS Theory, comprese le articolazioni nelle varie tipologie di oggetto evidenziate da Tall et al. (2000), ai criteri evidenziati all'inizio del presente capitolo, possiamo affermare quanto segue.
La dimensione istituzionale della didattica della matematica e quella della matematica sono contemplate entrambe, ma non vi è una chiara distinzione tra esse. Si potrebbe dire che gli oggetti matematici della matematica istituzionalmente riconosciuta fungono da background dal quale il ricercatore in didattica della matematica trae il riferimento per la progettazione del "percorso didattico" nell'apprendimento, ma si tratta, come già evidenziato in riferimento alla decomposizione (Dubinsky, 1991), della conoscenza personale del ricercatore piuttosto che di una conoscenza oggettiva istituzionalmente riconosciuta, almeno non in maniera esplicita. La componente ontologica legata alla matematica come disciplina è presente implicitamente sotto forma di limite verso il quale tende l'oggetto mentale di colui che è impegnato nella sua costruzione.
La terna (*perceived object – procept – axiomatic object*) costituisce un modello interpretativo del primo ordine articolato in stadi in accordo con le idee di base di Piaget e soprattutto di Van Hiele. Questo modello interpretativo è però un modello interpretativo delle *modalità* generali con cui un soggetto percepisce ed elabora mentalmente la conoscenza matematica piuttosto che un modello interpretativo delle *conoscenze* matematiche stesse. Infatti, si tratta più che altro di categorie percettive che di modelli interpretativi di contenuti matematici.
Anche in questo caso, come nei precedenti, non è presente la dimensione relativa a un modello interpretativo del secondo ordine.
La prima definizione/caratterizzazione di oggetto matematico riportata all'inizio del paragrafo (quella tratta dall'APOS Theory) tiene conto della dinamicità degli oggetti matematici. Infatti, in essa è considerata un'evoluzione nel tempo delle conoscenze acquisite, attraverso il concetto di processo, oltre alla dimensione statica, considerata attraverso il concetto di incapsulamento. L'idea di un'ontologia transitoria è presente tramite il concetto di *procept*. In questo senso possiamo notare come secondo Dubinsky e McDonald (2001) la concettualizzazione si presenta in realtà come un'iterazione della sequenza azione-processo-oggetto-schema in senso dialettico piuttosto che come un processo lineare: "In other words, the construction of these various conceptions of a

particular mathematical idea is more of a dialectic than a linear sequence" (Dubinsky & McDonald, 2001, p. 276). Dal punto di vista ontologico questo aspetto non ci sembra realizzabile se non attraverso la presa in considerazione implicita di un'ontologia transitoria.
Per quanto riguarda la possibilità di inquadrare tecnicamente la modalità relazionale con la quale si formano i complessi concettuali che costituiscono gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica, non è possibile affermare che essa sia contemplata in questo contesto, in quanto in esso non si tiene conto della dimensione relativa a tali oggetti ed esso non dispone di strumenti tecnici che potrebbero essere eventualmente estesi in questo senso.
Le rappresentazioni semiotiche non hanno un ruolo centrale nell'ambito costruttivista, in quanto l'attività matematica non è considerata come un'attività semiotica in tale approccio, essendo essa prima di tutto un'attività mentale dell'individuo. Dunque, anche nel momento in cui in questo contesto si parla del ruolo del simbolo nel *procept*, il simbolo è considerato come un elemento ausiliario, un supporto per il pensiero, ma non come costituente il pensiero stesso.
In quanto collocate all'interno di un approccio costruttivista, si tratta di definizioni/caratterizzazioni di natura pragmatica e certamente non realista. In questo contesto il significato è soggettivo e ancorato all'esperienza mentale del soggetto.
Infine, le definizioni/caratterizzazioni esaminate non possono essere considerate assolutamente generali, sulla base di due considerazioni: prima, in quanto in realtà non definiscono che cosa si debba intendere per oggetto matematico, non avendo delle aspirazioni di natura ontologica; e poi in quanto esse richiedono l'adozione di un punto di vista costruttivista riguardo all'apprendimento, non necessariamente condiviso da altre correnti in didattica della matematica.

## 8. 4. Sintesi

Nel presente capitolo abbiamo esaminato sette definizioni di oggetto matematico fornite in didattica della matematica sulla base dei criteri evidenziati nel paragrafo 8.2. Il quadro generale che emerge del confronto tra le definizioni che abbiamo discusso è riassunto nella Tabella 6.
Per rendere più dettagliato il quadro risultante del confronto tra le definizioni esaminate abbiamo suddiviso alcuni criteri in sottocriteri, come per esempio: il criterio relativo alla domanda (2') è suddiviso in *dinamicità* (riconducibile alla presa in considerazione di aspetti legati ai processi e agli oggetti) e *ontologia transitoria*, mentre il criterio relativo alla domanda (3') considera anche la possibilità che la definizione possa tenere conto solo di uno dei due ordini di modello interpretativo.

| | Dinamicità | | Considerazione di oggetti matematici istituzionali distinti in matematica e in ddm | Presenza dell' idea di modello del 1° e 2° ordine | | Assoluta generalità | Strumento tecnico per relazionalità complessi concettuali | Riferimento ad aspetti semiotici | Significato | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Evoluzione nel tempo | Ontologia transitoria | | 1° ordine | 2° ordine | | | | Pragmatico | Realista |
| **Definizione 1**<br>[Un oggetto matematico è] un emergente da un sistema di prassi dove sono manipolati oggetti materiali che si scompongono in differenti registri semiotici: registro orale, delle parole o delle espressioni pronunciate; registro gestuale; dominio delle iscrizioni, ovvero ciò che si scrive o si disegna (grafici, formule, calcoli eccetera), vale a dire, registro della scrittura"; essendo il "praxema" un oggetto materiale legato alla prassi, l'oggetto è allora un "emergente da un sistema di praxema (Chevallard, 1991, p. 8). | x impl. | | | x | | | | x | x | |
| **Definizione 2**<br>(…) Gli oggetti matematici sono dunque simboli di unità culturali che emergono da un sistema di utilizzazioni che caratterizzano le pragmatiche umane (o, almeno, di gruppi omogenei di individui) e che si modificano continuamente nel tempo, anche a seconda dei bisogni (D'Amore, 2001, pp. 15–16). | x | x<br>. | | | | | | x | x | |
| **Definizione 3**<br>(…) mathematical objects are fixed patterns of reflexive human activity encrusted in the ever changing world of social practice mediated by artifacts (Radford, 2008a, pp. 221–222). | x | x impl. | | | | | | x | x | |
| **Definizione 4**<br>l'objet mathématique est l'invariant d'une multiplicité possible de représentations sémiotiques (Duval, 2009, p. 105). | x impl. | x impl. | | | | | x impl. | x | x | x |
| **Definizione 5**<br>(…) tutto ciò che è indicato, segnalato, nominato quando si costruisce, si comunica o si apprende in matematica (…) (Godino, 2002). Cualquier entidad material o inmaterial que interviene en la práctica matemática, apoyando y regulando su realización. (…) Los símbolos, las representaciones externas y manipulativos están implicados en la actividad matemática escolar y profesional, por tanto, se consideran objetos matemáticos, en el sentido de que intervienen en las prácticas matemáticas (Godino, Batanero, & Font, 2020, p. 6–7). | x | x | | x | | | x impl. | x | x | |
| **Definizione 6**<br>(…) the signifier itself, together with all its possible mathematical object realizations, could be viewed as a new mathematical object (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019, p. 164). | x | x | x impl. | x | | | x impl. | x | x | |
| **Definizione 7**<br>An *object* is constructed from a process when the individual becomes aware of the process as a totality and realizes that transformations can act on it (Dubinsky & McDonald, 2001).<br>(…) three types of object construction, each of which operates in an increasingly sophisticated manner: (1) perceived objects (2) procepts, and (3) axiomatic objects (Tall, Thomas, Davis, Gray, & Simpson, 2000, p. 19). | x | x | | x | | | | | x | |

Tabella 6. La corrispondenza delle sette definizioni di oggetto matematico esaminate nel presente capitolo ai criteri riferiti alla definizione di oggetto didattico specifico della didattica della matematica.[133]

I dati riassunti nella Tabella 6 mostrano che nessuna delle definizioni esaminate soddisfa tutti i criteri da noi stabiliti come criteri per una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica. Una caratteristica che contraddistingue tutte le definizioni esaminate è il fatto che esse sono formulate come definizioni generali di oggetto matematico, cioè intese come validi indipendentemente dal fatto che si prenda in considerazione la matematica o la didattica della matematica come riferimento.
Alcune definizioni soddisfano un numero maggiore di criteri rispetto ad altre, il che non significa naturalmente che esse siano "migliori", ma semplicemente che corrispondono di più ai criteri che sono d'interesse per la presente ricerca. Per esempio, possiamo notare che la definizione di oggetto matematico fornita nell'ambito della *Commognition* (Definizione 6) soddisfa il maggior numero di criteri ed è l'unica a tenere conto, anche se solo implicitamente, di una distinzione tra oggetti della matematica e oggetti della didattica della matematica (si pensi alla distinzione tra routine di chi apprende e routine degli esperti).[134] Nel caso della definizione nell'ambito dell'EOS, abbiamo evidenziato il fatto che in tale approccio viene usata una terminologia specifica che fa pensare che siano presi in considerazione oggetti diversi in matematica e in didattica della matematica, ma che la definizione fornita (Definizione 5) accomuna espressamente gli oggetti matematici e gli oggetti matematici della didattica della matematica, il che non ci consente di trarre conclusioni diverse riguardo a questo aspetto.
Il fatto che in generale in nessuna delle definizioni si distingua esplicitamente tra queste due tipologie di oggetti induce a pensare che nel momento in cui in didattica della matematica si fornisce una definizione di oggetto matematico, essa è presentata come una definizione di oggetto matematico *tout court*, anche se nasce in seno alla didattica della matematica.
Per sei definizioni su sette l'aspetto semiotico è fondamentale, mentre per una di esse esso è secondario.
In quattro definizioni su sette è preso in considerazione, almeno implicitamente, il fatto che gli oggetti della didattica della matematica si presentano come dei modelli interpretativi del primo ordine. In alcuni casi questo si evince direttamente dalle definizioni, altre volte è necessario esaminare il contesto in cui si colloca la

[133] Nella tabella, "impl." indica che la caratteristica in questione non è esplicitamente presente né nella definizione né nel suo contesto, ma che risulta da un'interpretazione che è stata esposta e motivata nella parte del testo dedicato alla definizione in questione. Inoltre, l'abbreviazione "ddm" sta per didattica della matematica.

[134] Nello stesso tempo possiamo notare che questa definizione è forse quella che meno di tutte assomiglia a una definizione in senso classico, in quanto non dice che cos'è di per sé l'oggetto, ma rinvia per il suo significato a una relazione semantica tra due elementi: l'oggetto è una certa "cosa" (il *signifier*) insieme a un'altra "cosa" (tutti gli oggetti concreti che emergono durante il suo uso). Tale relazione sembra tuttavia essere più simile a una relazione di causa-effetto, in cui è coinvolta una componente temporale, piuttosto che a una relazione di carattere logico in senso classico. Notiamo che si tratta però di una definizione perfettamente coerente con il significato inteso nel senso di Wittgenstein (1953/2003), come evidenziato in precedenza.

definizione. Per esempio, questo è il caso delle definizioni 5 e 6, dove la presenza di una dimensione relativa ai modelli del primo ordine è emersa solo dall'indagine sulla teoria di riferimento e non direttamente dalla definizione.
Nessuna delle definizioni tiene invece conto né esplicitamente né implicitamente di un modello interpretativo del secondo ordine. Questo tuttavia non sorprende, in quanto le teorie esaminate sono delle teorie che si focalizzano sull'*apprendimento* e non sull'*epistemologia* della didattica della matematica. Anche quando si tratta di *grand theories* (Assude, Boero, Herbst, Lerman, & Radford, 2008), le posizioni filosofiche ed epistemologiche sono riferite alla dimensione della didattica della matematica come prassi di ricerca legata all'analisi dei fenomeni di insegnamento-apprendimento in aula e mai alla dimensione dell'acquisizione di conoscenza in didattica della matematica come disciplina.
Un aspetto che abbiamo rilevato in alcuni contesti delle definizioni esaminate e che in alcuni casi è presente anche nel testo delle definizioni stesse, ma che non avevamo preso in considerazione finora, è l'aspetto legato alla natura sociale e culturale degli oggetti matematici. Esso era emerso nel paragrafo 7.4.4., quando abbiamo discusso l'approccio di Vygotskij ai concetti scientifici, ma non come un criterio fondamentale per altri approcci ai concetti da noi esaminati. Notiamo che la dimensione sociale e culturale degli oggetti matematici è esplicitamente presente nelle Definizioni 1, 2 e 3 ed è presente nel contesto della Definizioni 5 e 6, mentre è del tutto assente dalle Definizioni 4 e 7. Tuttavia è solo nella Definizione 3 che la dimensione socio-culturale è determinante per la definizione di oggetto matematico, nel senso che in questo contesto non è contemplata la possibilità che un oggetto matematico possa essere oggettivato all'infuori di un contesto socio-culturale.
Un altro aspetto comune a tutte le definizioni esaminate che non avevamo preso in considerazione finora è legato al fatto che tutte le definizioni sono espressamente definizioni epistemiche, nel senso che esprimono diverse modalità con cui gli oggetti matematici vengono creati, oggettivati o costruiti. Infatti, tali oggetti emergono dalle pratiche o dalle attività umane (Definizioni 1, 2 e 5) o vengono oggettivati attraverso le attività socialmente condivise (Definizione 3), oppure si manifestano come invarianti rispetto a trasformazioni semiotiche (Definizione 4) oppure vengono oggettivati come pattern che emergono dalle routine (Definizione 6) oppure ancora vengono costruiti per astrazione dagli oggetti concreti, attraverso i *procept*, arrivando agli oggetti assiomatici (Definizione 7).
Possiamo dunque aggiungere questa caratteristica, cioè il fatto di essere delle definizioni epistemiche, come una delle caratteristiche trasversali alle definizioni di oggetto matematico esaminati.
I risultati del confronto tra le definizioni effettuato in questo capitolo (sia quelli riassunti nella Tabella 6 sia quelli emersi dalle considerazioni aggiuntive riguardo al significato, alla dimensione socioculturale e al carattere epistemico) sono rappresentati tramite un diagramma a radar (Figura 29), il quale consente di

verificare in maniera più immediata con quale frequenza i singoli criteri o sottocriteri sono presi in considerazione nelle definizioni esaminate o nel contesto in cui esse si collocano.

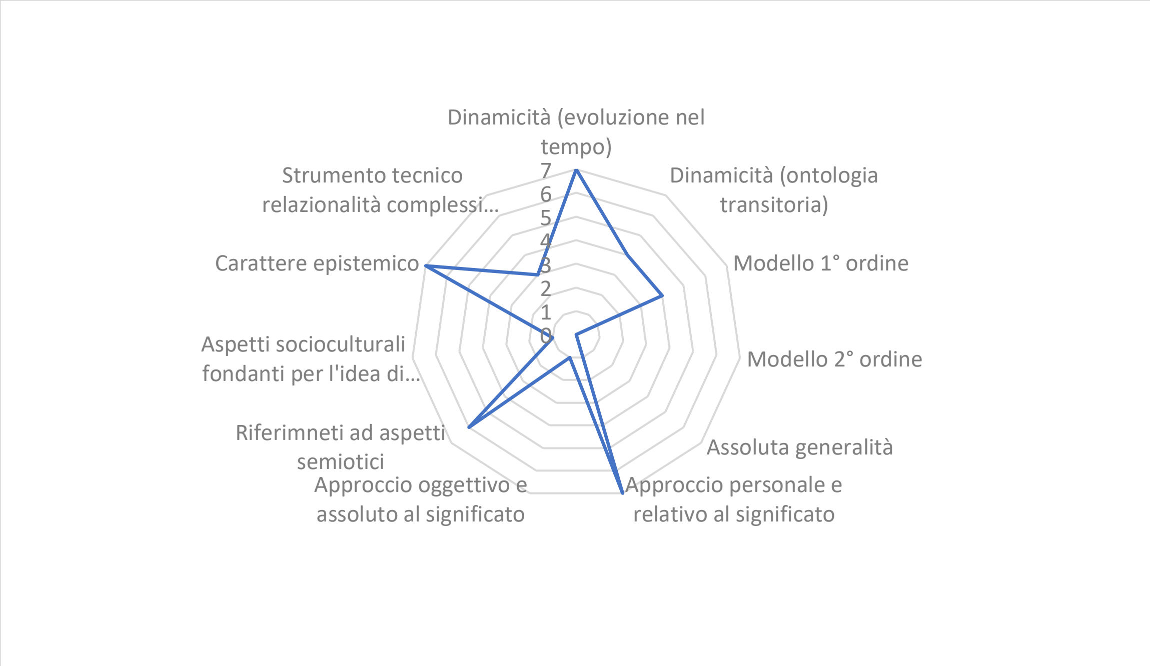



Figura 29. Frequenze con cui sono presenti i singoli criteri (o sottocriteri) nelle definizioni di oggetto matematico esaminate nel capitolo.

Notiamo per esempio che i tre criteri condivisi da tutte le definizioni sono: quello relativo alla dinamicità degli oggetti matematici, quello relativo alla posizione pragmatica nei confronti del significato degli oggetti matematici e quello relativo alla natura epistemica delle definizioni. Queste caratteristiche possono essere considerate come delle caratteristiche che emergono "per astrazione" dalle definizioni esaminate. Inoltre, la considerazione degli aspetti semiotici è presente in sei definizioni su sette, mentre non è determinate per una su sette.
Nessuna delle sette definizioni dispone di uno strumento tecnico che possa tenere conto della caratteristica relazionale dei complessi concettuali, ma il contesto in cui sono inserite tre di esse dispone di strumenti che potenzialmente tengono conto di aspetti relazionali, di cui due di strumenti tecnici (trasformazioni semiotiche di trattamento e conversione e funzione semiotica, nelle Definizioni 4 e 6, rispettivamente) e una di uno strumento concettuale (*boundary object*) (Definizione 6).

Solo una delle sette definizioni, la Definizione 4, tiene invece conto, almeno implicitamente, di entrambe le posizioni sul significato degli oggetti: pragmatico o realista.
Le caratteristiche completamente assenti dalle definizioni sono quella relativa alla considerazione di un modello del secondo ordine e quella relativa all'assoluta generalità. Della prima di esse abbiamo già detto in precedenza, sottolineando che la sua mancata presa in considerazione è naturale, in quanto tutte le definizioni esaminate fanno riferimento a teorie o approcci all'apprendimento e non all'epistemologia della didattica della matematica. Anche la constatazione della mancata considerazione della seconda caratteristica non sorprende, dato che le teorie dell'apprendimento su cui si fondano le singole definizioni si differenziano soprattutto in base delle diverse epistemologie dell'apprendimento considerate.
Un altro aspetto interessante è che la caratteristica della dinamicità degli oggetti matematici sembra essere una costante nel corso della storia della didattica della matematica poiché è presente nelle definizioni che si riferiscono a un arco temporale che si estende per 30 anni, dall'inizio degli anni '90 del XX secolo (Definizione 1) fino a oggi (Definizione 6) e che la necessità di una presa in considerazione di un'ontologia transitoria emerge già chiaramente all'inizio del nuovo secolo (Definizione 2) ("*si modificano* continuamente nel tempo"). Questa transitorietà degli oggetti matematici è ribadita anche nella Definizione 3 ("*ever changing* world"), nella quale emergono anche chiaramente gli aspetti statici ("*fixed* patterns") e dinamici ("world of human *activities*") degli oggetti matematici.
Anche se gli elementi esaminati non sono sufficienti per poter trarre conclusioni in questo senso, questi ultimi aspetti suggeriscono che l'aspetto dinamico degli oggetti matematici sia una caratteristica intrinseca degli oggetti matematici che emerge dalle esigenze specifiche della didattica della matematica.

## 8. 5. Conclusioni

Il presente capitolo ci ha permesso di esaminare in dettaglio le modalità con cui si definiscono gli oggetti matematici in didattica della matematica. A tale scopo abbiamo confrontato sette definizioni, immergendole nel loro contesto, e ricorrendo ai criteri tratti dalle domande (1')-(5'), puntualizzati e circoscritti sulla base delle analisi fatte nei precedenti capitoli. Abbiamo inoltre aggiunto due ulteriori criteri emersi come significativi dall'esame degli approcci ai concetti in didattica della matematica eseguito nel capitolo 7: la considerazione degli aspetti semiotici (domanda 6') e la considerazione del significato in senso pragmatico o realista (domanda 7'). Abbiamo potuto rilevare che alcuni dei criteri esaminati, soprattutto quelli relativi alla dinamicità e alla transitorietà, sono criteri trasversali per gli oggetti matematici definiti in didattica della matematica e che anche la

considerazione degli aspetti semiotici sembra essere una caratteristica ampiamente condivisa dai diversi approcci e teorie in cui sono fornite le definizioni esaminate. Dalla nostra analisi sono emersi ulteriori criteri, non presi in considerazione precedentemente, di cui due, quello relativo al significato pragmatico degli oggetti matematici e quello relativo alla natura epistemica delle definizioni, si sono rivelati come trasversali per tutte le definizioni.
Abbiamo inoltre notato che un ulteriore criterio, emerso solo in questo capitolo, attraverso l'analisi delle definizioni, e riferito alla natura socioculturale degli oggetti matematici, è presente in alcune definizioni ed è fondante per una di esse, mentre è completamente assente in due definizioni su sette.
Questa analisi ci ha permesso di circoscrivere con maggiore chiarezza le caratteristiche della definizione che stiamo cercando, la quale dovrà tenere conto di un numero più ampio possibile di aspetti caratterizzanti gli oggetti matematici nelle diverse teorie ed approcci in didattica della matematica.
Dato che uno degli aspetti che abbiamo evidenziato come fondamentale per la definizione che stiamo cercando di fornire è quello legato al rapporto tra oggetti matematici della matematica e oggetti matematici specifici della didattica della matematica, è ora importante verificare se e in quale misura le caratteristiche degli oggetti matematici esaminati in questo capitolo che concernono gli oggetti matematici della matematica come disciplina possono trovare una corrispondenza nelle definizioni di oggetto matematico che si incontrano in matematica. Infatti, se vogliamo gettare luce sulle relazioni tra gli oggetti matematici della matematica come disciplina e gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica, dobbiamo verificare in che modo questi vengono definiti nei rispettivi domini disciplinari.
Per cercare una risposta alla domanda su come viene affrontata la questione ontologica in matematica, dobbiamo rivolgerci alla filosofia della matematica, all'interno della quale trovano spazio le questioni relative alle problematiche ontologiche in matematica e quindi anche le questioni relative alle definizioni degli oggetti matematici.
Nel prossimo capitolo esamineremo dunque la questione ontologica in riferimento agli oggetti matematici in filosofia della matematica, facendo riferimento ai criteri che concernono direttamente gli oggetti matematici della matematica.

# 9. Oggetti in filosofia della matematica

## 9. 1. Riflessioni preliminari

Dall'indagine svolta nel capitolo precedente abbiamo potuto notare che quasi tutte le definizioni di oggetto matematico in didattica della matematica non tengono conto degli aspetti ontologici specifici della didattica della matematica e in ogni caso non chiariscono la relazione tra gli oggetti matematici nelle due discipline in questione. In questo senso tali definizioni sembrano essere intese come delle definizioni *generali* di oggetto matematico, cioè tali da poter essere considerate valide sia in matematica sia in didattica della matematica.
Nel presente capitolo vogliamo esaminare gli approcci ontologici dal punto di vista della matematica. La branca della matematica che si occupa dell'aspetto ontologico, e quindi degli oggetti della matematica, è la filosofia della matematica. Dato che come in didattica della matematica, così anche in filosofia della matematica non esiste un unico approccio agli oggetti matematici, questo capitolo fornirà solo una panoramica sugli approcci più importanti.
Partiremo dalle tradizionali scuole fondazionaliste per arrivare ad alcuni approcci più recenti, le cui assunzioni di base si ripercuotono direttamente sulle ricerche in didattica della matematica, al fine di verificare la loro compatibilità con i criteri emersi come caratterizzanti per una definizione di oggetto matematico evidenziate nei precedenti capitoli e che possono essere riferiti direttamente agli oggetti matematici della matematica come disciplina.

## 9. 2. Questioni metodologiche

Nel presente capitolo esamineremo se e in quale misura gli approcci agli oggetti in (filosofia della) matematica tengono conto delle caratteristiche che concernono loro tra quelle evidenziate nel paragrafo 8.2., dove le domande (1'), (2'), (3'), (4') e (5') sono delle riformulazioni in alcuni casi più circoscritte dei criteri (1), (2), (3) (4) e (5) esposti nel paragrafo 7.2., mentre le domande (6') e (7') sono emerse sulla base dell'analisi eseguita nel capitolo 7 che ha consentito di individuare due ulteriori caratteristiche riguardo alle quali esaminare le definizioni di oggetto matematico proposta nel capitolo 8.
Le caratteristiche che possono essere collegate agli oggetti matematici si riferiscono ai seguenti criteri:

- la presa in carico della dinamicità, nel senso della presenza di un riferimento a un'evoluzione temporale degli oggetti, ma anche di una loro staticità, se non è possibile fare riferimento a una definizione esplicita di oggetto, nonché la

presenza di un’ontologia transitoria, nel senso della considerazione di oggetti matematici che si modificano nel tempo [domanda (1’)];
- la presa in carico del ruolo della semiotica nell’attività matematica [domanda (5’)];
- la considerazione della natura pragmatica del significato degli oggetti matematici [domanda (6’)].

La prima e la terza caratteristica sono infatti risultate essere caratteristiche comuni a tutte le definizioni esaminate nel capitolo 8, mentre la seconda è comune a sei definizioni su sette e non risulta in conflitto con la settima.
Un’altra caratteristica che è emersa dall’analisi delle definizioni nel capitolo precedente e che riteniamo opportuno prendere in considerazione durante l’analisi degli approcci agli oggetti in matematica è la caratteristica relativa alla presenza di una dimensione epistemica.
Quest’ultima caratteristica esprime la necessità di considerare oltre all’aspetto ontologico, anche l’aspetto epistemologico nelle definizioni. Infatti, abbiamo potuto notare che questa è una caratteristica intrinseca delle definizioni esaminate nel precedente capitolo. Dato che tali definizioni sembrano essere considerate generali, cioè valide sia per gli oggetti matematici in matematica come disciplina sia per gli oggetti matematici della didattica della matematica come disciplina, ci dovremmo aspettare che questa caratteristica degli oggetti matematici emerga anche dall’analisi degli approcci ontologici nelle varie correnti in filosofia della matematica. Oppure questa caratteristica potrebbe essere utile per individuare gli approcci in filosofia della matematica che sono compatibili con la natura delle definizioni di oggetto matematico in didattica della matematica.
Anche in questo capitolo, come in quello precedente, faremo ricorso alla strategia del confronto tra teorie, cioè al *comparing theories* (si veda il paragrafo 4.3.), i cui risultati verranno riportati nel paragrafo 9.4. riferito alla sintesi di questo capitolo.
A differenza del capitolo precedente, non faremo riferimento a delle definizioni di oggetto matematico nei vari approcci, dato che di solito più che fornire una definizione esplicita di oggetto matematico, in filosofia della matematica si parla più in generale della “questione ontologica”. Esporremo quindi le caratteristiche dei vari approcci e cercheremo di esaminare le loro posizioni ontologiche, confrontandole con le caratteristiche evidenziate in questo paragrafo.
Alla fine del capitolo confronteremo tra loro le posizioni ontologiche emerse, cercando di caratterizzare l’ontologia più in linea con le caratteristiche evidenziate per una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica e quindi più compatibili con essa.

## 9. 3. Analisi

### 9. 3. 1. Oggetti matematici e sistemi assiomatici

Forse la prima idea opportunamente documentata di oggetto matematico deve essere fatta risalire agli *Elementi* di Euclide e più precisamente agli enti geometrici di cui Euclide dà una descrizione all'inizio del libro I della sua opera. Il ruolo della definizione negli *Elementi* è quello di descrivere in maniera il più possibile formale[135] gli enti fondamentali, ritenuti esistenti di per sé: oggetti considerati reali anche se non direttamente accessibili ai sensi.
La base delle concezioni ontologiche euclidee è chiaramente quella della filosofia platonica, nella quale gli oggetti matematici appartengono a una realtà metafisica, il cosiddetto *Iperuranio*. Platone, a sua volta, è fortemente influenzato dalla dialettica della scuola eleatica, in cui si contrappongono l'Essere parmenideo, eterno, unitario, raggiungibile solo attraverso il *logos* inteso come ragionamento logico, e il non-Essere, il mondo dell'esperienza sensibile, a cui non viene riconosciuto alcun valore epistemologico (Diels, 1903/1906).
L'esigenza di una diversa definizione di oggetto matematico nasce a partire dalla graduale "liberazione della matematica dalle sue ragioni fisiche"[136] che si rese necessaria principalmente a partire dall'ingresso nel campo della matematica del calcolo infinitesimale, i cui oggetti richiedevano definizioni puramente matematiche [si pensi per esempio al concetto di funzione, agli infinitesimi etc. (Lolli, 1988)], nonché alla teorizzazione delle geometrie non-euclidee, che minò alla base l'idea della necessità intuitiva degli assiomi come fondamento delle teorie matematiche.
Dal punto di vista filosofico, ciò che veniva messo in discussione da questi avvenimenti era primariamente la classificazione delle "verità" matematiche come giudizi a-priori, nel senso dato a tale termine da Kant (1781/1998, pp. 63–69).[137] Dato che per Kant le due intuizioni pure (nel senso di *primarie*) su cui si basa la conoscenza dell'essere umano sono le intuizioni di spazio e tempo, e la geometria (euclidea) corrisponde alla nostra intuizione primaria di spazio, la presa di coscienza dell'esistenza di geometrie diverse da quest'ultima minava fortemente la fiducia nelle basi che tale modello filosofico potesse fornire alla matematica.[138]

[135] Quel che verrà denominato nella Scolastica: *definitio fit per genus proximum et differentiam specificam*.
[136] Parafrasiamo qui il titolo del libro *Le ragioni fisiche delle dimostrazioni matematiche* di G. Lolli (1985).
[137] Ricordiamo che per Kant (1781/1998) i giudizi possono essere suddivisi in analitici *a-priori* e sintetici *a-priori* o *a-posteriori*. In questo contesto i concetti matematici vengono classificati come sintetici a-priori: sintetici perché estensivi della conoscenza e a-priori perché universali, necessari e indipendenti dall'esperienza sensibile.
[138] Facciamo notare che nel sistema assiomatico moderno non solo gli assiomi sono formali e non si basano sull'intuizione, ma anche gli oggetti sono definiti in maniera implicita, cioè attraverso le relazioni tra gli assiomi e non necessariamente sempre per genere prossimo e differenza specifica (e nemmeno per astrazione), come ciò avviene per la maggior parte degli enti geometrici non primari nel sistema assiomatico euclideo. Lolli sottolinea che la natura del metodo assiomatico moderno può essere compresa solo se si tiene conto dell'inscindibilità del carattere logico delle

La messa in discussione della natura aprioristica dei giudizi matematici in filosofia è dunque prodotta dalla necessità interna alla matematica di fornire definizioni indipendenti da intuizioni a-priori. Tale necessità portò alla nascita del metodo assiomatico moderno, nel quale gli oggetti matematici sono "reali" in quanto definiti tramite reciproche relazioni. Non vi è, in questa concezione di oggetto matematico, necessità (e nemmeno possibilità) di un riferimento a una realtà fisica o metafisica (Asenova, 2019).
Pur caratterizzando due momenti epistemologicamente fondamentali per la presente trattazione, il passo da noi compiuto dall'idea di oggetto matematico all'interno del metodo assiomatico euclideo a quella relativa al metodo assiomatico moderno è in realtà un po' troppo lungo e nasconde alcuni passaggi importanti della discussione intorno ai fondamenti della matematica. Infatti, la messa in discussione della possibilità di porre la percezione fisica alla base della matematica poneva con urgenza la questione dell'affidabilità dei risultati matematici, esigendo una fondazione della disciplina su basi indiscutibili.
Facciamo dunque un passo indietro ed esaminiamo brevemente questi aspetti poiché essi chiamano in causa importanti questioni ontologiche.

### 9. 3. 2 Tentativi di fondare la matematica

Riguardo alle cause che hanno spinto i matematici a interrogarsi sulle questioni fondazionali abbiamo già detto in precedenza: principalmente la nascita della matematica pura, che richiedeva definizioni puramente matematiche degli oggetti, nonché la nascita delle geometrie non euclidee, che mostrarono l'inadeguatezza degli assiomi che si basano sulla percezione a fungere da base per le teorie matematiche. La questione di fondo che si trattava di risolvere verso la fine del XIX secolo può essere riassunta come segue:

> I matematici sapevano definire in modo formalmente impeccabile $\mathbb{Z}$ a partire da $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ a partire da $\mathbb{Z}$, in entrambi i casi ricorrendo a relazioni binarie di equivalenza opportune che non aumentano le cardinalità, come richiesto dal lavoro di Cantor, (…) dato che $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \mathbf{n}$; (…) sapevano costruire in vari modi rigorosi $\mathbb{R}$ a partire da $\mathbb{Q}$, questa volta aumentando la cardinalità, dunque passando da $\mathbf{n}$ a $\mathbf{c}$, dato che $\mathbf{n} < \mathbf{c} = |\mathbb{R}|$. Sapevano costruire i numeri complessi, il cui insieme chiamiamo $\mathbb{C}$, a partire da $\mathbb{R}$. (…) Ora è facile ampliare questo dominio dei numeri complessi a un altro che si può considerare la sua estensione algebrica, il corpo dei quaternioni (…) Passi da gigante, certo, strutture meravigliose, sì, ma … manca una fondazione

deduzioni, che si basa sull'aspetto formale delle relazioni tra gli assiomi, dal carattere implicito delle definizioni (Lolli, 1987).

> rigorosa condivisa di $\mathbb{N}$, la base di tutto; e dunque il gigante è ricoperto d'oro, ma ha la base vulnerabile.[139] (D'Amore & Sbaragli, 2020, pp. 260–261)

Nella metafora che vede la matematica come "gigante con i piedi d'argilla" (Arrigo, D'Amore, Sbaragli, 2020, p. 75),[140] i "piedi" rappresentano appunto la struttura dei numeri naturali. Trovare una definizione rigorosa e condivisa di tale struttura si presentava dunque all'epoca come una questione di primaria importanza per la salvaguardia dei risultati di tutta la matematica e la definizione dei numeri naturali divenne *la* questione ontologica per la matematica.
Il periodo in cui queste problematiche furono avvertite fortemente dalla maggior parte dei membri della comunità matematica è noto con il nome di "crisi dei fondamenti"; esso si protrasse dall'ultimo quarto del XIX secolo fino alla metà del XX.
Ai problemi che provocarono la crisi dei fondamenti furono elaborate diverse risposte da parte di tre correnti o scuole di pensiero: quella logicista, quella formalista e quella intuizionista. Di seguito caratterizzeremo brevemente le risposte fondazionali di queste scuole di pensiero con l'obiettivo primario di individuare, ove possibile, le loro basi ontologiche.

### 9. 3. 2. 1. La risposta fondazionale logicista

La corrente logicista è di solito ricondotta alle proposte fondazionali di Frege e alle successive rielaborazioni di Russell. La sua caratteristica principale è il tentativo della riduzione della matematica alla logica, dove per "riduzione" si intende il ricondurre un certo tipo di oggetti, in questo caso i numeri naturali, in quanto oggetti primi dell'aritmetica, a oggetti di un altro tipo, di natura logica (Lolli, 2005).
Nella proposta fregeana i numeri naturali sono visti come delle estensioni di concetti; tale estensione potrebbe essere identificata con la cardinalità dell'insieme degli oggetti che cadono sotto il rispettivo concetto.[141]
I concetti in questione sono costruiti logicamente a partire da un concetto $A$ la cui estensione ha la seguente caratteristica: $\forall x \in A, x \neq x$. Tale insieme è ovviamente vuoto e la sua cardinalità corrisponde al numero zero; l'insieme vuoto è dunque il concetto di numero 0. Il concetto di numero 1 ha l'estensione che corrisponde alla

---

[139] Nella citazione con "**n**" è indicata la cardinalità del numerabile, mentre con "**c**" è indicata la cardinalità del continuo.
[140] La metafora in questione, le cui origini si trovano nella Bibbia (Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2020, p. 75) viene usata spesso anche in economia, come fanno notare D'Amore e Sbaragli, per riferirsi alle economie di paesi come la Cina e la Russia, che sono molto aggressive e registrano spesso tassi di crescita molto alti, ma che poggiano su basi poco solide.
[141] A questo proposito si veda il paragrafo 7.3.2., nel quale abbiamo esaminato in dettaglio la relazione tra oggetto e concetto in Frege (1892a,b).

cardinalità dell'insieme che ha come unico elemento l'insieme vuoto. Il concetto di numero 2 ha l'estensione che corrisponde alla cardinalità dell'insieme che ha come elementi l'insieme vuoto e l'insieme la cui cardinalità corrisponde al numero 1 e così via (Frege, 1884/1988).

Frege fornisce quindi una vera e propria *definizione* di numero naturale, fondandola su dei concetti base della logica e della teoria (ingenua) degli insiemi; in questo senso il suo approccio è veramente riduzionista, ma è anche fondazionale poiché egli intende fornire una fondazione della matematica riducendola, attraverso l'aritmetica, alla logica.

Com'è ben noto, l'impresa logicista di Frege naufragò nello scontro con l'antinomia che Russell scoprì derivabile dal sistema logico costruito da Frege, proprio nel momento in cui l'opera di Frege veniva pubblicata.

L'antinomia in questione è un'antinomia logica ed è originata dalla mancata distinzione tra quelli che oggi chiamiamo "classi" e gli insiemi in senso stretto: un insieme è una collezione di oggetti che può a sua volta essere elemento di un insieme; una classe, invece, pur essendo anch'essa una collezione di oggetti, non può mai essere a sua volta elemento di un'altra collezione di oggetti.[142]

Il sistema logico costruito da Frege era dunque contraddittorio e tale contraddizione inficiava anche la definizione degli enti primitivi della matematica: i numeri naturali.

Pur avendo in un certo senso fatto naufragare il sogno di Frege, Russell era un convinto sostenitore della posizione logicista. L'impresa logicista proseguì nell'opera *Principia mathematica*, pubblicata tra il 1910 e il 1913, che Russell scrisse con Whitehead, e nella quale gli autori tentarono di fornire una soluzione logicista che evitasse le antinomie logiche come quella appena evidenziata. La loro idea di base consiste nel ricorso alla teoria dei tipi semplici, che distingue tra diversi tipi di concetti: concetti di tipo 0 (che sono quelli individuali, i quali possono fungere solo da soggetto ma mai da predicato in una proposizione), concetti di tipo 1 (che esprimono proprietà di oggetti individuali e che possono fungere sia da soggetto sia da predicato, ma con la condizione che nel secondo caso abbiano come soggetto un concetto di tipo 0 o di tipo 1); in maniera analoga

[142] Più in dettaglio l'antinomia consiste nel seguente problema. Dal punto di vista fregeano, un concetto è una proprietà e sulla base del principio di astrazione di Frege ogni proprietà determina in maniera univoca gli oggetti che la soddisfano (cioè il concetto determina in maniera univoca gli oggetti che cadono sotto esso). Dunque, è sempre possibile stabilire in maniera univoca se la proprietà "essere la classe di tutte e sole le classi che non contengono sé stesse come elemento" determina un insieme a cui appartiene la classe stessa (cioè che l'oggetto "classe di tutte e sole le classi che non contengono sé stesse come elemento" cade sotto il concetto "la classe di tutte e sole le classi che non contengono sé stesse come elemento"). Da un'ipotesi affermativa riguardo a tale proprietà segue che la classe non vi dovrebbe appartenere (poiché allora essa conterrebbe sé stessa come elemento), il che contraddice la proprietà caratteristica della classe in questione. Da un'ipotesi negativa segue che tale classe vi dovrebbe appartenere (poiché, non avendo sé stessa come elemento, essa soddisfa la proprietà caratteristica della classe in questione). Da quanto esposto si deduce la contraddizione che se la classe contiene sé stessa allora essa non contiene sé stessa e viceversa.

i concetti di tipo 2 esprimono proprietà di concetti di tipo 1 e possono fungere sia da soggetto sia da predicato, con la condizione, nel secondo caso, di avere come soggetto un concetto di tipo 0 o di tipo 1; e così via.
Quindi le antinomie logiche venivano evitate da Russell stabilendo che un dato concetto non può assumere il ruolo di predicato in una proposizione il cui soggetto è di tipo uguale o maggiore al tipo del concetto in questione (Russell, 1908).
Tornando alla questione fondazionale, Lolli (1996) nota che, in ogni caso, ridurre l'aritmetica alla logica non avrebbe in realtà rappresentato una vera (ri)fondazione della matematica, ma avrebbe più che altro messo in discussione la fondatezza dell'idea di *giudizio a priori* kantiano come caratteristica degli enunciati matematici. Si sarebbe trattato quindi della confutazione di una tesi filosofica che non avrebbe risolto il problema dal punto di vista matematico: la riduzione alla logica avrebbe spostato l'attenzione dall'aritmetica alla logica, ma avrebbe comunque richiesto l'accettazione intuitiva di alcune nozioni base della logica. Spostare l'intuizione dal piano sensibile (intuizione dello spazio) a quello logico (intuizione razionale) non avrebbe semplificato le cose dal punto di vista matematico, sottolinea Lolli, ma solo messo in evidenza il fatto che si stava supponendo che la facoltà logica sia "una facoltà o una competenza più evidentemente e uniformemente diffusa tra gli esseri umani, addirittura la loro caratteristica definitoria, e attraverso la riduzione alla logica la matematica sarebbe stata per così dire legittimata" (Lolli, 1996, pp. 8–9).
Come anche le altre due correnti fondazionali di cui parleremo di seguito, il formalismo e l'intuizionismo, il logicismo fu abbandonato nella sua forma pura. Già dall'opera di Russell e Whitehead divenne chiaro che, preso alla lettera, il logicismo era una soluzione improponibile poiché portava a dimostrazioni lunghissime ed estenuanti nell'esplicitazione dei vari passaggi, che facevano perdere il senso della dimostrazione stessa.
Un altro protagonista di quell'epoca che può essere annoverato tra gli esponenti della corrente logicista fu Peano. Non ci soffermiamo sull'assiomatizzazione da lui proposta per i numeri naturali, ben nota ai matematici,[143] ma evidenziamo solo un aspetto che riteniamo importante per la nostra trattazione: mentre Frege fornisce una definizione di numero, cioè dice che cos'*è* un numero (naturale), Peano non fornisce una tale definizione. Egli mostra come è possibile costruire $\mathbb{N}$ ma, come ben sappiamo oggi, grazie a Skolem (Skolem, 1933), l'assiomatizzazione di Peano in realtà è l'assiomatizzazione logica del concetto di successione, i cui elementi non sono necessariamente numeri naturali, dato che è impossibile caratterizzare in maniera univoca la successione dei naturali tramite un numero finito di assiomi.
Per la nostra trattazione, l'impostazione logicista ha l'importanza di mostrare in che senso in matematica si possa assumere una posizione realista, senza perciò

---

[143] All'Autore che fosse interessato all'argomento proposto in chiave rigorosa ma non eccessivamente tecnica, rinviamo a D'Amore, Asenova, Del Zozzo, Fandiño Pinilla, Iori, Nicosia, e Santi (2021).

aderire a una posizione ingenuamente platonica riguardo alla natura degli oggetti matematici. Un realismo logicista risolve infatti il problema epistemologico legato alla domanda gnoseologica, cioè legata alla conoscibilità degli oggetti matematici, in una prospettiva realista, senza perciò collocare tali oggetti in un mondo a-umano come l'Iperuranio platonico. Così, da un lato gli oggetti matematici primi (cioè i numeri) esistono poiché di essi si fornisce una definizione, ma nello stesso tempo essi possono essere conosciuti poiché sono riducibili a basi logiche intuitivamente accessibili.
Possiamo notare che in questa chiave di lettura dell'idea di "oggetto matematico" non è possibile individuare alcun cenno di dinamicità o di transitorietà. Tuttavia, se consideriamo l'idea di concetto come funzione (Frege, 1891) e la possibilità di composizione di funzioni proposizionali, è possibile introdurre una certa dinamicità nella posizione logicista di Frege, come già evidenziato nel paragrafo 7.3.2. Notiamo inoltre che la definizione degli oggetti matematici è fornita in un linguaggio logico-matematico e non discorsivo.
L'aspetto semiotico è fondamentale nell'approccio logicista di Frege, in quanto è in riferimento all'idea di *segno* (Zeichen) che egli definisce i concetti di senso e denotazione, identificando la denotazione con il significato. In questo senso la posizione fregeana riguardo al significato degli oggetti matematici è chiaramente una posizione realista e non pragmatica, in quanto il significato è ricondotto all'estensione insiemistica del concetto ed è dunque di natura oggettiva.
Dal punto di vista epistemico, gli oggetti matematici sono concetti logici e quindi sono costruibili attraverso passaggi logici, basati sull'estensione di insiemi; i teoremi sono deducibili dalle definizioni così fornite tramite regole logiche.

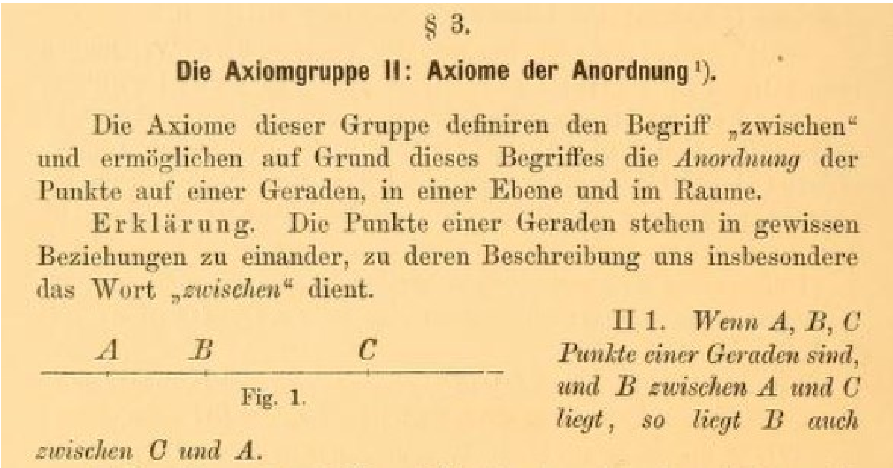
#### 9. 3. 2. 2. La risposta fondazionale formalista

La seconda corrente che nacque dalla crisi dei fondamenti della matematica fu quella formalista, il cui iniziatore e maggior esponente fu Hilbert. L'esempio più noto dell'impresa formalista è l'opera *Grundlagen der Geometrie* (Fondamenti della Geometria) (Hilbert, 1899/1903). Cercheremo di illustrare brevemente la proposta formalista facendo riferimento soprattutto a tale opera, tenendo presente che l'obiettivo formalista consisteva nel cercare di fondare la matematica sulla base di relazioni puramente formali tra gli assiomi delle teorie, a partire dalle quali sarebbe stato possibile garantire la deduzione logica formale, e quindi sicura e indiscutibile, dei risultati matematici. Tale esigenza nasceva, come già evidenziato, dalla necessità di un transito dal criterio di "verità" come criterio di validità di una teoria, al criterio di "coerenza", transito resosi necessario a causa dell'evoluzione della matematica nel corso degli ultimi due secoli.

L'opera di Hilbert appena citata, il cui scopo era quello di fornire basi solide e rigorose alla geometria, sfruttando il moderno metodo assiomatico a cui abbiamo fatto cenno all'inizio di questo capitolo, influenzò molto la matematica dell'epoca. Nell'opera in questione, Hilbert usa tre elementi, o oggetti di base, che fungono da termini primitivi e che egli chiama *punto*, *retta* e *piano*. L'Autore introduce anche sei relazioni (una ternaria, quattro binarie e una unaria): *essere tra*, *essere su*, *essere in*, *essere congruente a*, *essere parallelo a*, *essere continuo*. Le relazioni binarie e ternaria vengono definite tramite cinque gruppi di assiomi: 8 assiomi di incidenza, 4 di ordinamento, 5 di congruenza, 2 di continuità e 1 di parallelismo.
Non ci soffermeremo ulteriormente sulla descrizione dell'opera, ma vogliamo esaminare in che modo vengono introdotti o definiti gli oggetti della geometria, in quanto per la nostra trattazione questo è l'aspetto che riveste maggiore importanza. A tale proposito D'Amore & Sbaragli scrivono quanto segue: "punti, rette e piani non vengono definiti ma solo denominati, attraverso il ricorso all'*intuizione* (…) una loro reale definizione è quella successiva, che si ottiene grazie all'enunciazione dei postulati che definiscono le relazioni tra di essi" (D'Amore & Sbaragli, 2020, p. 307, enfasi nostra).
Parlando di "intuizione", D'Amore e Sbaragli si riferiscono al fatto che Hilbert, nel momento in cui introduce i concetti di punto, retta e piano, invita il lettore a "pensare" a tre sistemi di "cose", a cui egli dà il nome di punti, rette e piani.[144] Dunque, nonostante il formalismo sia noto soprattutto per il fatto di basarsi sulla forma e non sul significato, quindi sulla sintassi e non sulla semantica, Hilbert non rifugge dal ricorso a riferimenti intuitivi, anche se questi sono di altra natura rispetto alle intuizioni su cui si basava il sistema assiomatico euclideo.
Infatti, ci sono importanti differenze nel ricorso all'intuizione tra Hilbert ed Euclide: Hilbert non basa la definizione *degli oggetti primi* sull'intuizione (egli non fornisce proprio una tale definizione). Ciò che Hilbert basa sull'intuizione è *l'introduzione al* sistema di geometria che sta definendo. Euclide, invece, fa ricorso *all'intuizione sensibile per definire gli oggetti primi* della geometria, parlando del punto come di un ente che non ha parti, della retta come di un ente che ha lunghezza senza larghezza e del piano come di un ente che ha lunghezza e larghezza ma non spessore.
L'intuizione alla quale Hilbert non rinuncia completamente non è quindi, a nostro avviso, di ordine ontologico, come è in Euclide, e non è nemmeno di ordine logico, come invece è in Frege. L'intuizione in Hilbert è di natura *epistemologica*: infatti, il ricorso da parte di Hilbert a termini del tipo "pensiamo", "cose" o a formulazioni come "La superficie più semplice è il piano" o "La linea più semplice dopo la retta è la circonferenza" (D'Amore & Sbaragli, 2020, p. 306) sono esempi di intuizioni che servono per sostenere semanticamente l'esposizione, ma non si riferiscono a

[144] Infatti, com'è ben noto, i tre termini in questione (punto, retta e piano) potrebbero in realtà essere sostituiti da termini qualsiasi, dato che per essi non si presuppone alcun riferimento alle caratteristiche intuitive dei corrispondenti oggetti euclidei.

elementi costitutivi del sistema, né in termini ontologici né in termini di relazioni logiche, tanto meno semantiche.
Potremmo affermare che la parte intuiva del linguaggio appartiene a un metalinguaggio discorsivo, del quale il formalismo ha necessità per essere pensato e comunicato. Questo diventa chiaro anche dal fatto che Hilbert ricorre a disegni e *spiegazioni* (Erklärungen) nella definizione delle relazioni tramite i gruppi di assiomi, come per esempio nel caso della relazione ternaria "stare tra", che viene introdotta attraverso il gruppo degli assiomi di ordinamento (Figura 30).



§ 3.

**Die Axiomgruppe II: Axiome der Anordnung**[1]).

Die Axiome dieser Gruppe definiren den Begriff „zwischen" und ermöglichen auf Grund dieses Begriffes die *Anordnung* der Punkte auf einer Geraden, in einer Ebene und im Raume.

Erklärung. Die Punkte einer Geraden stehen in gewissen Beziehungen zu einander, zu deren Beschreibung uns insbesondere das Wort „*zwischen*" dient.



II 1. *Wenn A, B, C Punkte einer Geraden sind, und B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A.*

Figura 30. Immagine tratta da "Grundlagen der Geometrie", in cui è esplicitato il ricorso a una spiegazione (Erklärung) (Hilbert, 1899/1903, p. 6).

Nell'immagine si vede come Hilbert fa ricorso alla spiegazione (*Erklärung*) del fatto che "i punti di una retta stanno tra loro in una certa relazione per la cui descrizione è particolarmente utile il termine 'tra' [*zwischen*]" (Hilbert, 1899/1903, p. 6). Inoltre si può notare il ricorso a una rappresentazione grafica che illustra il senso del primo assioma del gruppo degli assiomi di ordinamento: "Se *A*, *B*, *C* sono punti di una retta e *B* sta tra *A* e *C* allora *B* sta anche tra *C* e *A*" (Hilbert, 1899/1903, p. 6).
Hilbert, oltre a proporre una rifondazione della geometria, propose anche una caratterizzazione fondamentale della logica matematica e contribuì alla distinzione tra matematica e metamatematica, evidenziando che quest'ultima non coincide con la logica, ma che la logica è di per sé una branca della matematica.
Per comprendere che cos'è la metamatematica per Hilbert, è necessario distinguere tra linguaggio oggetto e metalinguaggio e tra teoria e metateoria:

> In generale si chiama Universo *U* l'insieme degli "oggetti" di cui si parla mediante un certo linguaggio *L*, e si definisce teoria *T* proprio la struttura formata da *U* e da *L*: *T* = (*U*, *L*). Se *V* è un Universo il cui oggetto è *T*, e parliamo di *V* usando un linguaggio

> *L'*, avremo la metateoria *T'* = (*V*, *L'*) = (*T*, *L'*). Si noti che *L* è sempre diverso da *L'*, dato che le affermazioni di *L* fanno parte di un determinato linguaggio-oggetto mentre quelle di *L'* sono sempre parte di un meta-linguaggio. (D'Amore & Sbaragli, 2020, pp. 313–314)

Dunque, quando si formulano enunciati in una teoria matematica, si sta usando un linguaggio nel quale gli oggetti sono gli enunciati di tale teoria. Per esempio, l'enunciato *P*: "In un triangolo rettangolo la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti è uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa" è un oggetto della teoria *T* "Geometria euclidea" ed è espresso nel linguaggio *L* della teoria *T*. L'enunciato "*P* è un teorema" appartiene invece a una metateoria di *T*, cioè a *T'*, e il linguaggio in cui esso è espresso non è più il linguaggio in cui era espresso *P*, ma è un metalinguaggio *L'*. Ricordiamo però che per Hilbert la metateoria *T'* non è la logica, ma appunto la metamatematica. La distinzione tra linguaggio oggetto e metalinguaggio è particolarmente importante per evidenziare il fatto che l'assegnazione di valore di verità agli enunciati di una teoria non avviene nel linguaggio della teoria stessa, ma nel metalinguaggio (Lolli, 2015). Le componenti intuitive a cui Hilbert ricorre nella propria esposizione appartengono proprio a questo metalinguaggio.
Ma per comprendere bene la proposta formalista di Hilbert è necessario mettere in evidenza che cosa si deve intendere per sistema formale. Dal punto di vista più strettamente logico un sistema formale ha una grammatica, una sintassi e una semantica (D'Amore, 1974a). La grammatica è determinata da: (a) un *alfabeto*, composto da un insieme di segni con i quali è possibile comporre delle parole, e da un insieme finito di simboli, per mezzo dei quali è possibile combinare le parole in frasi che vengono chiamate *formule*; (b) un *linguaggio* definito su tale alfabeto. Sulla base delle regole grammaticali del linguaggio è possibile stabilire quali formule hanno senso in esso, definendo così l'insieme delle *formule ben formate* (*fbf*) del linguaggio. La sintassi consente di definire il concetto di dimostrazione ed è determinata dalla scelta di un insieme di assiomi tra le *fbf* e dall'introduzione di un insieme di regole di inferenza, attraverso le quali è possibile derivare, a partire dagli assiomi, in un numero finito di passi, formule che vengono chiamate *teoremi*. La semantica riguarda invece il significato degli enunciati del linguaggio formale e dal punto di vista logico è ridotto al loro valore di verità (vero/falso).[145]
Un sistema formale rappresenta una teoria formale; sostituire una teoria informale, cioè intuitiva, con una teoria formale ha il vantaggio di oggettivare la teoria, rendendola un oggetto di studio della scienza delle teorie, cioè della metateoria.
Un altro punto di vista che riguarda le diverse dimensioni dei linguaggi è quello di Morris (1977), nell'ambito della filosofia del linguaggio. Morris distingue tre dimensioni che caratterizzano i linguaggi: quella della sintassi, quella della semantica e quella della pragmatica. Dunque, rispetto al sistema formale nel senso

[145] In realtà un enunciato matematico può essere anche indecidibile, ma nell'idea di sistema formale di Hilbert è sempre possibile stabilire il valore di verità dei suoi enunciati senza "uscire" dal sistema stesso.

hilbertiano, che è di natura puramente logica, nella filosofia del linguaggio secondo Morris si aggiunge la componente pragmatica, che riguarda l'uso che del linguaggio viene fatto da chi lo utilizza.
L'obiettivo di Morris è quello di unire gli studi della filosofia del linguaggio anglosassone, soprattutto i risultati di Wittgenstein (1953/2003), a quelli della semiotica e della pragmatica statunitense, il cui maggior esponente è Peirce (1960). In questo senso la prospettiva di Morris è di tipo semiotico piuttosto che strettamente logico, in quanto per questo Autore la dimensione semiotica dell'essere umano è caratterizzante per la sua natura:

> L'uomo è l'unico essere che vive nella misura in cui vive in un mondo di segni. (…) Mentre altri organismi si muovono a seconda dei segni che il mondo procura, l'essere umano si trasforma e trasforma il mondo per mezzo di segni che egli stesso produce (…). Nella capacità di plasmarsi attraverso i segni che produce, l'uomo è unico. La misura dei suoi segni è la misura della sua libertà. (Morris, 1948, p. 52)

In riferimento alla matematica, nel caso in cui ci vogliamo riferire alla pragmatica, anche se non possiamo parlare di "sistema formale" in senso stretto, possiamo tuttavia parlare di "processo formale" nei seguenti termini:

> Un processo formale consta di tre momenti il cui ordine è il seguente: a) momento sintattico; b) momento semantico; c) momento pragmatico. Nel caso della scuola formalista, puntiamo soprattutto sul momento a). In esso si dà una classe di elementi primitivi a loro volta divisi in due gruppi: a') variabili, a'') costanti. (…) Successivamente si danno regole per formare le espressioni: si tratta di regole mediante le quali, data una sequenza di segni grafici, è possibile decidere se questa è o non è una formula ben formata (*fbf*) del nostro sistema. (…) Non è il significato (semantica) a farci decidere, è la forma (sintassi): in caso di conclusione negativa la formula va esclusa. Da qui l'aggettivo: "formalismo" che caratterizza questa scuola logica. (…) Nel secondo momento, b), semantico, il matematico interpreta ogni simbolo, ogni lettera, ogni *fbf* nell'ambito di una teoria *T* che aveva appunto inteso formalizzare. È questo il momento in cui si parla, per esempio nella logica proposizionale, di verità o falsità ma, naturalmente, in un senso del tutto distinto dall'uso che si fa di tali aggettivi nel linguaggio comune. (…) Segue poi il terzo momento, c), quello pragmatico, quello in cui tutto ciò si usa all'interno della matematica; paradossalmente quello meno interessante dal punto di vista fondazionale. In questo terzo momento si deve fornire un'interpretazione di tutto l'apparato sintattico costruito per dare senso alla teoria matematica nella quale lo si sta (finalmente) applicando. (D'Amore & Sbaragli, 2020, pp. 315–316)

Tornando alla proposta fondazionale formalista di Hilbert possiamo dunque affermare che essa consiste primariamente nella proposta di: a) assiomi scelti in maniera arbitraria, cioè sulla base delle esigenze della formalizzazione stessa; b) definizioni implicite degli oggetti coinvolti, in termini di relazioni tra gli assiomi; c) distinzione netta tra linguaggio e metalinguaggio; d) elaborazione e proposta di dimostrazioni condotte in un linguaggio sintattico e quindi impeccabile dal punto

di vista del rigore. È soprattutto l'unità imprescindibile tra a) e b) a costituire il carattere del metodo assiomatico moderno, come già evidenziato in precedenza.
Nella proposta formalista la dimensione pragmatica non è contemplata, il che significa semplicemente che il metalinguaggio in cui si studia l'uso della teoria formalizzata è un linguaggio non formalizzato, il che è per così dire "normale" dal punto di vista logico, dato che in questo caso il metalinguaggio è di solito il linguaggio naturale (Lolli, 2015). Rispetto alla dimensione semantica del sistema formale, dobbiamo notare che in essa, a differenza dell'assiomatica euclidea, non è possibile fare riferimento alla "verità" degli assiomi, i quali devono soddisfare solo la caratteristica di essere *fbf*, cioè formule accettabili dal punto di vista della grammatica del sistema. Questo significa che, mentre nel sistema assiomatico euclideo la verità degli enunciati è garantita prima di tutto dalla verità degli assiomi, oltre che dalla sua trasmissione per via deduttiva, nel caso del sistema formale moderno è garantita solo la trasmissione impeccabile della coerenza del sistema degli assiomi scelti. Il criterio di giudizio dei risultati cambia dunque profondamente tra i due sistemi assiomatici, passando dal criterio di verità a quello di non contraddittorietà all'interno del sistema.
Per dimostrare la non contraddittorietà del sistema di assiomi della geometria, Hilbert la ricondusse alla non contraddittorietà dei numeri reali, dimostrando che, vista la corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{R}$ e la retta reale, se fosse contradditorio il sistema di assiomi della geometria, allora lo sarebbe anche la teoria dei numeri reali. Ora, è vero che la teoria dei numeri reali è considerata non contradittoria dai matematici, ma in realtà questa assunzione di non contraddittorietà si basa sulla supposta non contraddittorietà dei naturali (D'Amore & Sbaragli, 2020), la quale andrebbe dimostrata. Dunque, in ultima istanza, la dimostrazione della possibilità di fondare la matematica in senso formalista si riduce alla dimostrazione della non contraddittorietà dei numeri naturali.
Com'è ben noto dalla storia, il sogno formalista di Hilbert, nella sua versione pura, naufragò a causa dei teoremi di incompletezza di Gödel. Infatti, nel 1931 Gödel dimostrò l'impossibilità di dimostrare che qualsiasi teoria che abbia almeno la potenza dell'aritmetica dei numeri naturali se è non contraddittoria è incompleta (Lolli, 2019), il che rese chiaro il fatto che un insieme finito di assiomi non è in grado di stabilire la coerenza dell'aritmetica e quindi nemmeno di tutte le altre teorie matematiche che poggiano su essa. Detto diversamente: con i teoremi di incompletezza di Gödel svanì il sogno di Hilbert di poter dimostrare la non contraddittorietà dei naturali basandosi solo sull'aritmetica e quindi anche il sogno di poter fondare la matematica per via formalista, garantendo così la sua coerenza "dall'interno".
Notiamo che il formalismo puro non assume alcuna posizione ontologica nei confronti degli oggetti primi della matematica (cioè nei confronti dei numeri). In questo approccio essi sono, così come gli oggetti primi della geometria nella sua versione hilbertiana, definiti solo implicitamente, tramite le loro reciproche

relazioni. In questo senso i numeri non sono “oggetti”, ma semplicemente segni, dei simboli tracciati su un supporto, e non entità, né astratte né di altro tipo.
Benché il formalismo puro non ebbe seguito, è pur vero che tra le impostazioni fondazionali quella del formalismo ha lasciato più segni nella matematica intesa come organizzazione di teorie assiomatizzate. In effetti, l’idea originale di sistema formale è stata sostituita in matematica con quella di *sistema razionale*, il quale conserva alcune delle caratteristiche del sistema formale, soprattutto quelle relative all’idea di deduzione formale, rinunciando però a quelle più stringenti:

> Un sistema razionale è costituito da: a) un numero $n$ finito di postulati $P_1, P_2, ..., P_n$; b) un numero $m$ finito di regole per dedurre $R_1, R_2, ..., R_m$; c) un certo numero di teoremi, ottenuti a partire da $R_i$ operando su $P_j$ ($i = 1, 2, …, m$; $j = 1, 2, …, n$). (D’Amore & Sbaragli, 2020, p. 318)

Alcune esigenze formaliste sono dunque rispettate nel sistema razionale, ma non le più rigide.

### 9. 3. 2. 3. Critiche al logicismo e al formalismo

Prima di proseguire con l’esposizione relativa alla terza corrente fondazionale che emerse dalla crisi dei fondamenti della matematica, cioè l’intuizionismo, facciamo alcune osservazioni sulle posizioni contrarie alle due impostazioni finora trattate, cioè il logicismo, impersonato soprattutto nella figura di Frege, ma al quale si può accostare anche Peano, e il formalismo, impersonato da Hilbert.
Il critico più feroce del logicismo e del formalismo fu Poincaré, per il quale i tentativi di Frege e soprattutto successivamente di Russell, ma anche di Peano e Hilbert, appartenevano a una stessa visione formalizzatrice della matematica. Secondo Poincaré, la radice dell’idea di formalizzazione della matematica (sia questa intesa nel senso della costruzione di un linguaggio formale, sia nel senso della formalizzazione in un sistema assiomatico formale) è il risultato dell’adozione del punto di vista cantoriano (anche se Cantor è proclamato “innocente” da Poincaré in questa impresa) e dall’impostazione assiomatica estrema di Hilbert (Lolli, 1987).
Pur non dubitando che l’impresa hilbertiana di ridurre i ragionamenti in geometria ad aspetti puramente meccanici, con lo scopo di evitare il ricorso all’intuizione che potrebbe indurre a introdurre postulati non esplicitati, sia possibile, Poincaré la ritiene poco utile e soprattutto impossibile per l’aritmetica (Lolli, 1987). Ci sono delle distinzioni importanti tra i rispettivi approcci di Frege-Russell, Peano e Hilbert, ma per Poincaré essi sono accomunati da intenzioni simili, che intendono estromettere l’intuizione dalla matematica, sulla quale invece si basa in realtà la creatività matematica. È ben noto il paragone che Poincaré usò per contestare chi sosteneva la possibilità dell’automatizzazione delle dimostrazioni matematiche e soprattutto la posizione formalista di Hilbert:

> Per dimostrare un teorema non è necessario, e nemmeno utile, sapere cosa esso vuol dire. Si potrebbe anche ideare una macchina nella quale si introducono da una parte gli assiomi e si raccolgono i teoremi dall'altra, come quella leggendaria macchina di Chicago nella quale i maiali entrano vivi per uscirne alla fine trasformati in prosciutti e salsicce. Al pari di tali macchine, il matematico non ha bisogno di capire ciò che sta facendo. (Lolli, 1987, p. 17)

La posizione assunta da Poincaré è paradigmatica per il punto di vista di molti matematici che non vedevano riflesso il loro lavoro di ricerca nelle proposte di formalizzazione in matematica. Egli potrebbe essere visto come uno dei primi matematici che pone le basi per quella che oggi si chiama "filosofia della pratica matematica", in cui ciò che si pone in primo piano non è l'aspetto strutturale della conoscenza matematica, ma la creatività nella sua produzione, e sulla quale torneremo più avanti nel presente capitolo. È importante notare, infatti, che Poincaré fu uno dei primi matematici a condurre osservazioni esplicite e metariflessioni sul proprio lavoro, allo scopo di fare maggiore chiarezza sul "modo di procedere" in matematica (D'Amore & Sbaragli, 2020).
Notiamo infine che anche Frege, pur stimando molto l'opera matematica di Hilbert, criticò la sua impostazione formalista e sembrò non comprendere la sua portata innovatrice. Infatti, Frege è in realtà un anti-formalista, per il quale gli assiomi devono essere "veri" in quanto intuizioni primarie "di qualcosa" e secondo cui "le definizioni non sono asserzioni (come lo sono principi, assiomi, teoremi), ma stipulazioni, mediante le quali a un segno o a una espressione viene attribuito un significato per mezzo della definizione stessa" (Lolli, 2004, p. 71). Inoltre Frege non ha mai perseguito un'assiomatizzazione della matematica; egli non propone infatti un'assiomatizzazione dell'aritmetica, ma definisce i numeri basandosi su intuizioni logiche. Frege afferma anche esplicitamente, in una lettera a Hilbert, che "il fatto che gli assiomi siano veri ci assicura di per sé che essi non si contraddicono tra loro, e ciò non abbisogna di alcuna ulteriore dimostrazione" (Frege, citato in Lolli, 2004, p. 71). La risposta di Hilbert, riportata sempre da Lolli, è paradigmatica per il completo rovesciamento che il metodo assiomatico da lui proposto produce rispetto al modo di vedere l'assiomatizzazione che potremmo chiamare "tradizionale", espressa da parte di Frege: "ho sempre detto esattamente il contrario: se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora essi sono veri, allora esistono gli enti definiti per mezzo di quegli assiomi. Questo è per me il criterio delle verità e dell'esistenza" (Hilbert, citato in Lolli, 2004, p. 71).
Queste citazioni mettono in evidenza un aspetto importante per la nostra trattazione: il fatto che l'esistenza degli oggetti matematici per Frege è data dalla loro definizione *esplicita*, mentre per Hilbert essa è data dalla *coerenza* degli assiomi che li definiscono implicitamente. In entrambi i casi è però la definizione a "chiamare in vita" l'oggetto matematico.

Da quanto esposto finora, possiamo notare che anche nel caso della proposta fondazionale formalista non è possibile parlare di una dinamicità degli oggetti matematici e quindi nemmeno di un'ontologia transitoria.
Il ruolo della semiotica non è espressamente preso in considerazione da Hilbert, ma essa è essenziale nell'approccio formalista, in quanto l'unico riferimento tangibile per gli oggetti matematici in esso sono i segni grafici che rappresentano le deduzioni e per mezzo dei quali si conducono le derivazioni.
La posizione formalista non può essere certamente considerata una posizione realista nel senso platonista ingenuo, in essa non viene postulata l'esistenza "reale" degli oggetti matematici nel senso classico, ma solo sulla base della loro non contradizione con un sistema di assiomi arbitrariamente scelto. Tuttavia, il significato degli oggetti è dato dalle relazioni tra gli assiomi della teoria in cui sono definiti ed essi hanno come tali un'oggettività che deriva dalla natura sintattica di queste relazioni. In questo senso la posizione formalista è più vicina a un approccio realista che a uno pragmatico.
Per quanto riguarda l'aspetto epistemico, nella prospettiva formalista l'accesso agli oggetti matematici avviene esclusivamente attraverso i sistemi assiomatici in cui essi sono definiti.

### 9. 3. 2. 4. La risposta fondazionale intuizionista

La terza corrente che fornì una risposta agli interrogativi riguardanti i fondamenti della matematica fu l'intuizionismo.
L'impostazione intuizionista ha molti elementi in comune con una posizione abbastanza diffusa tra i matematici alla fine del XIX e l'inizio del XX secolo e che presenta tratti in comune con la corrente filosofica del costruttivismo.[146] Forse la posizione proto-costruttivista più esplicita è quella di Kronecker, secondo cui l'unica cosa che si può considerare come già data in matematica sono i numeri naturali (o interi, come si usava dire all'epoca e come a volte si sente dire tuttora), mentre tutto il resto è opera dell'uomo. Altri matematici che assunsero in parte posizioni compatibili con le idee intuizioniste erano Poincaré, della cui opposizione alle posizioni logicista e formalista abbiamo già detto in precedenza, ma anche Borel, Hadamard, Lebesgue e Baire (D'Amore & Sbaragli, 2020).
L'intuizionismo come corrente fondazionale della matematica va però al di là della condivisione di alcuni principi di base relativi al modo di produrre matematica. L'intuizionismo si sviluppò come una vera e propria scuola matematica alternativa a quella classica, la quale aveva assunto la teoria degli insiemi di Cantor come base, accettando pienamente l'infinito attuale nella prassi e soprattutto nella teorizzazione matematica.

[146] Non ci sembra opportuno parlare di costruttivismo nel periodo indicato, dato che tale corrente filosofica ed epistemologica nacque molto più tardi, nella seconda metà del XX secolo.

I capostipiti della corrente intuizionista sono Brouwer e il suo allievo Heyting; il primo un matematico, il secondo un logico che contribuì allo sviluppo di una logica specifica della matematica intuizionista, di cui diremo di più a breve.
Come notano D'Amore e Sbaragli, dal punto di vista filosofico, l'intuizionismo sembra avere una certa affinità con le posizioni espresse da Kant:

> La nostra conoscenza scaturisce da due fonti principali dello spirito, la prima delle quali è la facoltà di ricevere le rappresentazioni (ricettività delle impressioni), la seconda quella di conoscere un oggetto mediante queste rappresentazioni (spontaneità dei concetti). Per la prima un oggetto ci è dato; per la seconda esso è pensato in rapporto con quella rappresentazione (come semplice determinazione dello spirito). Intuizione e concetti costituiscono dunque gli elementi di ogni nostra conoscenza. (Kant, citato in D'Amore & Sbaragli, 2020, p. 324)

Notiamo dunque come il riflesso del pensiero kantiano nelle basi della matematica intuizionista non si presenti in riferimento alla classificazione degli enunciati matematici proposta dal filosofo tedesco e che, come abbiamo detto, era stata messa in discussione dallo sviluppo della matematica, ma è riferito a principi generali di natura gnoseologica.
Infatti, per Kant la possibilità di cogliere le rappresentazioni degli oggetti che si presentano alla mente[147] e la possibilità di stabilire un rapporto tra la rappresentazione e l'oggetto che essa rappresenta sono facoltà a-priori sulle quali si basa qualsiasi conoscenza. Inoltre, il cogliere la rappresentazione di un oggetto è per Kant l'intuizione dell'oggetto, mentre la conoscenza dell'oggetto si basa sulla costruzione di concetti.
L'intuizione è uno degli aspetti fondamentali per gli intuizionisti (come si evince anche dal nome attribuito alla corrente), ma è necessario distinguere tra due diversi ordini di intuizione: (i) una che corrisponde all'intuizione kantiana (*Urintuition* o intuizione primordiale) e che possiamo assimilare alla possibilità di cogliere il fatto che un segno sta per un oggetto in senso peirciano (Peirce, CP, 2.228), e che costituisce un tassello importante nelle costruzioni intuizioniste; (ii) una che ha

---

[147] Notiamo qui l'analogia tra quanto espresso da Kant e il modo di intendere il processo semiotico da parte di Peirce, dove le tre componenti di base della semiotica peirciana (Peirce, 1960), interpretante, oggetto e segno, sono legati da una relazione triadica. Tale relazione, che si crea tra il segno che rappresenta l'oggetto, l'oggetto stesso e l'interpretante che sorge dalla loro relazione, potrebbe essere considerata come ciò che Kant chiama "concetto". In un passaggio successivo, questo interpretante (cioè il concetto, nel senso kantiano) diventa il segno che rappresenta l'oggetto, che ora è costituito dalla relazione tra l'oggetto della fase precedente e il segno che lo rappresenta; questa relazione origina un nuovo interpretante (cioè un nuovo concetto, per usare le parole di Kant) e così via. Dunque si potrebbe affermare che la semiotica peirciana trova corrispondenza nell'assunzione kantiana dell'a-priorità della possibilità di cogliere le rappresentazioni di oggetti [Peirce direbbe: della possibilità dell'individuo di generare segni nel senso di considerare per sé stesso qualcosa, al posto di qualcos'altro, rispetto a qualcosa (Peirce, CP, 2.228)], nonché della possibilità di conoscere l'oggetto attraverso la relazione tra rappresentazione e oggetto stesso [Peirce direbbe: della possibilità di far sorgere un interpretante dalla relazione tra oggetto e *representamen*]. Torneremo sulla semiotica peirciana nel capitolo 10.

una funzione di controllo nel riconoscere la correttezza della regola seguita nella costruzione tramite l'*Urintuition* (D'Amore & Sbaragli, 2020).
Da questa posizione segue che l'intuizione su cui si basa l'intuizionismo non è indipendente dall'intelletto, cioè non è qualcosa che consente di cogliere in maniera immediata delle verità senza l'intervento della razionalità; si tratta anzi di una facoltà prima di tutto intellettuale.
Le entità matematiche intuizioniste, cioè gli "oggetti" matematici, non sono entità che "abitano" un mondo reale o astratto che sia, ma sono sostanzialmente delle costruzioni mentali: "La matematica intuizionista non tratta del mondo reale, né di un mondo astratto di entità matematiche, bensì di costruzioni mentali" (Heyting, 1978, p. 1).
Anche nella caratterizzazione che dà Brouwer della matematica, ciò che si presenta in primo piano è una sua visione come pura attività mentale, come un particolare tipo di pensiero, aspetto che Brouwer usa per rimarcare la differenza tra intuizionismo e formalismo: "(T)the question where mathematical exactness does exist, is answered differently by the two sides; the intuitionist says: in the human intellect, the formalist says: on paper" (Brouwer, 1913/2013, p. 83).
Per Brouwer la base della matematica sta nella capacità di suddivisione del tempo in unità qualitativamente diverse:

> This neo-intuitionism considers the falling apart of moments of life into qualitatively different parts, to be reunited only while remaining separated by time as the fundamental phenomenon of the human intellect, passing by abstracting from its emotional content into the fundamental phenomenon of mathematical thinking. (Brouwer, 1913/2013, p. 85)

In questo senso l'intuizionismo abbandona dunque l'idea di a-priorità del concetto di spazio secondo Kant, ma mantiene l'a-priorità del concetto di tempo.
Uno dei punti focali dell'impostazione intuizionista è dato dal fatto che per gli intuizionisti in matematica non può esserci nulla che sia considerato come precostituito, l'esistenza degli enti matematici è data solo tramite la loro costruibilità, cioè: ogni ente matematico deve essere effettivamente costruibile in un numero finito di passi, non è sufficiente che lo sia solo potenzialmente. Questo significa che non sono accettabili dal punto di vista intuizionista costruzioni che forniscono una regola iterativa con infiniti passaggi, il cui risultato sarebbe l'oggetto matematico costruito: "Per l'intuizionista nulla, né valori di verità di enunciati né alcuna altra entità matematica, può essere presentata come il risultato finale di un processo infinito, perché un processo infinito non ha un risultato finale" (Lolli, 2013, p. 7).
Inoltre, la costruzione di un ente matematico o la dimostrazione di un enunciato matematico devono basarsi solo su oggetti a loro volta già costruiti, mentre non è lecito basarle su considerazioni di natura puramente logica; soprattutto non è possibile basarle sull'assunzione dell'esistenza di oggetti la cui assurdità si intende dimostrare, come invece avviene nelle dimostrazioni per assurdo. Dunque, nella matematica intuizionista le dimostrazioni per assurdo non sono accettabili.

Per illustrare meglio il perché del rifiuto delle dimostrazioni per assurdo è necessario prima mostrare in quale forma si presentano le proposizioni della matematica intuizionista nonché spiegare in che cosa consiste una dimostrazione in questo contesto e quindi in che senso una proposizione è vera (quindi è un teorema) o è falsa (quindi non lo è). A tale scopo facciamo riferimento a Heyting (1978).

Nella matematica intuizionista una proposizione ha la forma standard: "Una costruzione $A$ con tali e tali proprietà può venire eseguita", mentre una dimostrazione di una proposizione, supponiamo della proposizione $A$, consiste nell'effettuazione della costruzione di $A$.

Che cosa significa però che una proposizione $A$ è falsa? Per affermare che $A$ è falsa si dovrebbe dimostrare l'impossibilità della costruzione di $A$, ma che cosa è accettabile come dimostrazione della non-costruibilità di $A$? Per gli intuizionisti dimostrare $\neg A$ significa dimostrare che dall'assunzione che $A$ sia costruibile, cioè dall'ipotesi della sua costruibilità, si deduce una contraddizione. Quindi la falsità in questo contesto non è riferibile a un enunciato come tale, ma è riferibile all'impossibilità di una costruzione a esso collegata. In questo senso non vale la doppia negazione, cioè che $\neg\neg A$ equivale ad $A$, poiché dalla contraddizione dell'impossibilità di una costruzione non è possibile dedurre la costruzione stessa.

Già da queste brevi considerazioni diventa chiaro che la logica a cui fa riferimento la matematica intuizionista non può essere quella classica. In effetti, nonostante il sostanziale rifiuto degli intuizionisti del ruolo della logica come base della matematica e anche del suo ruolo nella produzione matematica, l'intuizionismo ha prodotto una logica propria con caratteristiche peculiari, il cui fondatore fu proprio Heyting. Proseguiamo nella caratterizzazione dell'intuizionismo attraverso alcuni cenni a tale logica e al rapporto dell'intuizionismo con la teoria degli insiemi, facendo ricorso ancora a Heyting (1978).

Mentre nella logica classica bivalente il principio del terzo escluso, cioè $P \vee \neg P$, è uno dei principi di base, nella logica intuizionista esso non vale, cioè non è una legge generale. Infatti, dimostrare $P \vee \neg P$ significa o effettuare $P$ (cioè eseguire la costruzione $A$, che in $P$ si afferma eseguibile) oppure dimostrare che dall'ipotesi dell'eseguibilità di $A$ si ottiene una contraddizione.[148] Fino a quando non è stato fatto né l'uno né l'altro, non si ha una dimostrazione di $P \vee \neg P$. Questo significa che il principio del terzo escluso non è un teorema nella logica intuizionista ma che può esprimere una caratteristica di una proposizione matematica, senza però esprimere alcunché riguardo all'esistenza dell'ente matematico la cui costruibilità è predicata in $P$.

Come sottolinea Heyting, il fatto che il principio del terzo escluso non vale nella logica intuizionista non significa che essa sia una logica a più valori; significa invece che, fino a quando non si costruisce $A$, la cui costruzione è predicata in $P$,

[148] Heyting (1978) puntualizza che come esempio paradigmatico di contraddizione accettabile intuizionisticamente si può considerare 1 = 2.

o non si è dimostrato che l'ipotesi della sua costruzione porti a contraddizione, non è possibile dire nulla riguardo a $P \vee \neg P$.
In riferimento alla teoria degli insiemi, Heyting nota che: "(L)la teoria classica degli insiemi pretende di descrivere un universo di insiemi che esistono indipendentemente dalla nostra mente. Nella matematica intuizionista la nozione di entità indipendenti dalla nostra mente è inammissibile" Heyting (1978, p. 1).
Di conseguenza, gli intuizionisti non parlano di "insieme", ma usano un termine diverso, parlando di "specie".
Le specie sono considerate della entità matematiche, cioè una sorta di "oggetti". Il modo di considerare una proprietà caratteristica come definitoria della specie sembra essere riferibile al principio di astrazione fregeano, secondo il quale ogni proprietà determina in maniera univoca l'insieme degli oggetti che la soddisfano; tuttavia, nella logica intuizionista questo aspetto si differenzia molto da quello consueto in teoria degli insiemi.[149] Infatti, per gli intuizionisti la proprietà caratteristica che contraddistingue gli oggetti appartenenti a una specie $S$ deve essere formulata in maniera tale che, "data un'entità $a$ e una costruzione $A$, si possa decidere se $A$ è una dimostrazione di $a \in$ S" (Heyting, 1978, p. 1).
Come nota ancora Heyting:

> Una specie $S$ non può identificarsi con la collezione dei suoi elementi. La definizione di $S$ e le definizioni dei suoi elementi sono completamente indipendenti l'una dalle altre; solo dopo che sono state date si può constatare che qualche entità è elemento di $S$; non è necessario che sia decidibile la questione che $a$ sia elemento di una specie $S$. (Heyting, 1978, p. 1)

Dunque, una delle caratteristiche importanti delle *specie* è che per esse il principio di astrazione di Frege non vale nello stesso senso in cui vale per gli insiemi nella teoria degli insiemi. In particolare, la proprietà caratteristica che caratterizza una specie, deve essere espressa in maniera tale che sia possibile decidere se la costruzione di un oggetto è *adatta* per decidere se tale costruzione è una dimostrazione dell'appartenenza dell'oggetto in questione alla specie.
Per esempio, una formulazione di proprietà caratteristica del tipo "essere un numero pari" è adatta alla teoria degli insiemi, poiché si suppone che l'insieme dei numeri che essa definisce esista già di per sé, indipendentemente dalla mente di chi lo considera. Nella logica intuizionista, invece, tale proprietà non è in grado di caratterizzare una specie; in questo caso servirebbe una proprietà del tipo "$a$ è un numero pari se è multiplo di 2". Questa proprietà esprime la caratteristica che la costruzione di $a$ deve mettere in evidenza affinché si possa dire se $a$ appartiene o no alla specie caratterizzata dalla proprietà. Un numero appartiene a $S$ se per esso è possibile esibire una costruzione che metta in evidenza il fatto che esso è multiplo di 2.

[149] Nel sistema assiomatico di Zermelo e Fraenkel il principio di astrazione è espresso tramite l'assioma di separazione.

In questo senso ci sarebbe da chiedersi se la specie caratterizzata dalla proprietà "$a$ è un numero pari se è divisibile per 2" debba essere considerata una specie diversa dalla specie "$a$ è un numero pari se è multiplo di 2". La risposta sembrerebbe affermativa, poiché la dimostrazione dell'appartenenza di un elemento alla prima di queste due specie coinvolgerebbe una costruzione diversa rispetto alla dimostrazione dell'appartenenza dell'elemento analogo alla seconda. Per esempio, la dimostrazione del fatto che 4 è un numero pari potrebbe avvenire mettendo in evidenza il fatto che il quoziente della sua divisione per 2 è un numero naturale oppure mettendo in evidenza il fatto che 4 ha almeno un 2 nella propria scomposizione in fattori primi. In entrambi i casi, 4 apparterebbe a due specie diverse, sulla base della proprietà a cui si è fatto riferimento nella costruzione.
Per l'intuizionista, l'esistenza dell'insieme dei numeri pari, che garantirebbe l'uguaglianza della denotazione espressa dai concetti relativi alle due proprietà caratteristiche delle due specie non è accettabile, come lo è invece se si fa riferimento alla teoria degli insiemi. Questo evidenzia, a nostro avviso, l'asimmetria tra intensione ed estensione nel caso delle specie intuizioniste, a differenza della loro simmetria nel caso della teoria degli insiemi. Di conseguenza, anche la definizione del significato degli oggetti in termini denotativi nel senso di Frege (si veda il capitolo 7.3.2) non vale in una prospettiva intuizionista, in quanto non vi è la possibilità di stabilire a priori quali oggetti cadono sotto un dato concetto.
Concludiamo l'esposizione degli aspetti più importanti della logica intuizionista illustrando le modalità con le quali in essa si presentano l'implicazione e la quantificazione; a tale scopo ci serviamo nuovamente di Heyting (1978).
La dimostrazione di un'implicazione $P \rightarrow Q$ nella logica intuizionista consiste nell'individuazione di un metodo generale che trasformi ogni data dimostrazione di $P$ (quindi ogni costruzione di ciò che in $P$ si predica come costruibile) in una dimostrazione di $Q$ (quindi in una costruzione di ciò che in $Q$ si predica come costruibile).
La dimostrazione della generalità, cioè il quantificatore universale $\forall x P(x)$, dove il dominio della variabile $x$ è la specie $S$, consiste nell'individuazione di un metodo $M$ che porti al risultato: se $A$ denota la costruzione di un'entità $a$, unita alla dimostrazione che $a \in S$, allora tale metodo $M$ trasforma $A$ in una dimostrazione di $P(a)$.
Infine, la dimostrazione dell'esistenza, cioè il quantificatore esistenziale $\exists x P(x)$, dove il dominio della variabile $x$ è la specie $S$, consiste nella costruzione di un ente $a$, nella dimostrazione del fatto che $a \in S$ e, infine, nella dimostrazione che $P(a)$.
Un'ultima caratteristica della logica intuizionista a cui facciamo cenno in questo paragrafo è il fatto che in essa i connettivi (congiunzione e disgiunzione) sono tra loro indipendenti e quindi non sono esprimibili l'uno per mezzo dell'altro, cosa che invece nella logica classica è possibile, in quanto è sempre possibile esprimere una *fbf* in forma di disgiunzione di congiunzioni (forma normale disgiuntiva) o di congiunzione di disgiunzioni (forma normale congiuntiva).

Come emerge dall'esposizione, la proposta fondazionale intuizionista porta con sé una visione della matematica che è completamente diversa da quella implicitamente presente nelle proposte logicista e formalista. In prima istanza, pur nelle sostanziali differenze tra questi ultimi due approcci, entrambi attribuiscono un ruolo fondamentale alla logica, sia che questo ruolo sia la base stessa della matematica, sia che riguardi la formulazione di un linguaggio per le sue deduzioni. Nella proposta intuizionista, invece, la logica non ha nessuno di questi ruoli; anzi, il suo ruolo è considerato solo in termini di organizzazione dei risultati e soprattutto in funzione della natura di quest'ultimi, piuttosto che come loro matrice. Come sottolinea Heyting, con un'interpretazione intuizionista della logica "la logica diventa una parte della matematica, in quanto un teorema logico afferma che una certa costruzione può essere effettuata" (Heyting, 1978, p. 1). Questo è uno degli aspetti più interessanti della matematica intuizionista, nella quale la logica, pur non essendo considerata la base della (o il modello di ragionamento nella) matematica, appare come uno strumento versatile che può essere scelto sulla base della matematica che si desidera caratterizzare e non viceversa, come invece veniva supposto nelle correnti logicista e formalista.
Notiamo infine che Kolmogorov fornì un'interpretazione della matematica intuizionista in cui il concetto di *costruzione* fu sostituito con quello di *problema*; si veda a tale proposito D'Amore e Sbaragli (2020).
Riguardo alle caratteristiche evidenziate nel paragrafo 9.2. del presente capitolo, possiamo notare che gli oggetti matematici in senso intuizionista sono oggetti dinamici in quanto la costruzione stessa è parte integrante dell'oggetto che essa consente di costruire. In questo senso nella prospettiva intuizionista sugli oggetti matematici sono contemplati sia i processi (la costruzione) sia gli oggetti (il risultato della costruzione) e in essa è presente anche una base tecnica per un'ontologia transitoria poiché le entità logiche di riferimento non sono insiemi fissi ma specie che si presentano come degli insiemi variabili, non univocamente determinati da una proprietà caratteristica. Tuttavia è proprio questa transitorietà degli oggetti intuizionistici a rendere difficile una loro definizione in senso classico, cioè come oggetti formali statici.
L'aspetto semiotico è preso in considerazione solo implicitamente dall'intuizionismo, dato che, come abbiamo già evidenziato, l'intuizione primaria in esso consiste implicitamente nel saper riconoscere che un segno sta per qualcos'altro, ancor prima che si possa intuire se una costruzione sia o non sia la costruzione di un dato oggetto. Ciononostante non possiamo affermare che la semiotica sia costitutiva per l'intuizionismo. In esso la matematica è primariamente un'attività mentale e solo in seconda istanza un'attività semiotica; le rappresentazioni sono l'espressione del pensiero ma non sono costitutive di esso.
Infine, in una prospettiva intuizionista il significato può essere considerato pragmatico, in quanto esso è il risultato dell'attività mentale del singolo essere

umano, anzi: dal punto di vista intuizionista gli oggetti esistono *solo* nella mente dell'essere umano, in quanto sono il risultato degli atti del pensiero.

Il lettore che conosce bene le posizioni della corrente costruttivista in didattica della matematica riconoscerà probabilmente molti suoi elementi nell'intuizionismo e ciò non deve sorprendere, dato che l'intuizionismo assume chiaramente una prospettiva epistemica sugli oggetti matematici facilmente compatibile con una prospettiva degli oggetti matematici come oggetti dell'apprendimento. Infatti, l'idea dell'oggetto che esiste solo se il soggetto è in grado di esibire una costruzione di esso, è una concezione profondamente epistemica di oggetto matematico. Non deve dunque sorprendere il fatto che il costruttivismo, che condivide molte delle posizioni dell'intuizionismo, sia stato preso in considerazione durante un certo periodo dell'evoluzione storica della didattica della matematica come *la* filosofia della didattica della matematica (Ernest, 1994).

Anche se il costruttivismo in didattica della matematica è considerato oggi solo come una delle teorie (o correnti) in essa, che si colloca accanto a prospettive socioculturali che spostano il focus dell'insegnamento-apprendimento dall'aspetto più prettamente concettuale all'aspetto legato alle condizioni semio-cognitive e socioculturali che permettono l'oggettivazione della conoscenza, le basi matematiche (piuttosto che filosofiche) dell'intuizionismo sembrano non essere in conflitto con l'ontologia della maggior parte degli approcci agli oggetti matematici in didattica della matematica esaminati nel capitolo precedente. Notiamo però che un problema al quale il costruttivismo in didattica della matematica non riesce, per sua natura, a fornire una risposta, riguarda proprio la necessità di presa in carico dell'esistenza oggettiva, indipendente dalla mente del singolo essere umano, di oggetti matematici appartenenti alla matematica come disciplina, che fungono da riferimento per la didattica della matematica. Detto diversamente: mentre un matematico può permettersi di assumere una posizione costruttivista senza incontrare perciò sostanziali difficoltà nel fare o creare matematica, assumendo che solo gli oggetti mentali che egli ha nella propria mente hanno un'esistenza, in didattica della matematica ciò è più problematico, dato che se non si ammette che esiste qualcosa che si chiama "matematica" indipendentemente dalla percezione del singolo studente, non si può nemmeno pensare a come questa possa essere insegnata e appresa. In un certo senso, in didattica della matematica si è costretti a considerare degli oggetti matematici che di per sé hanno una natura pragmatica, in quanto prodotti dagli esseri umani, come oggetti che rappresentano una sorta di "realtà" precostituita di oggetti matematici istituzionalmente appartenenti alla matematica, alla quale la didattica della matematica attinge e della quale essa non può non tenere conto.

Dal punto di vista puramente matematico, pur essendo un approccio alternativo interessante rispetto a quello classico alla matematica, l'intuizionismo è rimasto una corrente poco significativa in termini di aderenza dei matematici a essa. Questo fatto può essere attribuito a diversi fattori, come per esempio al fatto che

essa richiede una completa riformulazione dei risultati matematici finora ottenuti nelle diverse branche della matematica in termini costruttivi e quindi, tra le altre cose, senza ricorso alle dimostrazioni per assurdo, mentre non sembrano esserci, almeno per ora, dei vantaggi che possano giustificare, o necessità che impongano, un tale sforzo da parte dei matematici praticanti.
Nel paragrafo successivo ci occuperemo brevemente del bourbakismo che, pur non essendo annoverato tra le correnti fondazionali emerse dalla crisi dei fondamenti della matematica, ha segnato in maniera molto significativa il modo di formulare ed esprimere i risultati in matematica, fornendo un linguaggio ampiamente condiviso tra i matematici.

### 9. 3. 2. 5. Bourbaki

Negli anni '30 del XX secolo alcuni giovani matematici di prestigio fondarono in Francia un gruppo che fu attivo per circa 50 anni sotto lo pseudonimo Nicolas Bourbaki. Il suo obiettivo principale era quello di creare una base unitaria per la matematica, mettendo in evidenza e sfruttando gli aspetti strutturali dei suoi oggetti e poggiando tutta la costruzione sul linguaggio insiemistico.
Cercheremo di delineare brevemente alcune delle caratteristiche del lavoro di questo gruppo, rivolgendo il nostro interesse primariamente al ruolo che il linguaggio degli insiemi ebbe nell'opera bourbakista, ma anche alla comprensione del ruolo che in tale ambito venne attribuito alla logica.
La questione relativa al formalismo in matematica acquisisce una nuova forma dal momento in cui sulla scena entra Bourbaki. Dato che l'interesse primario dei bourbakisti risiedeva nell'assiomatizzazione della matematica, una fonte importante di ispirazione per loro fu il lavoro di Hilbert e principalmente la sua opera sull'assiomatizzazione della geometria, sulla quale ci siamo soffermati in precedenza (Hilbert, 1899/1903). I bourbakisti adottano dunque un'impostazione assiomatica moderna, ma le nozioni base a cui ricorrono sono legate alla teoria degli insiemi.
Anche se comunemente si tende ad affermare che Bourbaki "sposa la teoria degli insiemi alla logica formale", questo è vero come principio di fondo, sottolinea Lolli (1987), ma non sempre è riscontrabile nell'esposizione degli argomenti nell'opera: mentre nel fascicolo relativo all'esposizione della teoria degli insiemi come teoria matematica gli autori seguono un'impostazione formale, nel primo libro dell'opera, che introduce i concetti e le nozioni di base della teoria degli insiemi, che serviranno per sviluppare tutta la matematica, non vi è traccia di formalismo e gli autori stessi dichiarano che in questa impostazione, nella quale la parte introduttiva non riporta per esempio alcuna dimostrazione, il lettore è invitato a intendere i termini non definiti in modo intuitivo. In effetti, per designare gli oggetti matematici, i bourbakisti introducono molti termini nuovi, tratti dal

linguaggio naturale, e aventi una grande forza evocativa; si pensi per esempio ai termini “spazio compatto”, “ricoprimento”, “fascio”, “palla” etc.
Dunque, i bourbakisti trattano la teoria degli insiemi formalmente nel momento in cui essa viene presentata come branca autonoma della matematica, ma ricorrono a un uso intuitivo di un linguaggio insiemistico quando questo è usato nelle altre branche della matematica. Gli autori stessi dichiarano che questo modo di procedere è in accordo con le diverse finalità che perseguono queste due trattazioni: in un caso si presenta il modo in cui il matematico procede nel suo lavoro e vengono dunque esposte solo le definizioni e i risultati della teoria degli insiemi che servono per poter *fare matematica*, senza dare peso agli aspetti logici; nell’altro caso si vuole invece *esporre una teoria* nel suo complesso e gli aspetti logici sono fondamentali; il primo modo è un riassunto del secondo, e quest’ultimo andrebbe letto da tutti coloro che fossero desiderosi di comprendere come si superano le problematiche logiche che sorgono nel primo (Lolli, 1987). In questo senso è vero che il ruolo della logica non viene in realtà negato e si potrebbe affermare, seguendo Lolli, che “Bourbaki è un’altra versione, per nulla tormentata, di formalismo” (Lolli, 1987, p. 63).
Però è anche vero che in questo modo la logica, la cui posizione in matematica non viene negata, è nel contempo estromessa dall’ambito di lavoro del matematico, che può farvi ricorso nel caso ne avverta la necessità (soprattutto nel caso in cui dovessero sorgere dei dubbi), ma senza che sia costretto a farlo in linea di principio. Nell’impostazione bourbakista, nota ancora Lolli (1987), la logica ha il ruolo che la grammatica ha nei confronti del linguaggio naturale: ne garantisce l’analizzabilità, ma il linguaggio esisteva anche prima della grammatica e indipendentemente da essa. Nello stesso modo la matematica esisteva anche prima della logica e indipendentemente da essa. A questa posizione Lolli obietta che considerare la logica solo come grammatica induce alcuni problemi, come per esempio il fatto che la grammatica non è solo la garanzia del parlare corretto, ma che essa di solito regola un discorso significante che, nel caso in cui il significato non esista, carica la grammatica di un peso troppo difficile da sostenere; inoltre, i bourbakisti non rendono così giustizia alle differenze rilevate dalla logica tra i linguaggi formali, con le loro limitazioni, e il linguaggio ordinario, con la sua “semantica incorporata” (Lolli, 1987, p. 64). Dunque, conclude Lolli, accettandola pianamente, il bourbakismo svaluta realmente la logica a un campo per specialisti, di cui il matematico può anche disinteressarsi.
Prima di concludere il paragrafo dedicato al bourbakismo, non possiamo esimerci dal mettere in evidenza le problematiche semantiche che possono sorgere dall’adesione a un’impostazione bourbakista, particolarmente importanti dal punto di vista didattico. D’Amore e Sbaragli esprimono la questione come segue:

> il voler a tutti i costi definire ogni ente matematico come “un insieme tale che” non sempre è spontaneo, specie da un punto di vista fondazionale o didattico. Per esempio, nel linguaggio non strettamente formale una relazione binaria fra (due) insiemi $A$ e $B$ di elementi esprime un significato che fornisce un legame fra talune coppie di essi ($x$,

> $y$) con $x \in A$ e $y \in B$ e non un insieme risultante; nella linea bourbakista una relazione è un insieme, un determinato sottoinsieme del prodotto cartesiano fra $A$ e $B$ (cioè dell'insieme di tutte e sole le coppie di elementi che hanno come primo elemento un elemento di $A$ e come secondo elemento un elemento di $B$). (…) Corretto, dal punto di vista strettamente matematico, ma poco significativo dal punto di vista intuitivo, dunque dal punto di vista didattico (a qualunque livello scolastico). (D'Amore & Sbaragli, 2020, p. 339)

Nonostante l'impostazione bourbakista, se considerata nella sua versione originaria, abbia incontrato soprattutto negli ultimi decenni molte critiche a causa del suo estremo strutturalismo (e non solo in didattica della matematica, ma anche da parte dei matematici), l'impresa di Bourbaki ha segnato una svolta importante per la matematica, fornendo ai matematici un linguaggio condiviso tra le varie branche della matematica, il linguaggio degli insiemi, adatto alla formulazione, espressione e formalizzazione della loro produzione scientifica. Notiamo che la teoria degli insiemi è oggi una branca autonoma della matematica e che molti esponenti a essa appartenenti sostengono che la matematica possa essere considerata come fondata sulla teoria degli insiemi, dato che ogni oggetto matematico può essere espresso in termini insiemistici. Tuttavia, come nota Arrigoni (2003), questo non è sostenibile in generale (ci sono teoremi che sono tali in un sistema e non lo sono in un altro), poiché la matematica non è invariante per sistemi di assiomi diversi per la teoria degli insiemi, e inoltre è possibile esprimere tutta la matematica anche in termini categoriali e non solo insiemistici. Ciò che rimane comunque valido è che la teoria degli insiemi fornisce un linguaggio comune alle varie branche della matematica e che essa è anche "un *ambiente* o un *contesto* nei termini del quale formulare teorie matematiche diverse, confrontarle e svilupparle" (Arrigoni, 2003, p. 217).
Il linguaggio insiemistico rimane infatti tuttora quello condiviso della comunità scientifica o almeno da quella sua parte che aderisce a una visione classica e non intuizionista della matematica, anche se certamente non nella sua versione bourbakista originale, per molti versi strutturalmente esasperata.[150]
Il bourbakismo non è una corrente filosofica a sé stante e quindi in riferimento a esso non ci soffermeremo sugli aspetti ontologici ed epistemologici.

---

[150] Anche se la posizione bourbakista non ha più un seguito in didattica della matematica [si ricordi che negli anni '60-'80 del XX secolo essa era diventata la base per la *New Math*, che impose un radicale cambio di natura strutturalista, del modo di concepire e insegnare la matematica (Brousseau & D'Amore, 2008)], è vero che ciò che rimane un'eredità indiscussa per la matematica, cioè il sostanziale riferimento alla teoria degli insiemi come linguaggio formale della matematica, è inevitabilmente trasferito in maniera più o meno esplicita anche nella matematica insegnata a scuola. Anche se non sempre gli oggetti matematici a scuola sono definiti in termini di "un insieme tale che", è vero che la formazione dei docenti all'università avviene prevalentemente in un linguaggio che ha le sue radici in quello bourbakista e che esso si trova spesso riprodotto anche nei libri di testo, il che determina un certo modo di concepire la matematica che è conformato all'uso del linguaggio degli insiemi.

### 9. 3. 3. Una molteplicità di approcci

Come abbiamo mostrato nei paragrafi precedenti, i tentativi risalenti alla prima metà del secolo scorso di fondare la matematica non ebbero successo e, anche se ciascuna delle soluzioni proposte contribuì a modo suo allo sviluppo successivo della matematica, a partire dalla seconda parte del XX secolo la filosofia della matematica spostò la propria attenzione su questioni attigue a quelle che stavano alla base della spinta fondazionalista, ma senza più mirare a soluzioni fondazionaliste in senso classico (Lolli, 2001; Arrigoni, 2003; Giardino, 2017).
Secondo Lolli (2001), il problema dei fondamenti della matematica acquisisce un significato diverso se visto dal punto di vista dei matematici o dal punto di vista dei filosofi della matematica.
In effetti, l'interesse primario della filosofia della matematica riguarda due interrogativi: uno di natura ontologica, cioè relativo alla natura dei suoi enti primi, e l'altro di natura epistemologica, cioè relativo alla natura della matematica stessa, in quanto disciplina che produce conoscenza, nonché alle modalità di accesso a tale conoscenza.
Dal punto di vista dei matematici, invece, è soprattutto il primo dei due interrogativi a essere interessante, mentre il secondo lo è meno.
Nonostante ci sia una comunanza di interessi tra filosofia della matematica e matematica relativamente all'interrogativo ontologico, sono le motivazioni per tale interesse a essere diverse. Infatti, la matematica non è solo l'oggetto di studio della filosofia della matematica, ma è anche una pietra di paragone per la certezza dei risultati in filosofia in generale. Sono molto significative le riflessioni che Lolli (2001) fa a tale proposito: la filosofia ha avuto dagli albori un interesse particolare per la matematica, soprattutto in quanto considerata conoscenza certa e infallibile, il cui metodo assiomatico, basato sulla conoscenza degli *Elementi* di Euclide, diventava il metodo di acquisizione di conoscenza per eccellenza. Questa posizione si basava però sull'idea che la natura della matematica, pur progredendo quest'ultima nel tempo, rimanesse fondamentalmente la stessa e che sostanzialmente essa rispecchiasse la realtà. Nel momento in cui, nel corso dell'Ottocento, la matematica diventa una scienza i cui legami con la realtà fisica sono sempre più messi in dubbio, e il carattere delle cui teorie diventa sempre più quello assiomatico moderno, la cui coerenza si basa su aspetti sintattici e non semantici, la filosofia è costretta a fare i conti con l'idea della matematica come scienza su cui basare una conoscenza certa e infallibile della realtà.
Dunque, da una parte la metamorfosi che hanno subito gli oggetti matematici nel passaggio dal metodo assiomatico euclideo al metodo assiomatico moderno ha privato la filosofia della certezza di un metodo consolidato da millenni e la ridefinizione degli oggetti matematici ha indotto in un certo senso una ridefinizione delle basi metodologiche della filosofia in generale.
D'altra parte, invece, per i matematici la soluzione della questione ontologica ha un'urgenza di tutt'altro genere. Infatti, anche se da un lato la geometria, dopo lo

"screditamento" come base per la matematica, a causa della comparsa sulla scena delle geometrie non euclidee, era stata assiomatizzata in maniera impeccabile da Hilbert, è anche vero che quest'ultimo aveva basato la non contraddittorietà del suo sistema sulla non contraddittorietà dei numeri reali e questi a loro volta si riconducevano in ultima istanza ai naturali, ottenendo quella che è nota come "l'aritmetizzazione dell'Analisi". Questo fatto aveva costretto a sua volta i matematici a interrogarsi sulla natura di questi "mattoni primi" della matematica, al fine di salvare su basi sicure tutto il resto della conoscenza matematica. Le risposte fornite dalle correnti fondazionaliste esposte nei paragrafi precedenti sono principalmente risposte di natura matematica ma, eccezione fatta per la proposta intuizionista, esse sono *sospinte dai risultati ottenuti dalla logica* e in particolare dalla nascita della logica simbolica e dall'idea che la sua applicazione alla matematica, cioè l'applicazione di un metodo matematico alla matematica stessa, potesse servire per evitare in maniera definitiva molti problemi derivanti da assunzioni implicite che nel calcolo logico dovevano essere necessariamente esplicitati. Anche il bourbakismo, prosegue Lolli (2001), pur rilegando la logica al ruolo di garante tacito, è stato reso possibile solo perché la logica matematica aveva precedentemente posto le basi nella sistematizzazione del problema dell'infinito attuale nell'ambito della teoria degli insiemi e perché esisteva già l'assiomatizzazione compiuta da Hilbert per la geometria e da Peano per l'aritmetica.

Dunque, per molti versi, negare il ruolo dell'eredità delle scuole fondazionaliste è diventato una sorta di motto per coloro (soprattutto matematici non appartenenti alla comunità scientifica dei logici) che non ritengono che la logica abbia un ruolo importante nella matematica, mentre dall'altra parte enfatizzare la sua importanza è diventato quasi un dovere per coloro che sostengono l'importanza della logica matematica (soprattutto i logici). Caratterizzare gli oggetti matematici, cioè fornire una riposta alla questione ontologica, facendo riferimento solo ad aspetti matematici diventa dunque particolarmente interessante dal punto di vista del primo di questi due schieramenti.

Secondo Lolli, entrambe queste posizioni corrispondono a un'esagerazione dei fatti:

> Entrambi i giudizi sono esagerati, anche se è comprensibile la prima esaltazione nel momento di svolgimento della vicenda, da parte dei protagonisti, mentre è meno giustificato il successivo giudizio radicalmente negativo, che è basato sia su un'incomprensione tecnica sia sull'incapacità di storicizzare il fenomeno (si mette tutto nel calderone della crisi del neo-positivismo). (Lolli, 2001, p. 24)

La posizione di Lolli (2001) è chiara: anche se nessuna delle scuole fondazionali ha raggiunto il proprio obiettivo di rifondare la matematica con le modalità prefissate, le ricerche di ciascuna di esse hanno prodotto risultati importanti che sono stati fondamentali per lo sviluppo successivo della matematica: dal logicismo sono nate la teoria assiomatica degli insiemi e la logica per come la intendiamo oggi; dal formalismo sono nate l'idea di sistema assiomatico moderno e il modo

di affrontare il concetto di non contraddittorietà di una teoria formale assiomatizzata, ma anche, sebbene "in negativo" rispetto all'obiettivo iniziale, i teoremi di incompletezza e di completezza di Gödel; l'intuizionismo ha prodotto, secondo Lolli, una precisazione e un rafforzamento delle dimostrazioni costruttive, ma anche, una volta accettato il linguaggio simbolico e il ruolo della logica intuizionista, uno sviluppo interessante nell'ambito delle logiche dei fasci, aggiungiamo noi; il bourbakismo, infine, prosegue Lolli, sebbene abbia portato, attraverso la sua organizzazione "dall'alto" a un allontanamento della "matematica reale", riferita alla pratica dei matematici, allo stesso tempo ha consentito di cogliere relazioni importanti tra i diversi rami della matematica stessa e fornito un linguaggio unificante alla disciplina.
Nei paragrafi successivi forniremo una breve panoramica su alcune delle principali correnti in filosofia della matematica che sono entrate in scena dopo il naufragio del sogno fondazionalista.

#### 9. 3. 3. 1. Diverse correnti in filosofia della matematica

Al di là delle scuole fondazionaliste già caratterizzate, Lolli (2002a) individua almeno 14 diverse correnti in filosofia della matematica: nominalismo, realismo, platonismo, la tradizione fenomenologica, naturalismo, logicismo, formalismo, costruttivismo, strutturalismo, deduttivismo, fallibilismo, empirismo, schematismo, oltre alla prospettiva semiotica e a quella che egli chiama "filosofia spontanea della matematica" e che oggi è diventata la "filosofia della pratica matematica".
Alle correnti della filosofia della matematica in senso classico precedentemente elencate, si aggiungono prospettive legate agli aspetti sociali e culturali nonché a quelli etici ed estetici, e anche la prospettiva relativa all'*embodied cognition* (letteralmente "mente incarnata"), secondo cui la matematica è il frutto dell'azione dell'essere umano in quanto essere dotato di un corpo che usa la matematica per organizzare e comprendere le sue esperienze nel mondo.
Di seguito tracceremo una breve panoramica delle correnti elencate, senza tuttavia alcuna pretesa di esaustività.

##### 9. 3. 3. 1. 1. La prospettiva costruttivista

Come già anticipato, la prospettiva costruttivista in filosofia della matematica ha molti tratti in comune con l'intuizionismo; secondo essa non esiste conoscenza all'infuori delle costruzioni mentali del singolo soggetto. Dunque, nella corrente costruttivista non si usa parlare di oggetti matematici in quanto a tali entità non viene attribuita un'esistenza oggettiva. Ciò che entra in primo piano è

l'epistemologia, mentre la questione ontologica viene quasi completamente abbandonata. La realtà è solo quella che l'essere umano costruisce attivamente, durante le proprie esperienze in contesti specifici.
Tuttavia, anche nella corrente costruttivista, la quale ha avuto seguito in tantissime discipline, tra le quali la psicologia e, attraverso essa, in didattica della matematica, ci sono diverse concezioni di oggettività che si ripercuotono sull'idea di oggetto in tale corrente filosofica. In ambito psicologico si può distinguere un costruttivismo improntato alle idee di Piaget da uno improntato alle idee di Vygotskij: per entrambi la conoscenza è una costruzione attiva dell'individuo in contesto, ma mentre per Piaget chi apprende è per così dire sospeso in un vuoto sociale e culturale, per Vygotskij la costruzione della conoscenza è un fatto essenzialmente sociale e culturale. In questo senso in didattica della matematica si distingue espressamente tra costruttivismo radicale (von Glaserfeld, 1995) e costruttivismo sociale (Ernest, 1994, 1998).
Mentre la prospettiva del costruttivismo radicale evita completamente il discorso ontologico, dato che gli oggetti matematici sono costruzioni mentali dell'individuo, il costruttivismo sociale, pur mantenendo questa impostazione di base, recupera una certa oggettività degli oggetti matematici in termini di conoscenza socialmente condivisa e dunque oggettivata da una comunità.[151]
Dal punto di vista storico le posizioni dei costruttivisti possono essere ricondotte a quelle dei sofisti nell'antica Grecia, i quali avversarono tramite il loro relativismo, basato sull'idea che l'uomo fosse la misura di tutte le cose, l'assolutismo epistemologico e la filosofia dell'Essere parmenideo e della scuola eleatica in generale. Tra i matematici contemporanei posizioni assimilabili in certo senso a quelle costruttiviste sono assunte, come già accennato, per esempio da Kronecker e Brouwer.
Come già evidenziato nel paragrafo dedicato all'intuizionismo, parlando di costruzioni, dal punto di vista matematico si pone il problema della loro accettabilità. Un problema molto dibattuto in matematica in questo senso è che cosa si debba intendere per "costruzione esplicita". Abbiamo già accennato al fatto che si è giunti a considerare accettabili solo costruzioni che richiedono un numero finito di passi, il che ha spinto questa prospettiva nella direzione del concetto di computabilità e di numero computabile di Turing.[152] Infatti, una costruzione può essere pensata come un algoritmo che si svolge in un certo numero di passi e a essa può essere associato un numero. In questo senso è computabile una costruzione che ha un numero di Turing computabile, che può cioè essere esibito da un calcolatore con un grado di precisione scelto a piacere. Dunque, dalle

[151] Ernest (1991/2004) sottolinea che, per quanto riguarda la conoscenza scientifica (egli fa riferimento alla produzione scientifica in matematica), l'oggettività della conoscenza non è un fatto che si ottiene solo attraverso la pubblicazione dei risultati su riviste specializzate, ma soprattutto un fatto del loro riconoscimento nel tempo da parte della comunità scientifica.
[152] Ricordiamo che un numero è computabile se può essere effettivamente "dato", cioè se esiste un algoritmo implementabile da un calcolatore che consente di calcolare una sua qualsiasi cifra decimale, ovvero di calcolarlo con una qualsiasi precisione desiderata o prefissata.

costruzioni degli oggetti matematici si è passati allo studio delle proprietà delle costruzioni, attraverso un passaggio di astrazione che apre nuovi orizzonti, come quasi sempre accade in matematica (D'Amore & Sbaragli, 2020).
Riguardo alle caratteristiche evidenziate nel paragrafo 9.2. del presente capitolo possiamo affermare che per il costruttivismo valgono sostanzialmente le considerazioni fatte riguardo all'intuizionismo, sia per quanto riguarda la dinamicità e la transitorietà degli oggetti, sia per quanto riguarda la considerazione della dimensione semiotica e il modo di inquadrare il significato degli oggetti matematici. Le differenze tra intuizionismo e costruttivismo sono di ordine filosofico (anche se investono in una certa misura gli aspetti epistemologici), piuttosto che di ordine tecnico, in quanto l'intuizionismo si focalizza sull'assunzione che la matematica si fonda sull'intuizione del matematico, nel senso esposto nel paragrafo 9.3.2.4., e che essa si deve basare solo su dimostrazioni costruttive, mentre il costruttivismo non postula altro che la necessità di basare la matematica su dimostrazioni costruttive.
Concludiamo il paragrafo dedicato al costruttivismo rilevando che dal punto di vista matematico nell'ambito di tale corrente della filosofia della matematica è difficile spiegare la relazione tra la matematica consolidata e organizzata in teorie assiomatiche, con i suoi oggetti formali, e la matematica considerata come attività mentale costruibile solo nella mente dell'individuo. Infatti, per poter stabilire una tale relazione non sembra sufficiente la generica idea di oggettività socialmente stabilita e nemmeno il riferimento alla dualità teoria formale - teoria informale messa in evidenza da Lakatos (1976/1979), dove la prima si ottiene per una sorta di astrazione dalla seconda. Torneremo più in dettaglio su tale dualità nel paragrafo dedicato alla prospettiva quasi-empirista (paragrafo 9.3.3.1.4).

### 9. 3. 3. 1. 2. La prospettiva realista

Un'altra corrente in filosofia della matematica è quella realista. Anche al suo interno ci sono diverse posizioni.
In generale, per i realisti gli enti matematici esistono ed esistono indipendentemente dalla mente umana. Tuttavia ci sono posizioni realiste più prettamente platoniche, dette appunto "platoniste", secondo cui tali oggetti esistono in un mondo delle idee, a-umano, e sono accessibili solo all'intuizione tramite l'intelletto. Accanto a questa posizione si possono collocare gli approcci logicisti o ad altri a loro affini. In questo senso si può pensare per esempio a Gödel e alla sua fede nell'esistenza reale dei numeri, ma anche a Frege stesso, come già messo in evidenza nel paragrafo dedicato al logicismo.
Nella corrente realista strutturalista, invece, il cui esponente principale è Shapiro (2000), sulla scia dei lavori di Bourbaki, la questione ontologica non è affrontata a livello oggettuale, cioè in riferimento a singoli oggetti matematici, ma a livello

strutturale, cioè in riferimento alle strutture matematiche di cui gli oggetti fanno parte.
Notiamo che una concezione alternativa di strutturalismo si può considerare quella che si basa sulla teoria delle categorie, la quale è però fondamentalmente diversa da quella di stampo bourbakista poiché in essa l'aspetto strutturale è interpretato in termini di relazioni e processi, attraverso un linguaggio categoriale, piuttosto che in termini di oggetti in senso classico, attraverso un linguaggio insiemistico.[153]
Tornando alle posizioni realiste, possiamo affermare che, mentre la posizione platonista pura (o ingenua) ha grandi difficoltà nello sciogliere il nodo gnoseologico e quello epistemologico, cioè nello spiegare come si possano conoscere gli oggetti matematici che esistono solo nel mondo delle idee, la posizione logicista realista ha qualche vantaggio in più, in quanto suppone come data l'intuizione intellettuale dovuta a una sorta di logica primordiale, propria dell'essere umano, in quanto essere razionale. Che anche questa richieda una giustificazione, che non sia così scontata è fuori dubbio, è certamente vero, ma forse una tale giustificazione risulta meno problematica rispetto a una giustificazione dell'intuizione intellettuale di entità esistenti in un mondo separato da quello in cui è immerso l'essere umano. Ricordiamo infatti che Platone ricorre all'idea di *reminiscenza,* che l'anima conserva delle esperienze fatte prima della nascita per fornire una base epistemologica alla propria filosofia, il che implica l'accettazione di un'anima immortale e della *metempsicosi*, cioè della sua migrazione in diversi corpi. Dal punto di vista della posizione scientifica odierna una tale spiegazione sembra dunque molto più difficile da sostenere rispetto a una che supponga la presenza (almeno in potenza) della razionalità nell'essere umano.
La posizione strutturalista invece fornisce una risposta puramente matematica alla questione ontologica, in quanto si limita a considerare come "reali" gli enti su cui il matematico basa di solito il proprio ragionamento, come quelli di insieme o, nel caso della teoria delle categorie, di categoria.[154]
Dal punto di vista delle caratteristiche evidenziate nel paragrafo 9.2. possiamo affermare che non è possibile asserire qualcosa in generale riguardo alla considerazione della dinamicità degli oggetti matematici negli approcci realisti, in quanto la classificazione in questione non tiene conto di tale aspetto. Tuttavia si potrebbe affermare che le posizioni platoniste ingenue assumono gli oggetti matematici come entità assolute, indipendenti dal tempo e dallo spazio, e quindi non dinamiche ma statiche. Di conseguenza non è possibile parlare di un'ontologia

[153] Notiamo che Mac Lane, il quale è, insieme a Eilenberg, considerato il fondatore della teoria delle categorie, intitolò la propria opera che introdusse la teoria delle categorie in matematica *Categories for the Working Mathematician* (Mac Lane, 1971/1998), mettendo così l'accento sull'utilità *pratica* del linguaggio categoriale.
[154] Evidenziamo che Ernest (1991/2004) mette in evidenza il fatto che il realismo si scontra *necessariamente* con il problema gnoseologico relativo all'accesso agli oggetti matematici situati in un mondo a-umano, ma sottolineiamo che egli prende in considerazione solo la posizione platonista pura, senza chiamare in causa le posizioni realiste logiciste o strutturaliste le quali, come abbiamo mostrato, assumono posizioni molto diverse da quella platonista classica.

transitoria in questi contesti. Per quanto riguarda il realismo logicista, valgono le considerazioni già fatte nel paragrafo 9.3.2.1. Infine, nel caso del realismo strutturalista, è necessario distinguere tra i linguaggi ai quali si appoggia la versione strutturalista: se il linguaggio di riferimento è il linguaggio della teoria degli insiemi, non è possibile parlare di dinamicità degli oggetti matematici e di conseguenza nemmeno di ontologia transitoria; se il linguaggio di riferimento è invece quello categoriale, allora è possibile considerare anche una dinamicità degli oggetti matematici.
Per quanto riguarda l'aderenza a una prospettiva realista o pragmatica, lo stesso nome della categoria di approcci alla filosofia della matematica che stiamo esaminando è indice del fatto che tutti gli approcci che vi appartengono aderiscono a una qualche sorta di realismo, sia esso riferito a una realtà esterna, sia esso riferito a una realtà interna alla matematica come disciplina.
Il ruolo della semiotica non è di per sé caratterizzante per le prospettive realiste, ma essa diventa indispensabile se si considera l'aspetto epistemologico, in quanto le rappresentazioni semiotiche sono necessarie per spiegare l'accesso cognitivo agli oggetti matematici.

### 9. 3. 3. 1. 3. La prospettiva naturalista

Una considerazione a parte merita la posizione filosofica assunta dalla corrente naturalista in filosofia della matematica. In generale, per Quine (1995), sulle cui idee si fonda la filosofia naturalista come filosofia della scienza, è necessaria un'adesione a una qualche ontologia, dato che dal suo punto di vista la scienza deve sostituire la metafisica. In generale, per Quine, un oggetto esiste per una scienza se esiste una teoria scientifica che fa affermazioni su di esso; è dunque l'appartenenza a un discorso di una teoria scientifica a "chiamare in essere" un dato oggetto, sia esso matematico, sia esso appartenente a una qualsiasi teoria scientifica.[155] In questo senso per Quine un'entità esiste se è valore di una variabile vincolata (Bricker, 2016). Per la matematica questo significa che un oggetto matematico esiste in quanto può assumere il valore di una variabile vincolata nel linguaggio di una data teoria matematica. Il vincolo consiste nel fatto che su tale variabile è possibile quantificare in senso universale o esistenziale.
Dal punto di vista epistemologico, Quine adotta il cosiddetto "olismo della conferma", secondo il quale il significato di un'entità e anche di una teoria scientifica è sempre relativo, in quanto esso è determinato da una rete di relazioni, la quale fa sì che sia impossibile considerare il significato di un oggetto o di una teoria come a sé stante, dato che vi è sempre un'indeterminatezza del significato in senso assoluto (Bricker, 2016).

[155] Notiamo qui l'analogia con il concetto di significato di un termine linguistico in Wittgenstein (1953/2003), secondo cui tale significato è dato dal suo uso in un gioco linguistico.

Una caratteristica importante del naturalismo consiste nel fatto che la validità di una teoria può essere data solo dalla sua corrispondenza con le leggi naturali, il che significa per la matematica che solo quella parte di essa che trova applicazione in qualche ambito può essere considerata "reale", nel senso che i suoi oggetti esistono effettivamente. In questo senso la matematica, a differenza delle scienze naturali, non ottiene pienamente una conferma in sé stessa, come invece accade per le scienze naturali, anche se Quine conferisce in ultima istanza uno status di oggetti agli oggetti matematici, in quanto indispensabili per le scienze naturali.
In filosofia della matematica una delle maggiori esponenti del naturalismo è Maddy (1992/2000). Questa Autrice propone un naturalismo matematico centrato sulla teoria degli insiemi, attraverso il quale mostra come gli oggetti matematici esistono in senso naturalista all'interno della matematica e come quest'ultima non abbia necessità di una conferma dall'esterno tramite le sue applicazioni. Inoltre Maddy intende mostrare come attraverso la teoria degli insiemi sia possibile tenere conto anche della pratica della matematica da parte dei matematici, senza necessità di uscire dalla matematica per ragionare su essa. In questo senso il suo approccio non è in realtà un approccio in filosofia della matematica in senso stretto, ma un tentativo di collegare quest'ultima con la pratica della matematica.
La prospettiva naturalista può essere accomunata a quella realista strutturalista, già discussa nel precedente paragrafo, almeno per quanto riguarda le questioni che sono d'interesse per la presente trattazione; per essa valgono quindi le considerazioni già fatte nel paragrafo precedente (9.3.3.1.2.). Abbiamo voluto accennare in maniera esplicita a questa prospettiva, in quanto essa consente di mostrare in quali termini le questioni ontologica ed epistemologica possano ricevere una risposta del tutto interna alla matematica, e come per rispondere a esse non è necessario uscire dalla disciplina stessa e dalle sue teorie.

### 9. 3. 3. 1. 4. La prospettiva quasi-empirista

Un'altra corrente filosofica è quella che Lolli (2001) chiama "il nuovo empirismo" e che, come egli sottolinea, non deve essere confusa con l'empirismo matematico classico per il fatto che l'empirismo matematico in senso classico voleva fondare il concetto di numero sull'esperienza sensibile, mentre il nuovo empirismo si focalizza sulle *procedure* matematiche, soprattutto quelle di scoperta e conferma dei risultati, intendendo mostrare che esse non si distinguono sostanzialmente dai metodi delle scienze empiriche, prima di tutte la fisica. Lolli vede come precursore di questa impostazione Euler e come suoi esponenti moderni Pólya, Putnam, Lakatos, Popper, con contributi di Hao Wang e la massiccia diffusione di Davis e Hersh (Lolli, 2001).
Un'obiezione che Lolli muove alla corrente filosofica del nuovo empirismo (o "quasi-empirismo"), è che in essa, puntando sugli esperimenti come fonti di

conoscenza in matematica, si perde di vista la dimostrazione e il suo ruolo in matematica:

> La caratteristica principale delle nuove impostazioni è quella di vedere la matematica come un fatto storico, e di studiarne i meccanismi di formazione *in fleri*. Ne vengono in generale esempi e storie molto più affascinanti che non la presentazione della matematica consolidata. Purtroppo, è la dimostrazione che scompare spesso da questi resoconti, sostituita da quella che viene chiamata dimostrazione informale, la quale viene contrapposta non tanto a quella formale quanto alla logica in sé. Non solo la dimostrazione scompare, ma addirittura è combattuta ideologicamente, per una sua indebita identificazione con il formalismo. (Lolli, 2001, p. 33)

Lolli (1987) mette anche in evidenza il fatto che i quasi-empiristi basano la loro tesi sul carattere sperimentale della matematica sull'esempio della dimostrazione del Teorema dei Quattro colori, che fu la prima dimostrazione di un teorema matematico condotta da un calcolatore. Tale dimostrazione sollevò molti dubbi e molte controversie, dato che pose per la prima volta il problema delle dimostrazioni troppo lunghe da essere condotte o anche solo verificate da un essere umano, escludendo così la possibilità di ricorso all'accettazione sociale della dimostrazione. Ma tale dimostrazione introduceva secondo molti anche un elemento empirico, dovuto all'intervento di una macchina soggetta a errori in quanto tale, con la susseguente necessità di ripetere più volte la dimostrazione per incrementare il grado di affidabilità del risultato. Lolli fa notare che semmai tale dimostrazione è il *trionfo* della logica simbolica, sulla quale si basa l'algoritmo del calcolatore, piuttosto che una dimostrazione del carattere empirico della matematica e del susseguente carattere sperimentale delle sue dimostrazioni. A supporto della tesi che per i matematici la matematica è comunque una scienza non sperimentale, egli evidenzia il fatto che l'idea sostenuta da Putnam che se "l'Ipotesi di Riemann fosse verificata in un numero enorme di casi mediante calcolatore (…) allora saremmo legittimati a dire che l'ipotesi è stata verificata, e che può essere accettata senza riserve" (Putnam, citato in Lolli, 2001, p. 17) è contraddetta da diverse posizioni espresse da parte di altri matematici. Come esempi di tali posizioni Lolli cita Rotman e Resnik. Rotman fa notare che la congettura di Goldbach è dimostrata per un numero elevato di casi di numeri pari *m*, ma che "con tutta questa evidenza positiva, tuttavia, nessun matematico dirà che la congettura deve perciò essere vera per tutti gli *m*" (Rotman, 1998, p. 4, citato in Lolli, 2001, p. 33).
Resnik invece afferma che:

> Caratteristica esclusiva della matematica è che fintanto che sembra possibile dimostrare (o refutare) una congettura, i matematici la considereranno un problema aperto, anche quando, secondo i criteri delle scienze naturali, l'evidenza non deduttiva a favore del risultato (o della sua negazione) è schiacciante. (Resnik, 1997, p. 138, citato in Lolli, 2001, p. 34)

Lolli conclude poi mettendo in evidenza il ruolo imprescindibile del livello logico per le dimostrazioni matematiche: “le tendenze storiche ed empiristiche tendono a dimenticare, o a non considerare il fatto che la dinamica della costruzione di soluzioni e di teorie si svolge sempre ad un livello logico e si articola nella costruzione di dimostrazioni” (Lolli, 2001, p. 34).
Nonostante le critiche mosse da Lolli a questa corrente filosofica, è vero che la posizione quasi-empirista di Lakatos (1976/1979) ha avuto molta risonanza in didattica della matematica, non ultimo sulla scia dei lavori di Davis e Hersh (1981) e di Tymoczko (1985).
Vediamo quale posizione assume Ernest (1991/2004) riguardo al quasi-empirismo di Lakatos.
Nella ricerca di una filosofia matematica adatta a fungere da base per la didattica della matematica, Ernest individua i seguenti quattro criteri di efficienza, che rispecchiano sia aspetti legati a fattori “esterni” (come la storia della matematica, la genesi e la pratica della matematica) sia ad aspetti “interni” (relativi all’epistemologia e all’ontologia):

> These criteria can be stated more explicitly: a proposed philosophy of mathematics should account for: (i) Mathematical knowledge: its nature, justification and genesis, (ii) The objects of mathematics: their nature and origins, (iii) The applications of mathematics: its effectiveness in science, technology and other realms, (iv) Mathematical practice: the activities of mathematicians, both in the present and the past. (Ernest, 1991/2004, p. 27)

Ernest esamina varie correnti filosofiche, giungendo alla conclusione che solo il quasi-empirismo di Lakatos soddisfa tutte queste caratteristiche e che solo esso è in grado di accogliere una concezione fallibilista[156] della matematica, che secondo Ernest è necessaria poiché è indispensabile tenere conto del fatto che una posizione assolutista riguardo alla verità in matematica non è sostenibile, in quanto: “deductive logic *only transmits truth*, it does not inject it, and the conclusion of a logical proof is at best as certain as the weakest premise” (Ernest, 1991/2004, p. 13, enfasi nostra).
Ernest riassume come segue le cinque tesi del quasi-empirismo lakatosiano: (1) la conoscenza matematica è fallibile; (2) la matematica è ipotetico-deduttiva; (3) la storia è centrale; (4) la “supremazia” della matematica informale è affermata; (5) una teoria della creazione di conoscenza è inclusa (Ernest, 1991/2004, pp. 34–35).
Data la centralità delle posizioni quasi-empiriste per molti approcci in didattica della matematica [si veda per esempio Balacheff (1991), ma anche l’analisi di Sriraman e English (2010), in riferimento al ricorso al pensiero di Lakatos nelle teorie in didattica della matematica], ci soffermiamo su alcune delle tesi del quasi-

[156] Ricordiamo che per Lakatos (1976/1979) la conoscenza matematica è fallibile in quanto procede per dimostrazioni e confutazioni, cioè falsificando le conclusioni e restringendo le ipotesi di dimostrazioni già prodotte attraverso il ricorso a controesempi e producendone delle nuove che tengano conto di tali confutazioni. In questo senso le “verità” delle dimostrazioni non sono verità eterne e indiscutibili, ma solo temporanee e soggette a revisioni.

empirismo lakatosiano come esso viene presentato da Ernest. Nel fare ciò ci riferiamo quindi a Ernest (1991/2004).
La prima tesi, cioè che la conoscenza matematica è fallibile, si basa su quella di Popper riguardo alle scienze empiriche, secondo cui la produzione scientifica procede per congetture e confutazioni, in cui è centrale il ruolo dei falsificatori naturali, cioè dati derivanti dall'osservazione scientifica che contraddicono le conclusioni tratte, mettendo così alla prova le teorie e inducendo ad adattarle all'occorrenza. In riferimento alla matematica, tali falsificatori sono principalmente i controesempi.
La seconda tesi, cioè che la matematica è ipotetico-deduttiva, può sembrare messa in discussione dalla prima tesi, ma in realtà ciò non avviene poiché il quasi-empirismo non va inteso in termini di contrapposizione di un metodo induttivo a uno deduttivo (come avviene nell'empirismo), ma in termini di metodo dinamico di costruzione della conoscenza, in cui sono contemplati anche i passaggi che precedono la stesura definitiva del teorema e che lasciano anche aperta la porta alla scoperta di eventuali controesempi non emersi fino a quel momento. In questo senso la caratteristica della matematica come scienza ipotetico-deduttiva non si basa sulla trasmissione della verità dalle premesse alle conclusioni, ma su una sorta di inversione del concetto, cioè sulla ri-trasmissione della falsità dalle conclusioni falsificate tramite i falsificatori alle ipotetiche premesse: "As in science, the emphasis in such a system is not on the transmission of truth from true premises to conclusions (the absolutist view), but on the re-transmission of falsity from falsified conclusions ('falsifiers') to hypothetical premises" (Ernest, 1991/2004, p. 35).
La seconda tesi è strettamente legata alla quinta poiché essa contempla una versione dinamica della conoscenza, cioè il processo della sua costruzione, in cui si può vedere il percorso costruttivo di un teorema, inclusa la verifica della sua validità tramite la ricerca di controesempi; ma la posizione quasi-empirista va anche oltre, in quanto sospende il giudizio sulla possibilità di individuazione di falsificatori anche dopo che un enunciato è stato accettato come dimostrato dalla comunità scientifica e ha acquisito dunque la caratteristica di teorema. In questo senso la matematica è una scienza fallibile come le scienze empiriche.
La terza tesi, cioè il fatto che la storia è centrale, riguarda l'aspetto epistemologico della filosofia della matematica, nel senso che essa, per come è intesa da Lakatos, deve rendere conto non del come sia possibile conoscere (questione gnoseologica) ma di come è stata prodotta la conoscenza matematica esistente (questione epistemologica) e in tale contesto la considerazione della sua storia è fondamentale (Ernest, 1991/2004). In questo senso il quasi-empirismo si prefigura come una filosofia descrittiva e non prescrittiva. Inoltre, la certezza dei suoi risultati non è assoluta e indiscutibile, ma si conforma come una conoscenza socialmente costruita e condivisa e soggetta a possibili rimesse in discussione nel tempo.
La quarta tesi, cioè che la matematica informale ha un'importanza primaria rispetto a quella formale, richiede qualche spiegazione in più su che cosa si debba

intendere per "teoria informale" in questo contesto. La matematica informale non va intesa solo come qualcosa di legato all'intuizione, ma nel senso di una vera e propria rete di conoscenze non formalizzate. Ernest scrive quanto segue a tale proposito:

> To the traditional stratum of formalized mathematical knowledge he [Lakatos] adds a new, lower stratum, namely that of informal mathematical knowledge. To this extended system he adds a dynamic, which shows not only how knowledge in the lower stratum develops, but also the relationship between the two strata. In particular, how knowledge in the lower stratum is reflected upwards, by formalization, to form idealized images at the upper level, which are seen as the indubitable truths of mathematics. (Ernest, 1991/2004, p. 38)

La matematica informale funge dunque da fonte per le formalizzazioni e costituisce anche "il materiale" per l'analisi storica, nonché il terreno su cui si individuano i falsificatori. È importante sottolineare che la conoscenza matematica informale non va considerata solo come una pratica che conduce verso quella formale, ma come prodotto in sé, di primaria importanza rispetto a quella formale:

> Informal mathematics is of paramount importance, both as a practice and as a product. As a product, it is the source of all formal mathematics, since it is what is formalized. It is also, as we have seen, the source of potential falsifiers of formal mathematics. The importance of mathematical practice is that it is the 'stuff' of the history of mathematics, and the quasi-empirical source of mathematics. It provides individuals with the premises and conclusions of deductive mathematics (informal axioms, definitions and conjectures), and the informal proofs through which the premises and conclusions are connected. (Ernest, 1991/2004, p. 36)

L'inversione del concetto di ipotetico-deduttività dalla trasmissione di verità dalle ipotetiche premesse alle necessarie conclusioni, alla ri-trasmissione della falsità dalle conclusioni falsificate alle ipotetiche premesse porta con sé anche un altro aspetto importante: cioè che l'esistenza di falsificatori non invalida la teoria informale ma che è testimonianza del fatto che gli assiomi scelti non hanno espresso in maniera adeguata la fonte della teoria formalizzata, cioè la teoria informale:

> Since axiomatic theories are formalizations of previously existing informal mathematical theories, their potential falsifiers are the informal theorems of the pre-existing theory, (in addition to formal contradictions). The existence of such a (informal theorem) falsifier shows that the axiomatization has not validly expressed the informal theory, i.e. its source. (Lakatos, 1978, citato in Ernest, 1991/2004, p. 35)

Diventa dunque chiaro come sia giustificabile la quinta tesi, cioè che il quasi-empirismo fornisca anche una teoria della creazione della conoscenza, cioè che esso abbia una sua epistemologia endogena, che non necessita di interpretazioni esogene per essere elaborata. In questo senso Ernest si riferisce a quello che Lakatos chiama "pattern of mathematical discovery", consistente in quattro passaggi che riguardano il lavoro del matematico in riferimento alla produzione di

un teorema, a partire dalla congettura, attraverso la dimostrazione (informale), la valutazione di controesempi, con il riesame finale della dimostrazione, a cui si aggiungono altri tre passaggi che rappresentano invece un esame della posizione della nuova conoscenza all'interno della rete delle conoscenze pregresse e gli effetti che essa ha nel contesto, nonché l'apertura verso nuove domande che tale esame suggerisce.
Da quanto qui esposto, ci sembra di poter affermare che i rilievi mossi da Lolli al quasi-empirismo e la posizione assunta da Ernest in riferimento a esso sembrano inconciliabili a causa delle loro diverse visioni della matematica: quella di Lolli è di natura logico-matematica, legata alla logica classica, che deve necessariamente fare riferimento solo alla versione consolidata e "finale" dei risultati matematici, senza tenere conto della pragmatica; mentre quella di Ernest (che interpreta Lakatos) è proprio di natura pragmatica, cioè riferita alla matematica come pratica creativa, che non tiene conto del fatto che le relazioni tra matematica formale e informale necessitano anche di una giustificazione dal punto di vista logico.
A nostro avviso si tratta di due visioni complementari della matematica che non sono in conflitto tra loro e in questo senso riteniamo che non sia opportuno parlare di "supremazia" della matematica "informale" su quella formale, ma di complementarietà tra aspetto creativo e aspetto organizzativo-teorico della matematica, aspetti che sono in realtà fortemente intrecciati tra loro ma che afferiscono a paradigmi considerati finora separati.
Per quanto riguarda la questione ontologica, la problematica di fondo in questo senso sembra essere la sostanziale contrapposizione tra la necessità di considerare gli oggetti matematici come statici per poterli comunicare e organizzare in teorie, e la necessità di presa in considerazione di una dinamicità per gli oggetti matematici che tenga conto della loro evoluzione concettuale. Il fatto che per il quasi-empirismo tali oggetti non sono stabili e definiti una volta per tutte, li rende difficilmente inquadrabili da un punto di vista ontologico classico. Questo era già emerso anche nella discussione della natura degli oggetti matematici nell'intuizionismo. D'altro canto possiamo notare che il quasi-empirismo consente di inquadrare in maniera molto chiara la dinamicità degli oggetti matematici, anche se, come già evidenziato, questo fatto induce a considerare più che altro i processi, trascurando la dimensione degli oggetti e il ruolo della dimostrazione, come evidenziato da Lolli: "Le tendenze storiche ed empiristiche tendono a dimenticare, o a non considerare il fatto che la dinamica della costruzione di soluzioni e di teorie si svolge sempre ad un livello logico e si articola nella costruzione di dimostrazioni" (Lolli, 2001, p. 18).
Infatti, ciò che manca è una caratterizzazione tecnica del passaggio da quella che Lakatos chiama "matematica informale" a quella che egli chiama "matematica formale", nel senso che non è chiaro quali siano gli strumenti tecnici che permettono tale passaggio.

Notiamo che il quasi-empirismo prende in considerazione, almeno implicitamente, una ontologia transitoria, in quanto considera un'evoluzione degli oggetti nel tempo.
Come anche il costruttivismo, il quasi-empirismo non considera centrale la semiotica per l'attività matematica, pur non negando il ruolo delle rappresentazioni.
L'approccio quasi-empirista aderisce chiaramente a una visione pragmatica del significato degli oggetti matematici, in quanto essi sono considerati come creazioni dell'essere umano e il loro significato è soggettivo, ma nel costruttivismo sociale è contemplata anche una componente oggettiva della conoscenza, in termini di conoscenza matematica socialmente oggettivata.
Per quanto riguarda la questione epistemologica, essa riceve una risposta interna molto articolata, messa in evidenza dalla quinta tesi di Ernest relativa al quasi-empirismo di Lakatos, ma riteniamo importante sottolineare che l'*euristica* tratta dall'esame dalla pratica matematica [così come anche quella di Pólya (si veda a tale proposito D'Amore & Fandiño Pinilla, 2020)] non deve essere confusa con una teoria dell'apprendimento in matematica.

### 9. 3. 3. 1. 5. La prospettiva dell'*embodied cognition*

Un'altra prospettiva in filosofia della matematica che ha avuto ed ha una certa importanza anche in didattica della matematica è quella legata all'*embodied cognition*, le cui radici affondano principalmente nell'opera di Lakoff e Núñez (2000) *Where mathematics comes from*.
In questa prospettiva la matematica è vista come il prodotto della cognizione umana, i cui strumenti sono costituiti da tutto ciò che l'essere umano ha a disposizione per dare senso alla propria esperienza corporea: la vista, il tatto, la posizione e il movimento nello spazio, l'udito, il linguaggio etc. La matematica non esiste di per sé, è l'essere umano che la costruisce ogni volta per sé, ma le sue costruzioni hanno una certa oggettività perché l'apparato cognitivo umano è costituito dalla natura fisica in cui l'essere umano è immerso. Secondo gli autori, tutta la matematica verrebbe costruita a partire da esperienze fisiche di base, tramite metafore e analogie che consentono l'astrazione e la generalizzazione.
L'idea dell'*embodied cognition* parte dal presupposto che il pensiero (matematico) si struttura a partire dalle esperienze corporee del soggetto nella quotidianità e che gli strumenti cognitivi sui quali si basa la sua costruzione sono principalmente, come già accennato, le metafore e le analogie. Le metafore possono essere metafore fondanti (*grounding metaphors*) o metafore di collegamento (*linking metaphors*). In entrambi i casi c'è un dominio sorgente (*source domain*) e un dominio obiettivo (*target domain*). Nel caso delle *grounding metaphors* il dominio sorgente è un dominio concreto, cioè appartenente all'esperienza quotidiana,

mentre il dominio obiettivo è un dominio matematico astratto; nel caso delle *linking metaphors* sia il dominio sorgente sia il dominio obiettivo appartengono alla matematica. Anche le analogie sono relazioni strutturali stabilite tra due domini ma, a differenza delle metafore, nel caso dell'analogia i due domini sono noti, mentre nella metafora il secondo dominio emerge nel momento in cui la metafora viene elaborata.
Una critica mossa alla teoria dell'*embodied cognition* da parte di Lolli è la seguente:

> (…) considerare certe analogie come fondanti ed originarie è sospetto, innanzi tutto perché sembra che venga suggerito che si deve tornare alla fonte di questa, per sviluppare i ragionamenti; quindi le idee si articolerebbero nella fonte, e non nel linguaggio simbolico matematico, a cui sarebbe soltanto trasferito il risultato o la scansione del ragionamento. In secondo luogo, non siamo in grado di giustificarle come una relazione tra un dominio del tutto non matematizzato e uno invece puramente simbolico. (Lolli, 2002b, p. 225)

Dunque, per Lolli non è chiaro come si giustifica il fatto che, supposto che l'analogia tra domini sia la base dell'attività di pensiero del matematico e che le *grounding metaphors* sfruttano tali analogie, buona parte della matematica abbia la necessità di essere articolata nel linguaggio simbolico (già a partire dal sistema posizionale) e non trova elementi corrispondenti nel dominio della vita quotidiana (per esempio, anche se i raggruppamenti di oggetti possano essere una rappresentazione utile per la concettualizzazione di un principio fondamentale del sistema numerico, il fatto che si debba raggruppare in multipli di 10, nel caso del sistema decimale, non ha un riscontro nella vita quotidiana ma è un fatto esclusivamente matematico e può emergere solo dall'interno della matematica). Inoltre, Lolli non ritiene possibile stabilire un'analogia tra due domini in cui uno non è per nulla, e l'altro eventualmente del tutto, formalizzato (o formalizzabile).
A nostro avviso, anche in questo caso nelle posizioni di Lakoff e Núñez da un lato e di Lolli dall'altro si contrappongono due approcci completamente diversi alla matematica: uno basato su assunzioni proprie delle scienze cognitive, mentre l'altra su posizioni logico-matematiche. Come accade in tutte le scienze, ciò che in esse si rileva dipende dagli strumenti adottati per la rilevazione e del tipo di analisi che in esse è usuale fare di tali rilevazioni. In altre parole: anche se si accettasse che entrambe le posizioni studino "la stessa matematica", cioè se si ammettesse l'oggettività della conoscenza matematica, il ricorso a strumenti di ricerca diversi produrrà comunque immagini diverse di tale oggetto, le quali non sono necessariamente traducibili l'una nell'altra, ma sono utili per rendere più completo il quadro relativo all'oggetto studiato, in questo caso appunto la matematica. Studiare la matematica per come essa viene concepita dal punto di vista cognitivo e studiarla per come in essa risultano collegabili i concetti consolidati dal punto di vista logico-matematico significa studiarla con obiettivi e strumenti diversi, ottenendo risultati diversi e non necessariamente commensurabili.

Un problema può nascere quando una delle due posizioni cerca di tradurre i risultati dell'altra nella visione dell'oggetto di conoscenza prodotta dal proprio paradigma oppure quando l'altra cerca di fornire una giustificazione nel proprio paradigma di aspetti che esso non consente di contemplare.
Nonostante le critiche, la teoria della mente incorporata risulta particolarmente affascinante per la didattica della matematica in quanto consente di tenere conto anche di aspetti proto-matematici che non trovano un'opportuna formulazione nella "matematica adulta" o consolidata. Ma la sua portata va oltre questo aspetto più prettamente utilitaristico, in quanto essa consente di considerare il corpo dell'essere umano non solo come "il contenitore" fisico della mente conoscente, ma come il suo principale *strumento di conoscenza*. In questo senso conferme importanti arrivano anche dalla matematica stessa, in particolare dagli studi relativi alla "matematica del vivente" (Longo, 2008; 2015), cioè dallo studio di possibili modelli matematici che siano in grado di descrivere l'evoluzione degli organismi viventi. Infatti, in Longo (2008) viene messo in evidenza il fatto che l'organizzazione cognitiva della realtà che ci circonda si basa su due pilastri: simmetria e ordinamento. Longo mostra come la geometria euclidea e l'aritmetica possono essere ricondotte a tali principi base, che "non sono esclusivamente principi matematici ma costituiscono, in generale, i pilastri della nostra relazione conoscitiva con il mondo" (Longo, 2008, p. 5). Dunque, per quanto riguarda i principi *primi* della matematica *dal punto di vista cognitivo*, essi sembrano affondare le proprie radici nell'esperienza del mondo da parte dell'essere umano. Non dovrebbe però sorprendere se questi non si presentano allo stesso tempo come i principi primi della matematica *dal punto di vista logico-matematico* in senso classico.
Nella prospettiva dell'*embodied cognition* non vi è un'ontologia in senso classico, cioè se non in termini relazionali, in quanto si suppone come data la capacità di creare e riconoscere metafore e analogie.
Anche in questa prospettiva è difficile parlare di oggetti matematici in senso classico, in quanto la conoscenza è definita solo in termini relazionali, sulla base dei concetti di metafora e analogia, e in termini di processi, se si considerano tali relazioni come concatenate nel tempo. Dunque, anche in questo caso, se di "oggetti" matematici si volesse parlare, questi si configurerebbero come "entità dinamiche", cioè in evoluzione nel tempo, piuttosto che come entità statiche e definite una volta per tutte. Questo rende quindi difficile un inquadramento sia dei processi sia degli oggetti, in quanto sembra più appropriato parlare di concetti in evoluzione piuttosto che di oggetti matematici. Tuttavia si può anche affermare che nel momento in cui una metafora fa emergere il suo *target domain*, essa "crei" una sorta di oggetto cognitivo che può essere considerato come un'entità a sé stante. La questione relativa all'ontologia transitoria riceve a nostro avviso una risposta positiva nella prospettiva dell'*embodied cognition* e anzi, in essa sono messi in evidenza anche gli "strumenti tecnici" (metafore e analogie) che

consentono di spiegare la modalità con cui gli oggetti matematici si trasformano ed evolvono nel tempo.
La questione relativa al ruolo della semiotica riceve risposte diverse se si considera l'*embodied cognition* nella sua versione "più genuina", cioè riferita al lavoro citato di Lakoff e Núñez (2000) o se si considerano le evoluzioni più recenti in tale direzione che mirano a coniugare l'aspetto cognitivo con quello relativo alla semiotica in generale e al linguaggio in particolare, sintetizzabili nel concetto di semiotica cognitiva. In questo senso Fusaroli e Paolucci (2011) scrivono:

> Models of abstract cognition and language were increasingly focused on the complex articulation between meaning, perception, categorisation and sensory and bodily dimensions. The different positions developed through this approach were heterogeneous and subtly nuanced, but they all agreed that the process of semio-linguistic construal where grounded on the same cognitive processes involved in the processing of encyclopaedic knowledge and in perception. (Fusaroli & Paolucci, 2011, p. 8)

In quest'ottica la dimensione semiotica diventa centrale anche per la prospettiva dell'*embodied cognition*, in quanto tramite essa la semiotica classica esce dal contesto puramente linguistico e diventa una semiotica cognitiva, in cui l'essere umano partecipa con tutto il proprio corpo alla produzione ed elaborazione semiotica.
Per quanto riguarda la presa in considerazione dell'aspetto epistemologico, possiamo affermare che esso è in primo piano nella teoria dell'*embodied cognition*, in quanto la teoria si basa su risultati derivanti dalle scienze cognitive, come esposto in precedenza.
Infine, l'approccio al significato degli oggetti in questa prospettiva non è facilmente classificabile come pragmatico o realista. Infatti, da un lato il significato di un oggetto dipende dalle metafore o analogie che il soggetto è in grado di stabilire o riconoscere ed è dunque soggettivo; dall'altro lato però si suppone che vi sia una certa oggettività e uniformità nello spettro di metafore e analogie che portano alla costituzione degli oggetti matematici.

### 9. 3. 3. 1. 6. La prospettiva socioculturale

Un'altra classe di correnti filosofiche in filosofia della matematica a cui vogliamo fare brevemente cenno sono quelle che vedono la matematica come un sistema culturale e/o come prodotto sociale.
Come iniziatore della prospettiva culturale in filosofia della matematica Lolli indica Wilder (1981):

> Dopo aver definito i sistemi culturali, ed aver riconosciuto la matematica come un esempio particolare di questi, Wilder introduceva alcuni concetti adatti al loro studio, come quelli di tensione, consolidamento, pressione ambientale; formulava quindi

> alcune leggi di evoluzione, relative all'accettazione di un nuovo concetto, al suo radicamento, alla sua diffusione o al suo isolamento, al ruolo dei problemi e delle soluzioni, al presentarsi di discontinuità, al fenomeno delle anticipazioni e delle scoperte multiple, e molte altre, cercando di coprire tutti gli aspetti dei fenomeni importanti nella storia della matematica. (Lolli, 2001, p. 31)

In particolare, sottolineiamo che per quanto riguarda l'aspetto ontologico, per Wilder l'unica dimensione di realtà che può essere riconosciuta ai concetti matematici consiste nel considerarli in termini di elementi e artefatti culturali.
La prospettiva sociale è in accordo con quella culturale e quindi interpreta la matematica come un prodotto culturale, oltre che storico, ma mette in forte evidenza gli aspetti sociali che sono fondamentali in termini di giudizio e accettazione dei risultati e delle metodologie. Secondo questa corrente non ci sono significati assolutamente oggettivi in matematica, ma le consuetudini delle comunità e la formazione condivisa dei loro membri fanno sì che ci sia una certa condivisione e relativa stabilità e uniformità nei criteri di qualità relativi ai risultati e nei metodi in un dato momento dell'evoluzione storica della disciplina.
In generale, nella prospettiva socioculturale l'accesso alla conoscenza è un accesso a una conoscenza culturalmente costituita e determinata e socialmente oggettivata. Anche se le due dimensioni, quella sociale e quella culturale, sono strettamente connesse tra loro, esse si ripercuotono in maniera differente sull'idea di oggetto matematico. Infatti, mentre la dimensione sociale incide sulla natura dell'oggettività di tali oggetti (oggettività in termini di accettazione sociale piuttosto che di oggettività in termini di esistenza indipendente dall'essere umano), la dimensione culturale incide sull'identità degli oggetti matematici (molteplicità di "risposte" possibili ai problemi matematici e quindi diverse possibili formulazioni dello "stesso" oggetto matematico). Per quanto riguarda la dimensione culturale, è importante evidenziare che, pur riconoscendo la potenziale dipendenza dell'oggetto matematico dalla cultura che lo ha fatto emergere e da quella in cui esso viene insegnato/appreso, riteniamo che sia possibile supporre una certa uniformità di riferimento almeno per quanto riguarda gli oggetti matematici nella loro forma consolidata e accettata dalla comunità scientifica dei matematici.
In didattica della matematica la prospettiva socioculturale si rispecchia per esempio nella teoria dell'oggettivazione (Radford, 2008a, 2019), la cui ontologia è stata già ampiamente discussa in riferimento alla Definizione 3 del capitolo precedente (si veda il paragrafo 8.3.). Sottolineiamo ancora una volta che una caratteristica importante di questa teoria risiede nel fatto che in essa la conoscenza concettuale è inscindibile dal soggetto conoscente e dal suo essere immerso in una cultura e in una società. Infatti, in questo senso è centrale il concetto di oggettivazione sociale della conoscenza culturalmente determinata, ma anche la sua soggettivazione, in termini di realizzazione dell'essere umano stesso. Osserviamo però che nonostante l'acquisizione di conoscenza in matematica in una prospettiva socioculturale sia strettamente legata all'evoluzione dell'essere

umano che l'acquisisce, in questa prospettiva è possibile anzi, necessario, parlare di oggetti matematici, in quanto lo stesso termine "oggettivazione" presuppone che ci sia una qualche entità che deve essere riconosciuta e fatta propria.
In una prospettiva socioculturale il ruolo della semiotica è fondamentale, come si evince anche dal ruolo a essa attribuito nella teoria dell'oggettivazione. Infatti, è attraverso le rappresentazioni semiotiche che la conoscenza matematica culturalmente costituita può essere oggettivata e fatta propria dagli individui, nel contesto dell'attività sociale.
Non ci soffermiamo ulteriormente sulle questioni riguardanti la dinamicità e la transitorietà degli oggetti matematici considerati nella teoria dell'oggettivazione, che qui assumiamo come esempio concreto di teoria che aderisce a una prospettiva socioculturale, dato che queste questioni sono state già discusse nel capitolo 8. Ricordiamo soltanto che la definizione di oggetto matematico fornita in tale teoria è chiaramente di tipo epistemologico e tiene conto di tutti gli aspetti evidenziati nel paragrafo 9.4. del presente capitolo e che in essa l'attribuzione di significato è di natura pragmatica.

#### 9. 3. 3. 1. 7. La prospettiva fenomenologica

In questo paragrafo ci soffermiamo sulla concezione fenomenologica in filosofia della matematica nella sua versione sorta in riferimento alla fenomenologia trascendentale (Husserl, 2020).
Nella filosofia trascendentale la conoscenza scientifica richiede una sospensione del giudizio sull'esistenza e sulla natura della realtà accessibile tramite l'esperienza sensibile. Ciò non significa che venga negata l'oggettività del mondo reale; significa solo che il mondo è "messo tra parentesi" o "neutralizzato" (Husserl, 2020, p. 136 e p. 138), come risultato di una riduzione fenomenologica che Husserl chiama *epoché*.
Husserl (2020) distingue tra *dati di fatto*, in riferimento ai quali si parla di *esistenza*, e *eidos*, cioè la pura essenza.[157] In analogia con queste due coppie di concetti troviamo i concetti di *visione* (o intuizione) *individuale* (o empirica) e di *visione* (o intuizione) *di essenza* (o ideazione di essenza), anche se la distinzione in realtà non è così netta e una visione individuale, portando in sé un'intuizione dell'essenza pura del percepito attraverso i sensi, può essere trasformata in visione di essenza (Husserl, 2020, pp. 107–108). Tuttavia vi è una differenza importante tra *dati di fatto* ed *eidos*, in quanto l'*eidos*, anche se sorge da visioni individuali, che sono necessariamente parziali e inadeguate, "è un oggetto di nuova specie" rispetto all'oggetto sensibile che le ha suscitate (Husserl, 2020, p. 105).

---

[157] Husserl nota che l'*eidos* non è legato all'astrattezza, in quanto esso "può esemplificarsi intuitivamente in dati empirici (della percezione, della memoria, ecc.) come anche in semplici dati della fantasia" (Husserl, 2020, p. 110).

Sulla base della natura dell'oggetto di studio delle scienze, Husserl distingue poi tra *scienze di dati di fatto* e *"pure" scienze di essenze*; al secondo genere appartengono "la logica pura e la matematica pura, le dottrine pure del tempo, dello spazio, del moto, ecc." (Husserl, 2020, p. 112), nelle quali l'Autore sembra far rientrare per esempio la fisica teorica. Le scienze pure di essenza "in tutti i loro passaggi, sono libere da qualunque posizione di dati di fatto, ovvero, che è lo stesso, in esse nessuna esperienza, in quanto coscienza che coglie e quindi pone un'esperienza, cioè una realtà, un'esperienza, può avere una funzione fondamentale" (Husserl, 2020, p. 112).[158]
Alle visioni individuale ed essenziale corrispondono due atteggiamenti diversi nei confronti dell'esperienza: *l'atteggiamento naturale* è riferito al modo di percepire la realtà, mentre *l'atteggiamento eidetico* è riferito al modo di percepire l'*eidos*, cioè l'essenza. Il passaggio dall'atteggiamento naturale a quello eidetico corrisponde appunto all'attuazione della già menzionata *epoché* fenomenologica:

> la quale, dunque, *eo ipso*, mi vieta anche l'attuazione di qualsiasi giudizio, di qualsiasi presa di posizione predicativa nei confronti dell'essere (…) così io neutralizzo tutte le scienze riferentisi al mondo naturale e, per quanto mi sembrino solide, per quanto le ammiri, per quanto poco pensi di accusarle di alcun che, non ne faccio assolutamente nessun uso. (…) Per noi il mondo intero, quale viene posto nell'atteggiamento naturale, sia ora posto fuori della validità: non provato, ma neanche contestato, esso va messo in parentesi. Egualmente tutte le scienze, per buone che siano, fondate positivamente o altrimenti, in quanto si riferiscono a questo mondo, soggiacciono al medesimo destino. (Husserl, 2020, pp. 135–137)

Per comprendere l'idea di oggetto e di ontologia in Husserl è necessario introdurre il concetto di "regione", intesa come una sorta di categoria superiore alla quale afferiscono gruppi di oggetti (empirici); ciascuna regione di questo genere ha un'*essenza regionale* alla quale corrisponde una *scienza eidetica regionale*, che Husserl chiama anche "ontologia regionale" (Husserl, 2020, p. 114).[159] Dunque, sottolinea l'Autore, ogni scienza empirica (o scienza di dati di fatto) che si

[158] Husserl fa in questo senso l'esempio del geometra che traccia figure sulla lavagna: la sua azione non rappresenta un'esperienza fondante per la geometria come scienza eidetica, in quanto egli potrebbe anche solo immaginarsi i tracciati e non deve necessariamente rappresentarli fisicamente (Husserl, 2020, p. 112).
[159] L'idea di essenza e particolarmente di essenza regionale ha una certa somiglianza con l'idea di concetto in Frege (1892a); l'ipotesi di una relazione tra queste due idee è giustificabile anche dal fatto che Husserl fu fortemente influenzato da Frege nel rigettare un approccio psicologistico alle essenze. Husserl stesso fa notare che l'idea di concetto è pericolosamente implicata in suggestioni metafisiche e che al netto di queste, "le essenze sono 'concetti', se per concetti (…) si intendono appunto le essenze" (Husserl, 2020, pp. 117–118). Egli sottolinea poi che, fenomenologicamente parlando, "le 'essenze' sono la radice ancora intatta da cui la tradizione (compreso il kantismo) estraggono e separano intuizione sensibile e concetto, senso e intelletto, creando così il famoso problema di colmare una scissione che essi stessi hanno prodotto" (Husserl, 2020, p. 118). Dunque, si potrebbe affermare che per Husserl l'essenza è un tipo di concetto che tiene insieme l'intuizione e la cosa intuita.

inserisce in una regione, ha fondamenti teoretici essenziali nella corrispondente ontologia eidetica regionale.
Nel circoscrivere l'idea di essenza come oggetto, Husserl fa notare come si debba distinguere da un lato tra 'oggetto' e 'reale' (nel senso che parlare di oggetti non implica parlare di entità "reali") e dall'altro tra 'effettività' e 'reale effettività' (nel senso che l'effettività rimanda a una presenza in riferimento a qualche criterio, mentre la reale effettività rimanda a una presenza che può essere colta in maniera simile alle "realtà"). In questo senso Husserl rigetta l'ipotesi che la sua posizione sia di stampo platonista nel senso classico del termine. Inoltre, come già in Frege (1892a), l'idea di oggetto ha una connotazione nettamente logica in Husserl:

> Se dunque *oggetto* e *reale*, *effettività* e *reale effettività* significano la medesima cosa, in tal caso le concezioni delle idee come oggetti ed effettività è senza dubbio una errata 'ipostatizzazione platonica'. Ma se, come è il caso delle *Ricerche logiche*, i due concetti sono tenuti rigorosamente separati, se l'oggetto viene definito ad esempio come il soggetto di una affermazione vera (categorica, positiva), quale scandalo può ancora sorgere, se non quello determinato da oscuri pregiudizi? (…) In questo senso (…) il numero 2 nella serie numerica, od anche la figura del cerchio nel mondo ideale delle formazioni geometriche, qualunque posizione nel 'mondo' delle proposizioni matematiche, in breve, qualunque elemento ideale, è appunto un 'oggetto'. (Husserl, 2020, pp. 116–117)

Dal punto di vista logico l'"oggetto", per come questo termine è inteso da Husserl, è tutto ciò che può fungere da soggetto in proposizioni vere,[160] ma che ha in sé non solo la componente estensiva degli oggetti (matematici) fregeani, ma anche una componente conoscitiva di tale estensione.
Nella fenomenologia husserliana si parla dell'*Erlebnis* (esperienza) come del tramite per la conoscenza, ma c'è da chiedersi: Che cosa rimane "da esperire", dopo la messa tra parentesi del mondo, esseri umani compresi? Ciò che rimane come "residuo fenomenologico" (Husserl, 2020, p. 152) è il mondo dell'*eidos*, dell'essenza, che è la sfera della coscienza pura.[161]
Lo strumento metodologico di cui la coscienza pura si serve nell'esperienza della sfera eidetica è la riflessione, in quanto "il metodo fenomenologico si muove completamente in atti di riflessione" (Husserl, 2020, p. 154). Husserl sottolinea che la riflessione, di qualunque genere sia, si traduce in una modifica della coscienza, il che significa che, attuando l'esperienza della sfera eidetica nella fenomenologia trascendentale, l'oggetto di conoscenza non è visto come oggettivamente separato dal soggetto, ma in interazione con il soggetto

[160] Notiamo qui la forte analogia tra gli oggetti del "mondo oggettivo" di Habermas, secondo cui tale mondo è "the totality of the entities with regard to which it is possible to formulate true propositions" (Habermas, 1996/1998, p. 310) e l'idea di oggetto in Husserl.
[161] Husserl fa notare che a tale mondo eidetico della coscienza pura appartengono anche la serie numerica e la connessa aritmetica (Husserl, 2020, p. 139), ponendo così le basi dell'aritmetica, e quindi della matematica, nel mondo dell'esperienza eidetica.

conoscente, il quale viene a sua volta modificato tramite la trasformazione della propria coscienza.
L'idea di oggetto è strettamente legata a quella di "regione" e in particolare alla regione "cosa". Di seguito cercheremo di comprendere in che modo si struttura l'essenza (cioè l'*eidos*) di tale regione, che potremmo chiamare "la regione della cosità".
Dato che ogni regione ha un proprio "filo conduttore per un proprio gruppo di ricerche" (Husserl, 2020, p. 185) che costituisce l'oggettività propria di tale regione, questo aspetto vale anche per la regione "cosa". In nessun caso l'essenza può essere "esaurita", cioè colta in maniera adeguata da un numero qualsiasi di visioni essenziali della cosa, ma il processo di coordinamento di tali visioni essenziali non è del tutto libero, in quanto si configura come un "processo concordante di visioni", dove tale concordanza è determinata dalle regole imposte dalle caratteristiche della regione. In questo modo, attraverso un processo continuo e potenzialmente infinito di concordanze di visioni, si costituisce un'unità contraddistinta da sempre maggiore nitidezza di visione dell'idea di "cosa". Riguardo al problema della costituzione dell'unità (o identità), che contraddistingue un'entità oggettuale, Husserl scrive quanto segue:

> Il problema della costituzione chiaramente non significa qui altro che: le serie di apparizioni, necessariamente appartenenti all'unità di un elemento che appare, possono venir intuitivamente dominate con lo sguardo e afferrate teoreticamente (…) esse possono venir analizzate e descritte nella loro caratteristica eidetica e la correlazione tra l'unità di quel determinato elemento che appare e le infinite determinate molteplicità delle apparizioni può essere pienamente penetrata e spogliata così di ogni enigma. (Husserl, 2020, p. 194)

Vi è dunque, nella costituzione delle unità di visioni concordanti, la necessità di poter cogliere tali visioni "in un unico sguardo", cioè coglierle tramite una visione unitaria.
Nella fenomenologia trascendentale husserliana gli oggetti matematici sono una sorta di identità gradualmente consolidate tramite l'esperienza della pura coscienza, il cui senso non può essere colto se non dal contenuto dell'esperienza matematica stessa. Come puntualizza Tieszen: "Objects can be thought of as intentional poles of identity through the manifold activities of consciousness" (Tieszen, 2010, p. 11). Dal punto di vista logico, tali oggetti hanno, come già evidenziato, la caratteristica di poter fungere da soggetti in proposizioni vere.
La costituzione dell'oggetto di conoscenza che abbiamo presentato in precedenza può essere descritta tramite il cosiddetto "metodo eidetico" (*Wesensschau*) (Lohmar, 2010, p. 74). Tale metodo è particolarmente utile nell'illustrare il modo di procedere del matematico durante la produzione di una dimostrazione, la quale culmina con una costituzione della dimostrazione come identità, cioè come oggetto. Tale modo di procedere si basa su un certo tipo di invarianza eidetica che guida l'intuizione nelle dimostrazioni. Una caratteristica importante della visione

eidetica riguarda il fatto che essa coglie solo verità apodittiche, cioè intuizioni necessarie a-priori (Lohmar, 2010).
Lohmar descrive come segue il metodo eidetico in Husserl che consiste nella ricerca di un'invarianza all'interno delle regole di concordanza (o di coincidenza) delle visioni (o intuizioni) di una specifica regione:

> All acts of categorial intuition have the characteristic threefold: simple perception of the object as a whole, pointed concentration on an aspect, and categorial synthesis. Seeing essences has exactly this threefold structure: it begins with a general view on the starting example and the second phase of pointed concentration on an aspect has a manifold of different objects, all of which are variations or modifications of the starting example. In running through these acts that result from variation of the starting example, we are directed to the identical aspects and thus there occurs a synthesis of coincidence. So the second phase consists in all possible variants of the starting example and the third phase is interpreting (or apperceiving) the special synthesis of coincidence as the intuitive representative of what is invariant in all possible cases. (Lohmar, 2010, p. 79)

Il metodo eidetico mostra come Husserl sia attento a fornire anche una giustificazione epistemologica dell'approccio fenomenologico in filosofia della matematica, individuando un metodo di base che consiste: (a) nel cogliere un esempio in maniera sintetica, cioè nella sua totalità e generalità; (b) nell'individuare possibili variazioni sull'esempio di partenza (quella che potremmo chiamare "differenziazione"); (c) nel sintetizzare, in termini di individuazione di un'invarianza tra le variazioni (quella che potremmo chiamare "integrazione"), dalla quale emerge l'identità della dimostrazione come oggetto.
Questa tensione tra oggetto conosciuto e metodo di conoscenza, che potremmo chiamare "epistemologico-metodologica", è molto diversa dalle risposte epistemologiche delle correnti fondazionaliste in filosofia della matematica, in quanto essa tenta, in maniera analoga a quanto già mostrato nel caso del quasi-empirismo di Lakatos, di fornire non solo una giustificazione gnoseologica, cioè relativa alla possibilità di accesso e di trasmissione della conoscenza, ma anche una caratterizzazione di un metodo di ricerca. Tale metodo si basa su osservazioni empiriche, come già notato nel caso dell'euristica di Pólya e Lakatos e, pur essendo un interessante risultato di metariflessione del matematico, non deve essere confusa con una teoria dell'*apprendimento della matematica*, il cui ambito di riferimento è la didattica della matematica e non la filosofia della matematica.
Per quanto riguarda le caratteristiche messe in evidenza nel paragrafo 9.4. del presente capitolo, possiamo affermare che nella prospettiva fenomenologica husserliana gli oggetti matematici sono considerati come entità dinamiche, in quanto Husserl afferma che la visione dell'essenza risulta da un processo di visioni concordanti che circoscrivono l'essenza con sempre maggiore precisione, senza mai "esaurirla". L'oggetto matematico si presenta come una sorta di limite verso il quale tende il processo di visioni essenziali concordanti. In questo senso la prospettiva fenomenologica husserliana tiene conto sia dei processi sia degli

oggetti, anche se l'oggetto in sé appare come un limite effettivamente irraggiungibile tramite il processo. Dato che tale concordanza non è completamente libera, ma è determinata dalle regole imposte dalle caratteristiche della *regione* in cui essa si inserisce e in cui si svolge la ricerca, è possibile affermare, a nostro avviso, che l'approccio al significato degli oggetti matematici in Husserl è di natura realista, simile a quello fregeano. Notiamo inoltre che l'idea di regione in cui si inserisce la ricerca esprime chiaramente il concetto di conoscenza situata o conoscenza in contesto, come già evidenziato da Vergnaud (1990) e Balacheff (1995). Le *regioni* husserliane non sono però in numero finito, come invece lo sono le situazioni problematiche in Vergnaud (1990) e i problemi definitori dei concetti o delle concezioni in Balacheff (1995). In questo senso non è possibile parlare del concetto come invariante situazionale, ma solo come di un processo che tende a esso.
Possiamo dunque affermare che la prospettiva fenomenologica di Husserl tiene conto in maniera esplicita della dinamicità degli oggetti matematici e implicitamente di un'ontologia transitoria, dato che il processo di visioni concordanti può essere visto come un processo di trasformazione di una visione in un'altra con essa concordante.
Nonostante per la fenomenologia il riferimento ai segni sia fondamentale, in quanto il segno rappresenta il "ponte" tra l'esperienza intenzionale della coscienza e il pensiero espresso nella comunicazione, esso non è fondante per il pensiero, in quanto nel monologo interiore l'anima non ha necessità di passare attraverso i segni, dato che essa coglie intuitivamente il significato dell'esperienza intenzionale della coscienza (Sini, 1982). In questo senso, anche se i segni sono presenti nell'esperienza solitaria del pensiero, essi non sono indici, cioè come evidenzia Sini, essi "designano, ma non significano" (Sini, 1982, p. 544).
Nella fenomenologia di Husserl l'aspetto epistemologico è esplicitamente preso in considerazione, in quanto l'Autore propone un metodo epistemologico di ricerca che a differenza dell'euristica di Lakatos, non descrive i passaggi che il matematico percorre nel proprio lavoro ma descrive i tratti tipici del pensiero matematico in termini di ricerca e individuazione di proprietà invarianti.

#### 9. 3. 3. 2. La filosofia della pratica matematica

La filosofia della matematica ha ricevuto nel corso degli anni molti e importanti impulsi da matematici che si sono occupati di aspetti epistemologico-filosofici, come per esempio Poincaré, Pólya e Rota. Abbiamo notato che Lolli (2001) colloca Pólya tra i quasi-empiristi, come precursore di Lakatos. In questo senso è a questi autori che si può far risalire in filosofia della matematica uno spostamento dell'attenzione dagli aspetti fondazionali alla descrizione e analisi del lavoro dei matematici.

Da circa una quindicina d'anni esiste però anche una vera e propria corrente autonoma nella filosofia della matematica che ha seguito la strada tracciata principalmente da Lakatos, con la *svolta pratica* (practical turn) derivata dalla pubblicazione dell'opera "Proofs and Refutations" (Lakatos, 1976/1979): si tratta della *filosofia della pratica matematica*.
Anche se la filosofia della pratica matematica è una corrente (o versione) relativamente recente della filosofia della matematica,[162] essa si configura sempre più come una visione complementare alla filosofia classica della matematica, piuttosto che come in contrasto con essa (Carter, 2019).
Come si evince dal suo nome, la filosofia della pratica matematica si focalizza primariamente sulla caratterizzazione della matematica tramite la sua pratica, attraverso lo studio dell'attività dei matematici. In questo senso essa non cerca necessariamente risposte alle domande classiche di tipo ontologico e dunque non esprime necessariamente giudizi sulle concezioni di oggetto in filosofia della matematica, anche se incide indirettamente su esse.
Tra gli esponenti di questa corrente della filosofia della matematica possiamo citare per esempio Zalamea (2009/2012a; 2021), che propone una filosofia sintetica della matematica contemporanea la quale è fortemente legata al concetto di "matematica reale" (*real mathematics*) di Corfield (2003) e sulla quale torneremo in maniera estesa nel prossimo capitolo. Più avanti faremo cenno anche al lavoro di Rota (1973/1991), il quale sviluppa, se non una vera e propria prospettiva filosofica della matematica, certamente una posizione fenomenologica sulla matematica che rompe definitivamente con l'idea classica di oggettività, ponendo le basi per concezioni alternative sia per quanto riguarda gli oggetti matematici (che perdono definitivamente la loro oggettività e staticità in senso classico, divenendo dei fenomeni del mondo sulla cui natura si sospende il giudizio, in senso husserliano), sia per quanto riguarda l'epistemologia (che si trasforma in una *schiusura* (disclosure) dei fenomeni del mondo che si presentano alla coscienza dell'individuo.
Abbiamo già evidenziato che la filosofia della pratica matematica non può essere classificata come una corrente filosofica con posizioni ontologiche o epistemologiche proprie, ma piuttosto come una visione, non omogenea, sul modo di fare matematica; per questo motivo non ha senso fare affermazioni riguardo al modo in cui sono inquadrati *in* essa gli oggetti matematici. Tuttavia è possibile ragionare sulla natura degli oggetti matematici che tale corrente della filosofia della matematica ha come propri oggetti di studio, cioè sugli oggetti matematici inquadrati *da* essa. Infatti, se la filosofia della pratica matematica studia le *attività della pratica* matematica, dovrà necessariamente tenere conto di oggetti matematici che evolvono nel tempo, nel corso delle pratiche prese in esame. In

[162] Giardino (2017) fa risalire la nascita della branca della filosofia della pratica matematica alla pubblicazione dell'opera di Mancosu "The Philosophy of mathematical Practice", pubblicata nel 2008, e alla fondazione, nel 2009, dell'*Association for the Philosophy of Mathematical Practice* (APMP).

questo senso sembra dunque indispensabile per tale filosofia adottare una metodologia che sia in grado di tenere conto della dinamicità e della transitorietà dei suoi oggetti.
Infatti, nell'articolo "The Practical Turn in Philosophy of Mathematics: A Portrait of a Young Discipline", Giardino (2017) espone almeno quattro aspetti di cui la filosofia della pratica matematica dovrebbe tenere conto: (i) la necessità di tenere conto del fatto che la pratica matematica è situata nel tempo ed ha un'evoluzione, tenendo quindi conto della sua dinamicità; (ii) la necessità di considerare il fatto che la pratica matematica deve tenere conto dell'epistemologia intesa come costruzione di teorie matematiche che non sono necessariamente teorie formali; (iii) la necessità di tenere conto dell'aspetto pragmatico della pratica matematica, cioè dell'uso concreto di oggetti, strumenti e teorie matematiche; (iv) la necessità di una "risposta semiotica", dato che la pratica matematica è svolta da esseri umani attraverso il ricorso a segni e rappresentazioni semiotiche.
Dai quattro punti evidenziati da Giardino (2017) emergono alcuni aspetti importanti per la nostra trattazione. In prima linea il fatto che essi rilevano questioni molto simili a quelle evidenziate da noi nel paragrafo 9.2. del presente capitolo come criteri che gli oggetti matematici della matematica dovrebbero soddisfare per essere compatibili con l'idea di oggetto matematico in didattica della matematica. Tali criteri sono la dinamicità degli oggetti matematici, il fatto di tenere conto di un approccio pragmatico al significato degli oggetti matematici, quello di fornire una prospettiva epistemica su tali oggetti e quello di tenere conto del ruolo della semiotica.
Per quanto riguarda l'ultimo punto, la caratterizzazione della matematica come un sistema (culturalmente determinato) di segni è in effetti in grado di tenere conto di molti aspetti importanti e di fornire risposte a molti problemi relativi al significato, come sottolinea anche Lolli:

> Anche la semiotica ha qualcosa da dire sulla matematica, che è un'attività eminentemente simbolica, o meglio ci si aspetterebbe che avesse molto da dire, molto più di quanto succede. Non è solo il formalismo che sostiene che la matematica rientra nelle attività simboliche umane. Anzi il formalismo stesso potrebbe perdere parte della sua apparenza spettrale o gratuita (con i segni si può solo giocare) se si integrasse in un'analisi di maggior respiro con gli studi culturali e sociali relativi alla produzione di segni. (Lolli, 2001, p. 34)

In questo senso la semiotica potrebbe avere un ruolo potenzialmente centrale per una filosofia della matematica che cercasse una risposta alla questione epistemologica.

### 9. 4. Sintesi

Dall'analisi proposta in questo capitolo è emerso che gli approcci agli oggetti matematici in filosofia della matematica presentano caratteristiche molto diverse tra loro e solo alcuni di essi possono essere considerati compatibili con le definizioni di oggetto matematico esaminate nel capitolo 8.
Tra gli approcci fondazionalisti, l'unico che risulta compatibile in alcuni punti con le definizioni esaminate è quello intuizionista, che tiene conto della dinamicità degli oggetti matematici, dell'approccio pragmatico al significato e della considerazione dell'aspetto epistemologico. Nell'approccio intuizionista la semiotica non è indispensabile per l'attività matematica, ma è necessaria per manifestare il pensiero matematico e per comunicarlo ad altri. Inoltre, l'approccio intuizionista/costruttivista offre gli strumenti tecnici che consentono di tenere conto della transitorietà degli oggetti matematici (si pensi al concetto di *specie*), ma questi strumenti tecnici non consentono di inquadrare la versione statica degli oggetti matematici, la quale richiede il ricorso al linguaggio degli insiemi. Abbiamo però evidenziato le problematiche che nascono da un approccio intuizionista (ed anche costruttivista) alla matematica, che si scontra con la matematica nella sua versione classica, a causa per esempio del rifiuto nell'intuizionismo dell'infinito attuale, in quanto impossibile da cogliere intuitivamente, e del rifiuto del principio del terzo escluso come legge logica generale. Si tratta quindi di una posizione che è difficilmente conciliabile con la dimensione istituzionale della matematica insegnata a scuola e nei corsi universitari in cui si formano gli insegnanti.
A nostro avviso una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica avrebbe la necessità di coniugare gli aspetti dinamici delle specie intuizioniste con gli aspetti statici degli insiemi in senso fregeano, al fine di poter tenere conto sia della dinamicità, sia della staticità degli oggetti matematici, ma anche del rapporto di quest'ultimi con gli oggetti matematici nella loro versione formale.
Infatti, è proprio questo legame con la versione formale e statica della matematica che scompare in tutti gli approcci che mettono in primo piano gli aspetti socioculturali (approccio socioculturale), cognitivi (*embodied cognition*) o legati alla pratica matematica in termini di quasi-empirismo. Per esempio, nel quasi-empirismo di Lakatos è il legame tra teoria informale e teoria formale a essere di particolare interesse, ma il legame tra queste due teorie è lasciato a livello intuitivo, in quanto non è spiegato in che senso e con quali modalità si passi dalla teoria informale a quella formale. La teoria "informale", senza uno strumento tecnico che spieghi come essa si collega a quella formale, corre il rischio di lasciare l'impressione di essere sufficiente di per sé per fare matematica, arrivando, come sottolinea Lolli (2001), a far scomparire la dimostrazione e addirittura a combatterla ideologicamente, a causa di una sua indebita identificazione con il

formalismo.[163] Infatti, se si considera la posizione di Hersh (2001), in cui l'Autore descrive la realtà della matematica osservabile come una rete di idee in evoluzione, aventi proprietà oggettive, che possono essere accertate attraverso molti modi diversi di ragionamento e argomentazione, le quali mutano nel tempo e sulla base del contesto matematico di riferimento, egli porta argomenti che sono tutti accettabili singolarmente, ma la cui somma produce l'effetto evidenziato da Lolli. Dunque, l'idea della fallibilità della verità matematica su cui si basa il quasi-empirismo non è di per sé sbagliata o pericolosa, ma lo diventa se non opportunamente contestualizzata e collegata con la metodologia di verifica della "verità" nella disciplina.

Anche l'approccio socioculturale, che sta alla base della posizione assunta da Hersh (2001), presenta difficoltà analoghe. Esso fornisce da un lato spiegazioni interessanti e plausibili su come la matematica si costituisce come prodotto culturale, a partire dalla "creazione" nella mente umana, per poi essere oggettivata e diventare un prodotto culturale oggettivo, ma è il suo approccio epistemologico inteso in termini di apprendimento per imitazione e partecipazione alle pratiche culturali, a non essere di per sé sufficiente per esaurire la problematica dell'accesso alla conoscenza matematica, la quale risulta essere una delle espressioni culturali più astratte e sofisticate, come dimostra l'articolazione dell'ontologia della teoria dell'oggettivazione (Radford, 2008a, 2019). Inoltre, anche in questo caso mancano gli strumenti tecnici che possano consentire di spiegare come si collega la matematica come prodotto culturale, diverso anche da cultura a cultura, come evidenzia l'etnomatematica (D'Ambrosio, 1985, 2002), con la matematica condivisa oggettivamente dai matematici a livello internazionale. È vero che Wilder (1981) esamina in dettaglio l'argomento dell'evoluzione dei concetti matematici dal loro contesto più prettamente culturale a quello più astratto e oggettivo, ma le spiegazioni risultanti hanno un carattere più psicologico che logico-matematico. Quest'ultima caratteristica vale anche per la teoria dell'*embodied cognition*, come già evidenziato nel paragrafo 9.3.3.1.5.

A nostro avviso, l'ontologia della didattica della matematica dovrebbe tenere conto di una maggiore integrazione tra approcci umanistici, antropologici e psicologici e approcci più tecnici, che non trascurino anche gli aspetti formali. Tale integrazione necessita però di strumenti tecnici adeguati.

D'altro canto, gli approcci che mantengono un legame forte con la matematica "formale" (formalismo, approcci realista strutturalista o logicista), o non tengono conto della dimensione creativa, intuitiva della matematica, cioè di quella dimensione in cui si manifesta la "teoria informale" di Lakatos, oppure, se tentano di farlo, come nel caso del naturalismo di Maddy (1992/2000), ciò avviene in termini di una metodologia interna alla teoria degli insiemi, che chiude la

[163] In questo senso una dimostrazione non è formale in quanto scritta in linguaggio formale, ma è formale in quanto organizzata secondo le regole di un sistema razionale, anche se di per sé condotta in un linguaggio non formale.

matematica in sé stessa, rendendo difficile la spiegazione di come si accede alla conoscenza dei suoi contenuti.
Un approccio che ha delle caratteristiche interessanti per la nostra trattazione è quello fenomenologico husserliano, dato che in esso gli oggetti sono delle entità dinamiche, mentre l'approccio al significato è di tipo realista, compatibile con quello fregeano, ma è anche pragmatico, in quanto la fenomenologia inquadra la conoscenza di entità oggettive in termini di atti di coscienza dell'individuo, senza perciò adottare una prospettiva psicologista. La proposta fenomenologica di Husserl, rilanciata in filosofia della matematica per esempio da Hauser (2001), sembra essere in grado di unire componenti soggettive e oggettive, pratiche e teoriche, della conoscenza matematica. Infatti, in essa l'esame dell'oggettività delle teorie matematiche avviene per così dire attraverso "lo sguardo" del matematico, personificato dalla coscienza che compie atti intenzionali che possono dirigersi verso oggetti che appaiono come già dati e quindi oggettivi, ma sulla cui natura ed esistenza il matematico non ha necessità di pronunciarsi, in quanto tutto ciò che egli fa è riconoscere degli invarianti nel flusso degli atti intenzionali di coscienza.
L'oggettività di ciò che è conosciuto è data dall'oggettività delle strutture della coscienza, che Husserl si pone come obiettivo di determinare. Si potrebbe dire che in questo senso la fenomenologia husserliana si presenta come una *sintassi* degli atti di coscienza, in cui sono le relazioni a essere oggettive ed esistenti, piuttosto che gli oggetti che vengono collegati tra loro.
Tuttavia, anche la prospettiva fenomenologica, che può risultare particolarmente affascinante dal punto di vista della didattica della matematica, in quanto si concentra sugli atti di coscienza dell'individuo ed è in grado di spiegare le modalità con cui si costituiscono gli oggetti della conoscenza, ha delle difficoltà a collegare poi la necessità di una certa rispondenza tra gli invarianti del flusso intenzionale di coscienza del singolo individuo (studente) e la conoscenza oggettivamente costituita come conoscenza matematica istituzionalizzata.
Infatti, per la pratica matematica del matematico in questo senso sono determinanti i vincoli propri della *regione*, in senso husserliano, in cui si svolge la ricerca e che possono essere intesi come il quadro di razionalità specifico del contesto, ma questo significherebbe che il soggetto che svolge la ricerca deve dirigere il proprio flusso di coscienza in accordo con i vincoli della regione, i quali devono essergli quindi noti. Questo è, invece, uno dei nodi più difficili da sciogliere e potrebbe anzi essere visto come *il* nodo principale della problematica dell'apprendimento in matematica: per apprendere lo studente deve essere consapevole dei vincoli imposti dalla razionalità matematica, in termini di accettabilità dei risultati solo sotto condizioni logiche ben determinate, ma allo stesso tempo l'apprendimento stesso consiste nel diventare consapevole di tali vincoli. Inoltre, come già evidenziato, nella prospettiva fenomenologica è difficile dare una caratterizzazione degli oggetti in senso classico, dato che essi sono caratterizzati solo come dei processi che non terminano mai con una conoscenza assoluta

dell'oggetto. Infine, anche la proposta fenomenologica necessita di strumenti tecnici che siano in grado di articolare in maniera non solo intuitiva il metodo husserliano, che rispecchia l'esperienza dal matematico nel riconoscere strutture e loro proprietà, e di collegarlo con la dimensione in cui invece avviene la dimostrazione in termini formali e che costituisce l'oggettivazione dei risultati dal punto di vista della matematica come disciplina.
Tra le varie prospettive in filosofia della matematica, la semiotica più che presentarsi come un approccio autonomo, si presenta come un terreno pratico comune irrinunciabile, a prescindere dal ruolo che le si attribuisce, cioè sia che la si consideri come costituente della matematica, in quanto quest'ultima è vista come un linguaggio in senso ampio, o come un discorso su oggetti non direttamente accessibili ai sensi, e come tale realizzabile solo attraverso il ricorso ai segni, sia che la si consideri come un supporto necessario alla manifestazione del pensiero che non ha necessità di una mediazione segnica, in quanto è intuito dalla mente o colto dalla coscienza in maniera immediata. Ancora una volta, però, in didattica della matematica le cose stanno diversamente rispetto a come si presentano in matematica, poiché l'apprendimento di una conoscenza oggettivamente precostituita non può che avvenire attraverso il ricorso a rappresentazioni semiotiche, il cui ruolo in tale contesto non è (ancora) un ruolo referenziale, come lo è per il matematico, ma è un ruolo costitutivo della conoscenza.
Possiamo dunque notare come la pratica matematica del matematico e la pratica matematica dello studente, pur mostrando certe analogie, obbediscono in realtà a condizioni e regole molto diverse tra loro.
D'altra parte abbiamo però notato la forte analogia tra i punti focali evidenziati dalla filosofia della pratica matematica come questioni caratterizzanti per essa e i criteri da noi evidenziati come caratterizzanti per una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica. Questo ci induce a pensare che la pratica matematica potrebbe essere considerata non tanto come un modello per la pratica dello studente, quanto un modello per la pratica della didattica della matematica come disciplina. In questo senso sembra dunque interessante l'analogia tra la filosofia della pratica matematica e la filosofa della didattica della matematica, entrambe intese come discipline che compiono una metariflessione sull'attività matematica: da un lato quella del matematico praticante, dall'altro lato quella dello studente. L'analogia ci sembra interessante soprattutto dal punto di vista metodologico e ontologico, piuttosto che da un punto di vista dei contesti d'indagine.
Abbiamo già evidenziato il fatto che il quasi-empirismo e il costruttivismo sono stati ampiamente discussi in filosofia della didattica della matematica come basi per quest'ultima (si vedano per esempio Ernest, 1994, 1998). Tuttavia, i parallelismi che sono stati sfruttati in tale contesto sono i parallelismi tra la metariflessione sulla pratica matematica (si vedano i lavori già citati di Pólya, Lakatos e Hersh) e la riflessione sulla pratica matematica dello studente, il che

produce una sorta di scivolamento tra livelli di riferimento dell'analogia presa in considerazione.
Dunque, il nostro riferimento in questo contesto è la riflessione della filosofia della pratica matematica su sé stessa, messa in evidenza dai quattro punti caratterizzanti per essa (Giardino, 2017), piuttosto che i metodi euristici di Pólya o Lakatos.
Essendo la filosofia della pratica matematica un approccio trasversale relativamente recente in filosofia della matematica, esso non dispone di una metodologia propria e tanto meno di un'ontologia specifica. Notiamo che nei quattro punti programmatici evidenziati da Giardino (2017), quello epistemologico, quindi relativo al metodo, è inteso come un *obiettivo* posto *per*, e non come una *caratteristica della*, filosofia della pratica matematica.
Per la nostra trattazione si pone il problema di individuare, a partire da un opportuno riferimento in filosofia della pratica matematica, un quadro teorico adeguato per la definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica che stiamo cercando di fornire.

## 9. 5. Conclusioni

Dall'analisi proposta in questo capitolo emergono soprattutto due aspetti: che le definizioni di oggetto matematico fornite in didattica della matematica fanno riferimento a una tipologia di oggetto matematico che non esiste come tale in filosofia della matematica, ma che ha molti tratti in comune con un ipotetico oggetto di studio della filosofia della pratica matematica.
Per noi si pone dunque la questione seguente: a quale tipo di filosofia della pratica matematica fare riferimento per ottenere una risposta all'interrogativo ontologico che ci siamo posti nella presente tesi?
Esiste una filosofia della pratica matematica che possa dare una risposta adeguata alle esigenze ontologiche comuni a tutte le definizioni di oggetto matematico in didattica della matematica di tenere conto della dinamicità degli oggetti matematici, del carattere pragmatico del loro significato, della loro dimensione epistemica, senza trascurare quella semiotica?
Rispondere in modo affermativo a tali esigenze ontologiche consentirebbe di inquadrare gli oggetti matematici dal punto di vista della filosofia della matematica in maniera tale che la loro definizione si accordi con le esigenze di una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica, la quale deve tenere conto anche di altri aspetti, non direttamente concernenti gli oggetti matematici della matematica: la distinzione tra la pratica matematica e la pratica della didattica della matematica e tra i tre livelli ontologici evidenziati nel paragrafo 8.1.: uno relativo agli oggetti matematici, uno relativo ai modelli interpretativi del primo ordine e uno relativo ai modelli interpretativi del secondo ordine.

Nel capitolo 10 cercheremo di fornire una risposta a questi interrogativi, proponendo un inquadramento teorico per una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica.

**Risposta alla domanda di ricerca D1**

Nel corso dell'esposizione dei capitoli 5, 6, 7 e 8 abbiamo seguito un percorso che ha consentito di mettere in evidenza in vari punti della trattazione il procedere nell'indagine relativa alla risposta alla prima domanda di ricerca, cioè:

*D1. Quali criteri deve soddisfare una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica?*

Tale percorso è stato contrassegnato da due approcci contrapposti, che nel paragrafo 4.3. sono stati chiamati *top down* e *bottom up*, nel senso che i criteri cercati sono stati individuati sia sulla base di considerazioni puramente teoriche, dettate dalle esigenze legate alle modalità con cui in didattica della matematica si intendono le teorie e i loro oggetti (capitolo 5), sia sulla base di considerazioni più euristiche, emerse sulla base dell'analisi delle caratteristiche generali di esempi di oggetti didattici (capitolo 6), di approcci ai concetti (capitolo 7) e di definizioni di oggetti matematici in didattica della matematica (capitolo 8).
Questo processo di progressiva "distillazione" ci ha permesso di individuare una vasta gamma di criteri di cui dovrebbe tenere conto una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica, in modo tale da poter essere il più possibile inclusiva per quanto riguarda i possibili punti di vista e i livelli di astrazione.
Di seguito riassumeremo brevemente il percorso seguito e infine forniremo una formulazione conclusiva dei criteri individuati.
In prima linea abbiamo affrontato la questione da una prospettiva che riguarda le posizioni relative al concetto di teoria in didattica della matematica (capitolo 5), individuando quattro criteri che una definizione di oggetto didattico specifico della didattica della matematica dovrebbe soddisfare.
Essa dovrebbe:

*(1) essere compatibile con una visione statica, ma anche con una visione dinamica di teoria in didattica della matematica;*
*(2) tenere conto del rapporto tra gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica come disciplina e gli oggetti matematici della matematica come disciplina, nella loro versione formale;*
*(3) tenere conto degli aspetti ontologici specifici della didattica della matematica come disciplina, oltre che di quelli più prettamente concettuali matematici;*
*(4) essere sufficientemente generale da poter astrarre dall'approccio epistemologico nelle diverse teorie in didattica della matematica.*

Successivamente, attraverso la metariflessione sulle caratteristiche degli esempi di complessi concettuali che costituiscono degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica (capitolo 6) abbiamo aggiunto un ulteriore criterio, secondo il quale una definizione di oggetto matematico specifica della didattica della matematica dovrebbe:

*(5) essere in grado di inquadrare tecnicamente la modalità relazionale con la quale si formano i complessi concettuali che costituiscono gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica.*

Questi criteri sono stati usati per esaminare i vari approcci ai concetti in didattica della matematica (capitolo 7). L'analisi eseguita in tale capitolo ha fornito informazioni utili per puntualizzare e circoscrivere i criteri (1), (2) e (3) e ha permesso di aggiungere altri due criteri, rispetto ai quali esaminare le definizioni di oggetto matematico di vari approcci e teorie in didattica della matematica. Inoltre, l'analisi proposta nel capitolo 7 ha consentito di evidenziare che non è possibile inquadrare le caratteristiche degli oggetti matematici relative ai criteri emersi all'interno dei vari approcci ai concetti in didattica della matematica.
Abbiamo ottenuto la seguente riformulazione e attualizzazione dei criteri, sotto forma di domanda riferita alle definizioni di oggetto matematico in didattica della matematica (capitolo 8) e rispetto alle quali quest'ultime sono state esaminate:

*(1') La definizione tiene conto della dinamicità e transitorietà degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica in termini di una loro evoluzione nel tempo? Se sì, è possibile scorgere in essa un'ontologia transitoria, cioè una caratterizzazione della modalità con cui gli oggetti passano da uno stato all'altro?*
*(2') La definizione riconosce l'esistenza di oggetti matematici istituzionali distinti in matematica e in didattica della matematica e se sì, chiarisce il legame tra essi?*
*(3') La definizione tiene conto, e in maniera distinta, dei modelli interpretativi del primo e del secondo ordine e quindi degli aspetti ontologici specifici della didattica della matematica come disciplina, oltre che di quelli più prettamente concettuali, legati alla prasseologia?*
*(4') La definizione è "assolutamente generale", cioè prescinde da riferimenti a una qualche posizione epistemologica o a una qualche teoria dell'apprendimento?*
*(5') La definizione è in grado di inquadrare tecnicamente la modalità relazionale con la quale si formano i complessi concettuali che costituiscono gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica?*
(6') *La definizione di oggetto matematico tiene conto del ruolo delle rappresentazioni semiotiche nella caratterizzazione degli oggetti matematici?*
*(7') La definizione di oggetto matematico si riferisce a oggetti il cui significato è inteso in senso realista o in senso pragmatico?*

Dalle analisi delle definizioni esaminate nel capitolo 8 abbiamo potuto concludere che nessuna definizione di oggetto matematico in didattica della matematica, anche considerata nel suo contesto più ampio, tiene conto di tutti i criteri

evidenziati e quindi non esiste in didattica della matematica, nemmeno implicitamente, una definizione come quella cercata. Inoltre abbiamo potuto constatare che i due criteri relativi alle domande (6') e (7') risultano essere uno trasversale e tutte le definizioni o ai contesti nei quali esse sono inserite [criterio relativo alla domanda (7')] e uno trasversale a 6 definizioni su 7 e non in contraddizione con la settima, aspetto che ci ha spinti a confermare l'inclusione di questi due criteri nell'elenco.
Infine abbiamo esaminato vari approcci alla questione ontologica in filosofia della matematica, che è la branca della matematica che si focalizza su metariflessioni riguardanti gli aspetti ontologici ed epistemologici della matematica (capitolo 9), al fine di verificare quale tipo di approccio (o di approcci) in questo ambito è (sono) compatibili con i criteri contenuti nelle domande (1') - (7'). In questo contesto abbiamo preso in considerazione solo i criteri contenuti nelle domande (1'), (6') e (7'), poiché si tratta dei criteri che concernono direttamente gli oggetti matematici della matematica come disciplina e non fanno riferimento ad aspetti esclusivamente didattici.
Tali criteri sono stati formulati come segue (capitolo 9):

- presa in carico della dinamicità, nel senso della presenza di un riferimento a un'evoluzione temporale degli oggetti, ma anche di una loro staticità, se non è possibile fare riferimento a una definizione esplicita di oggetto, nonché la presenza di un'ontologia transitoria, nel senso della considerazione di oggetti matematici che si modificano nel tempo [domanda (1')];
- presa in carico del ruolo della semiotica nell'attività matematica [domanda (5')];
- considerazione della natura pragmatica del significato degli oggetti matematici [domanda (6')].

Sulla base di quanto emerso dal percorso appena descritto forniamo dunque una risposta alla domanda di ricerca *D1*.
Una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica dovrebbe tenere conto dei seguenti criteri:

(1'') dinamicità/staticità e transitorietà degli oggetti matematici e della didattica della matematica;
(2'') distinzione tra oggetti matematici e oggetti matematici specifici della didattica della matematica nonché esplicitazione della relazione degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica con la versione istituzionale formale degli oggetti matematici;
(3'') distinzione tra i due livelli interpretativi degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica come modelli interpretativi del primo o del secondo ordine;
(4'') assoluta generalità, cioè indipendenza da una specifica teoria dell'apprendimento o da assunzioni relative a singoli approcci o teorie in didattica della matematica;

(5'') necessità di tenere conto del fatto che gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica sono dei complessi concettuali che si costituiscono in reti che evolvono nel tempo sulla base di certe relazioni semantiche che rappresentano una sorta di sintassi;
(6'') necessità di tenere conto della dimensione semiotica;
(7'') necessità di tenere conto di un approccio pragmatico agli oggetti matematici, considerando il contesto.

Notiamo che dalle indagini è emerso che quasi tutti gli approcci ai concetti e quasi tutte le definizioni di oggetto matematico in didattica della matematica assumono una posizione nettamente pragmatica riguardo al significato e quindi non prendono in considerazione la necessità di tenere conto anche di una dimensione "reale" degli oggetti matematici che risulta dal fatto che gli oggetti matematici della matematica come disciplina si presentano come un riferimento oggettivo per la didattica della matematica. Anche se riteniamo che questa sia un'esigenza di cui una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica dovrebbe tenere conto, anche in riferimento al secondo criterio (presa in considerazione della relazione tra oggetti matematici specifici della didattica della matematica e oggetti matematici), dato che questo criterio non è emerso né come "necessario" sulla base dall'indagine *top down,* né come "conveniente", poiché trasversalmente presente, sulla base dell'indagine *bottom up*, esso non è stato inserito tra i criteri individuati secondo la metodologia seguita.
Inoltre evidenziamo il fatto che non abbiamo preso in considerazione un criterio relativo alla dimensione socioculturale degli oggetti matematici poiché, come sottolineato nel capitolo 2, la nostra indagine ontologica si riferisce alla componente disciplinare specifica della matematica, mentre la dimensione relativa all'essere umano come "oggetto" di studio viene considerata nella presente ricerca come una costante, al fine di ridurre la complessità del fenomeno studiato.

# SECONDA PARTE

# 10. Quadro teorico

## 10. 1. Introduzione

Le indagini svolte nei capitoli precedenti ci hanno permesso di individuare e circoscrivere le caratteristiche che una definizione di oggetto matematico della didattica della matematica dovrebbe soddisfare, sia dal punto di vista astratto, cioè in riferimento alle esigenze dei diversi concetti di teoria in didattica della matematica, discusse nel capitolo 5, sia in riferimento alle proprietà degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica, emerse dalla riflessione sugli esempi forniti nel capitolo 6, sia in riferimento alle modalità con cui in didattica della matematica vengono inquadrati gli approcci ai concetti (capitolo 7), sia in riferimento alle caratteristiche emerse "per astrazione" dal confronto delle definizioni di oggetto matematico nelle diverse teorie in didattica della matematica (capitolo 8) sia, infine, dal confronto di quest'ultime con il modo di rispondere alle questioni ontologica ed epistemologica nei diversi approcci in filosofia della matematica (capitolo 9).
In questa seconda parte della tesi vogliamo caratterizzare il contesto teorico che possa accogliere una definizione con le caratteristiche individuate nei capitoli precedenti, cioè tale da tenere conto dei seguenti criteri:

(1'') dinamicità/staticità e transitorietà degli oggetti matematici e della didattica della matematica;
(2'') distinzione tra oggetti matematici e oggetti matematici specifici della didattica della matematica nonché esplicitazione della relazione degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica con la versione istituzionale formale degli oggetti matematici;
(3'') distinzione tra i due livelli interpretativi degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica come modelli ermeneutici del primo o del secondo ordine;
(4'') assoluta generalità, cioè indipendenza da una specifica teoria dell'apprendimento o da assunzioni relative a singoli approcci o teorie in didattica della matematica;
(5'') necessità di tenere conto del fatto che gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica sono dei complessi concettuali che si costituiscono in reti che evolvono nel tempo sulla base di certe relazioni semantiche che rappresentano una sorta di sintassi;
(6'') necessità di tenere conto della dimensione semiotica;
(7'') necessità di tenere conto di un approccio pragmatico agli oggetti matematici, considerando il contesto.

Dato che la questione ontologica che stiamo affrontando nel presente lavoro di testi si colloca nell'ambito della filosofia della didattica della matematica e dato che dalla trattazione degli argomenti nel capitolo 9 è emersa un'analogia tra gli obiettivi della filosofia della pratica matematica evidenziati da Giardino (2017) e le caratteristiche sopraindicate, riferibili agli oggetti matematici, cercheremo di fornire prima di tutto un inquadramento teorico generale per la definizione che stiamo cercando. Questo inquadramento generale sarà dato da una specifica filosofia della pratica matematica che a nostro avviso possiede caratteristiche ontologiche ed epistemologiche compatibili con le caratteristiche qui evidenziate; si tratta della già menzionata filosofia sintetica della matematica contemporanea (Zalamea, 2009/2012a; 2021).
Tale quadro generale necessita però di una interpretazione in didattica della matematica attraverso una integrazione con elementi gnoseologici, semiotici, ermeneutici, relativi al significato, al linguaggio, al ragionamento diagrammatico e al ruolo delle metafore e delle analogie.
Il quadro teorico così ottenuto non disporrebbe però di strumenti tecnici efficienti, in grado di tenere conto in maniera non solo intuitiva delle relazioni tra le sue diverse componenti e di renderlo sufficientemente generale per poter esprimere in esso una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica che non sia dipendente da posizioni ontologiche ed epistemologiche particolari in didattica della matematica. In questo senso, un ricorso a un linguaggio matematico che funga da base per la definizione cercata appare come una soluzione appropriata, a patto che il linguaggio della didattica della matematica funga da metalinguaggio nella sua interpretazione e che il linguaggio matematico scelto sia in grado di tenere conto, attraverso opportune interpretazioni nel metalinguaggio, degli aspetti ontologici ed epistemologici evidenziati.
Queste esigenze ci porteranno a una integrazione del quadro teorico con strumenti provenienti dalla teoria delle categorie, che verranno esposti e interpretati nel prossimo capitolo, e che consentiranno di fondare matematicamente la questione ontologica ed epistemologica del quadro teorico.

## 10. 2. Questioni metodologiche

In questo capitolo esporremo prima la componente più generale per il quadro teorico, legata alla filosofia della matematica; nell'argomentazione riguardo all'opportunità di fare riferimento a essa, in vista dell'obiettivo che si prefigge la tesi, ci faremo guidare dal concetto di paradigma di ricerca secondo Guba e Lincoln (1994), nella sua interpretazione fornita da Sriraman (2009) e Sriraman e English (2010).
Successivamente combineremo e integreremo diversi elementi teorici ricorrendo prevalentemente alla coppia di strategie di networking *combinare* e *coordinare* (si

veda il paragrafo 4.3.), con l'obiettivo di ottenere un quadro teorico che sia in grado di tenere conto delle diverse caratteristiche evidenziate nel paragrafo precedente, interpretandole in accordo con il quadro teorico generale.
Ricordiamo che la combinazione di teorie non richiede una compatibilità tra quest'ultime, in quanto esse possono essere anche semplicemente affiancate l'una all'altra, in una prospettiva pragmatica, giustificata dalle esigenze della ricerca, mentre il coordinamento tra teorie mira a un quadro teorico coerente nel suo complesso e richiede di solito un certo grado di compatibilità tra le teorie, anche se diversi modi di connessione possono richiedere diversi gradi di compatibilità (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008). Mentre in questo capitolo sarà prevalente la combinazione di aspetti teorici, il cui filo conduttore è dato dalla coerenza pragmatica del quadro teorico, nel capitolo successivo si mirerà a una connessione degli elementi esaminati in un quadro teorico coerente dal punto di vista tecnico.
In letteratura le due strategie in questione vengono di solito adottate con obiettivi più circostanziati, soprattutto nel momento in cui si intende comporre un quadro teorico il cui obiettivo è quello di consentire l'analisi articolata di dati o di fenomeni empirici, ma esse sono usate a volte anche per scopi puramente teorici (si veda p. e. Scheiner, 2016).

## 10. 3. Il paradigma di ricerca

Secondo Guba e Lincoln (1994), il paradigma di ricerca è "the basic belief system or worldview that guides the investigator, not only in choices of method but in ontologically and epistemologically fundamental ways" (Guba & Lincoln, 1994, p. 105). Gli autori evidenziano tre questioni di fondo che determinano la natura del paradigma di ricerca, in quanto le risposte a tali questioni sono radicate in alcune "credenze di base" che caratterizzano un paradigma di ricerca; tali questioni di base non sono tra loro indipendenti nel senso che la risposta a una di esse influisce sulla risposta alle altre due. Le tre questioni di fondo sono le seguenti:

> (1) *The ontological question*. What is the form and nature of reality and, therefore, what is there that can be known about it?[164] (…) (2) *The epistemological question*. What is the nature of the relationship between the knower or would-be knower and what can be known? (…) (3) *The methodological question*. How can the inquirer (would-be knower) go about finding out whatever he or she believes can be known? Again, the answer that can be given to this question is constrained by answers already

[164] Notiamo che la questione ontologica posta in questa maniera può riferirsi sia a quella che abbiamo chiamato in precedenza, in accordo con Ernest (2012) "l'ontologia prima" della didattica della matematica, sia a quella che abbiamo chiamato "ontologia seconda" della didattica della matematica, a seconda che si assume che la "realtà" che si dà per scontata come conoscibile sia l'essere umano o la conoscenza (matematica) prodotta dall'essere umano.

> given to the first two questions; that is, not just any methodology is appropriate. (Guba & Lincoln, 1994, p. 108)

Secondo Sriraman (2009) e Sriraman e English (2010), pur essendo le tre questioni messe in evidenza da Guba e Lincoln (1994) riconosciute come le componenti che determinano un paradigma di ricerca, esse possono costituire anche le fondamenta per una filosofia della didattica della matematica.
Come già evidenziato da Ernest (2012), le posizioni in filosofia della didattica della matematica non possono fare a meno di fare riferimento a una qualche filosofia della matematica, dalla quale in un certo senso mutuano, pur adattandole, le risposte alle questioni ontologiche ed epistemologiche legate agli oggetti matematici. Da quanto messo in evidenza da Guba e Lincoln, la risposta a queste questioni influenza anche la metodologia di ricerca. Sembra dunque di primaria importanza iscrivere il presente quadro teorico in una specifica filosofia della matematica.
Di seguito useremo le tre questioni paradigmatiche evidenziate da Guba e Lincoln (1994) e ricontestualizzate in filosofia della didattica della matematica da Sriraman (2009) e da Sriraman e English (2010) sia per delineare il nostro paradigma di ricerca, sia per posizionare la presente ricerca nell'ambito della filosofia della matematica, sia per esaminare le ripercussioni di tale posizionamento sul presente quadro teorico.
Nei prossimi paragrafi ci occuperemo della prima delle due questioni, quella relativa all'ontologia, tenendo conto di quanto già evidenziato nel capitolo 2 riguardo all'ontologia della didattica della matematica, nonché della seconda questione, quella relativa all'epistemologia. La terza questione, quella relativa alla metodologia di ricerca, verrà affrontata nel capitolo 12.

### 10. 3. 1. Quale filosofia della matematica?

#### 10. 3. 1. 1. Due dualità fondamentali in filosofia della matematica

Nella discussione delle diverse definizioni di oggetto matematico nel capitolo 8 e dei diversi approcci in filosofia della matematica nel capitolo 9 abbiamo fatto ricorso alla dualità reale-pragmatico in riferimento al significato degli oggetti matematici, ma in realtà le categorie in questione si riferiscono a una classificazione in filosofia della matematica che riguarda anche criteri diversi dal significato, come vedremo di seguito.
In questo capitolo faremo riferimento in varie occasioni anche a un'altra dualità che consente di classificare le teorie in filosofia della matematica, simile a quella già introdotta, ma il cui significato non è completamente sovrapponibile alla precedente.

Nei due paragrafi successivi caratterizzeremo quindi più in dettaglio la prima e introdurremo la seconda dualità, mentre nel paragrafo che segue a questi due discuteremo brevemente la contrapposizione tra filosofia analitica della matematica e filosofia sintetica della pratica matematica.

### 10. 3. 1. 1. 1. Approccio realista versus approccio pragmatico

La dualità reale-pragmatico nell'attribuzione di significato (Kutschera, 1979, citato in D'Amore, 2001, p. 12) ha implicazioni anche con l'acquisizione di conoscenza in matematica.
Come già evidenziato, la questione centrale è legata alla domanda se il significato deve essere considerato come qualcosa di oggettivo o di soggettivo. Sulla base della risposta fornita è possibile poi trarre conclusioni su che cosa significhi in ciascuna di queste prospettive acquisire conoscenza in matematica.
D'Amore fornisce la seguente caratterizzazione delle teorie di stampo realista:

> Nella semantica realista (…) si attribuiscono alle espressioni linguistiche funzioni puramente semantiche: il significato di un nome proprio (come 'Bertrand Russell') è l'oggetto che tale nome proprio indica (in tal caso Bertrand Russell); gli enunciati atomici (come 'A è un fiume') esprimono fatti che descrivono la realtà (in tal caso A è davvero il nome di un fiume); i predicati binari (come 'A legge B') designano attributi, quelli indicati dalla frase che li esprime (in questo caso la persona A legge la cosa B). Dunque, ogni espressione linguistica è un attributo di certe entità: la relazione nominale che ne deriva è l'unica funzione semantica delle espressioni. Si riconoscono qui le posizioni di Frege, di Carnap, del Wittgenstein del Tractatus. (D'Amore, 2001, p. 12)

Per quanto riguarda le teorie di stampo pragmatico l'Autore fornisce invece la seguente caratterizzazione:

> Nelle teorie pragmatiche le espressioni linguistiche hanno significati diversi a seconda del contesto in cui si usano e quindi risulta impossibile ogni osservazione scientifica in quanto l'unica analisi possibile è "personale" o soggettiva, comunque circostanziata e non generalizzabile. Non si può far altro che esaminare i diversi "usi": l'insieme degli "usi" determina infatti il significato degli oggetti. Si riconoscono qui le posizioni del Wittgenstein delle Ricerche filosofiche, quando ammette che la significatività di una parola dipende dalla sua funzione in un "gioco linguistico", dato che in esso ha un modo d''uso' ed un fine concreto per il quale essa è stata appunto usata: la parola, dunque, non ha di per sé un significato, e tuttavia può essere significativa. (D'Amore, 2001, pp. 12–13)

Le caratterizzazioni degli approcci realista e pragmatico sono riassunte da D'Amore (2001) nella tabella che riportiamo di seguito (Tabella 7). In essa le due prospettive sono esaminate riguardo a diversi criteri, che vanno al di là della questione del significato, sulla quale ci siamo già soffermati in precedenza, coinvolgendo anche il rapporto tra semantica e pragmatica, la concezione stessa di semantica, la questione dell'esistenza o meno di una realtà intersoggettiva, la possibilità di un'analisi oggettiva della conoscenza scientifica, la visione epistemologica, nonché l'idea di ciò che significa conoscere e il concetto stesso di conoscenza; vengono forniti infine alcuni nomi di esponenti di filosofia della matematica le cui posizioni sono classificabili nell'uno o nell'altro approccio.

| | **TEORIE "REALISTE"** | **TEORIE "PRAGMATICHE"** |
|---|---|---|
| **significato** | relazione convenzionale tra segni ed entità concrete o ideali, indipendenti dai segni linguistici | dipende dal contesto e dall'uso |
| **semantica vs. pragmatica** | divisione netta | non divisione o divisione sfumata |
| **obiettività o intersoggettività** | totale | mancante o discutibile |
| **semantica** | le espressioni linguistiche hanno funzioni puramente semantiche | le espressioni linguistiche e le parole hanno significati "personali", sono significative in opportuni contesti, ma non hanno significati assoluti, di per sé |
| **analisi** | possibile e lecita: la logica, per esempio | possibile solo un'analisi "personale" o soggettiva, non generalizzabile, non assoluta |
| **conseguente visione epistemologica** | concezione platonica degli oggetti matematici | concezione problematica degli oggetti matematici |
| **conoscere** | scoprire | usare in opportuni contesti |
| **conoscenza** | è un assoluto | è relativa alla circostanza ed all'uso specifico |
| **esempi** | il Wittgenstein del *Tractatus*, Frege, Carnap [Russell, Cantor, Bernays, Gödel] | il Wittgenstein delle *Ricerche Filosofiche* [Lakatos] |

Tabella 7. Teorie realiste e pragmatiche del significato a confronto (tratto da D'Amore, 2001, p. 13).

La caratterizzazione qui esposta mette in evidenza aspetti fondamentali per la didattica della matematica, contrapponendo due modi sostanzialmente differenti di considerare gli oggetti matematici, il loro significato e il modo con cui si può avere accesso alla conoscenza in matematica.

Potremmo affermare che le caratteristiche più incisive dal punto di vista della distinzione tra teoria realista e teoria pragmatica si riconducono al fatto che nella prima prospettiva gli oggetti matematici sono statici e immutabili e il loro significato è assoluto, mentre nella seconda prospettiva gli oggetti matematici possiedono una natura dinamica e mutevole e il loro significato è relativo e dipendente dal contesto.
La caratterizzazione della dualità che vede contrapporsi un approccio realista a uno pragmatico è certamente molto schematica come lo sono sempre le classificazioni ed è chiaro che nella realtà i tratti distintivi dei suoi due poli non sono quasi mai presenti in forma pura, ma essa ha il vantaggio di caratterizzare in maniera molto chiara la tensione tra essi.

#### 10. 3. 1. 1. 2. Approccio realista versus approccio idealista

La seconda dualità che consente di classificare gli approcci in filosofia della matematica è quella che vede contrapposti un approccio realista a uno idealista.
In termini classici, la distinzione in questione si basa sempre sulla natura degli oggetti matematici e dunque, di conseguenza, anche sulla possibilità di accedere a essi, ma ciò che viene messo in primo piano qui è il ruolo che la mente umana ha in riferimento agli enti matematici, distinguendo tra dipendenza e indipendenza da essa.
Tieszen (2010) riassume come segue le caratteristiche delle posizioni realista e idealista da questo punto di vista:

> Mathematical Realism: There are *mind-independent* abstract (or “ideal”) mathematical objects or truths. Notice that I am formulating this specifically for mathematical objects or truths. By “mathematical” I just mean the kinds of objects or truths that practicing mathematicians typically take themselves to be thinking about. (…) Mathematical Idealism (Anti-Realism): Mathematical objects (which may be “abstract” in some sense but not eternal or atemporal) are *mind-dependent*. (Tieszen, 2010, pp. 3–4)

Facendo riferimento a questa dualità classica, Shapiro (2000), mostra come in realtà sia opportuno distinguere la componente ontologica da quella epistemologica, dato che queste due componenti sembrano non essere dipendenti l’una dall’altra in riferimento all’appartenenza a un’impostazione realista o idealista. Infatti, l’Autore classifica alcune delle tendenze contemporanee della filosofia della matematica,[165] sfruttando alcune delle dicotomie tipiche della matematica: necessità-contingenza della conoscenza matematica, universalità-

[165] Notiamo che Zalamea (2009/2012a) evidenzia che quella di Shapiro è un’ottima analisi, ma che essa è limitata implicitamente a tendenze di stampo anglosassone e tralascia tendenze importanti che esulano da tale dominio.

particolarità dei suoi oggetti e metodi, unità-molteplicità del pensiero matematico, interiorità-esteriorità della disciplina, naturalezza-artificialità delle sue costruzioni.
Le prime due dicotomie sono sufficientemente note a chiunque si occupi di matematica e quindi non ci soffermeremo su esse. La dicotomia unità-molteplicità del pensiero matematico è riconducibile alla supposizione di una fondazione unitaria della matematica versus una impossibilità di tale fondazione; la dicotomia relativa all'interiorità-esteriorità della disciplina pone invece la questione della possibilità o necessità della matematica di fondarsi su basi proprie, indipendentemente dalle relazioni con altre discipline, come per esempio le scienze naturali ma anche la logica stessa, nel momento in cui la logica non viene considerata come un ramo proprio della matematica; l'ultima dicotomia, quella relativa alla naturalezza-artificialità dei suoi risultati, si riferisce primariamente alla questione dell'indipendenza della matematica da una qualche realtà, sia concreta sia ideale (Zalamea, 2009/2012a).
Sulla base dell'analisi di tali dicotomie, Shapiro ottiene una classificazione di alcuni approcci in filosofia della matematica contemporanea facendo riferimento non a due, ma a quattro possibili combinazioni tra epistemologia realista o idealista, nonché tra ontologia realista o idealista (Tabella 8). Dunque, accanto alle più consuete combinazioni tra posizioni sia ontologiche sia epistemologiche realiste (realismo ontologico ed epistemologico: come esempi vengono citati Maddy, Resnik e Shapiro stesso) e posizioni sia ontologiche sia epistemologiche idealiste (idealismo ontologico ed epistemologico: come esempi vengono citati Dummett e Field), si configurano anche due possibili posizioni intermedie: realismo ontologico e idealismo epistemologico (come esempio viene citato Tennant) nonché idealismo ontologico e realismo epistemologico (come esempi vengono citati Chihara e Hellman).
Di conseguenza è dunque possibile pensare in generale a un approccio realista in ontologia, per esempio in una chiave strutturalista, in cui gli oggetti matematici sono oggettivamente esistenti in termini di insiemi o strutture in generale, e associarlo a un approccio idealista dal punto di vista epistemologico, in quanto tali strutture, per essere comunicate e apprese, devono essere "create" o "costruite" linguisticamente dall'essere umano. Viceversa è possibile pensare a un approccio idealista in ontologia, in cui si sostiene che gli oggetti matematici non esistono, se non nella mente dell'essere umano, ma allo stesso tempo assumere una posizione realista dal punto di vista epistemologico, supponendo che tali oggetti siano uguali per tutti gli esseri umani e che quindi le modalità con cui si accede a essi siano universali.

| | | EPISTEMOLOGIA | |
|---|---|---|---|
| | | *Realismo* | *Idealismo* |
| ONTOLOGIA | *Realismo* | Maddy, Resnik, Shapiro | Tennant |
| | *Idealismo* | Chihara, Hellman | Dummett, Field |

Tabella 8. Tendenze contemporanee in filosofia della matematica riguardo alle questioni ontologica ed epistemologica secondo Shapiro (tratto da Zalamea, 2009/2012a, p. 10).

In conclusione, possiamo affermare che la dualità reale-ideale corrisponde a grandi linee a quella realista-pragmatica caratterizzata in D'Amore (2001), in quanto l'aspetto più importante che contraddistingue il realismo è la supposta esistenza degli oggetti matematici indipendentemente dall'essere umano, aspetto che attribuisce loro un significato oggettivo e statico nel tempo e fa dipendere la loro conoscenza da criteri di validità assoluti, mentre l'idealismo è caratterizzato dal fatto di considerare gli oggetti matematici come prodotti della mente umana, aspetto che attribuisce loro un significato relativo e legato al contesto e fa dipendere la loro conoscenza da criteri di validità stabiliti dall'essere umano. Ciò che si aggiunge nella classificazione di Shapiro è, come già sottolineato, la possibilità di assumere anche posizioni non "pure".

### 10. 3. 1. 1. 3. Filosofia analitica e pratica della matematica

Classicamente le posizioni in filosofia della matematica sono quelle della filosofia analitica intesa come filosofia del linguaggio. Tale corrente filosofica continua a dominare ampiamente la scena della filosofia della matematica, come sottolinea Zalamea (2009/2012a), anche se, come si evince dalla classificazione di Shapiro, dal punto di vista della filosofia contemporanea della matematica, l'appartenenza alla corrente analitica non implica necessariamente una posizione ontologica o epistemologica realista.

D'altro canto, prospettive filosofiche come quella di Peirce (1960), di Wittgenstein del periodo delle Ricerche filosofiche (1953/2003) e di Lakatos (1976/1979), sono esempi di posizioni filosofiche di stampo pragmatico, a cui si ispirano molte posizioni in didattica della matematica,[166] come è stato possibile notare anche dalle

[166] Citiamo a tale proposito il *pragmati(ci)smo di Peirce* (1960) [si vedano a titolo di esempio Blossier, Barrier e Durand-Guerrier (2009) sul concetto di quantificatore in Peirce; Dörfler (2005,

caratteristiche delle definizioni di oggetto matematico evidenziate nel capitolo 8, in cui il significato degli oggetti matematici è sempre di natura pragmatica.
Dunque, in riferimento al fatto che una filosofia della matematica che possa fungere da base per una filosofia della didattica della matematica debba essere di tipo pragmatico, in modo tale da poter cogliere le caratteristiche della pratica matematica, sembra esistere ampio consenso tra i ricercatori in didattica della matematica. Ma, come abbiamo potuto constatare nel capitolo 9, gli approcci pragmatici in filosofia della matematica hanno difficolta a spiegare il legame con la matematica nella sua versione formale istituzionalizzata, aspetto di cui invece dovrebbe tenere conto una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica.
In questo senso, trovare un denominatore comune tra la filosofia della matematica in senso classico (intesa come filosofia analitica o filosofia del linguaggio), e le esigenze pragmatiche della didattica della matematica, legate alla pratica matematica in aula, sembra essere un'impresa difficile, data la distanza che separa la filosofia (analitica) della matematica, intesa come filosofia della matematica in senso classico, e la matematica stessa:

> Today's academic community is led to observe a deep abyss between mathematicians and historians of mathematics. The same is true, albeit to a lesser degree with respect to the relationships between mathematics and philosophy, especially linguistic or analytic philosophy. So, mathematical education might experience difficult times, looking for orientation. (Otte, 2018, p. 78)

La distanza tra filosofia (analitica) della matematica e la (pratica) matematica è dovuta soprattutto a due aspetti: (1) la base metodologica della filosofia analitica è legata alla logica del primo ordine classica, una logica statica, che non può tenere conto dell'evoluzione degli oggetti matematici durante la loro creazione o durante l'apprendimento, come invece richiederebbe una logica della *pratica* matematica, sia essa la pratica del matematico professionista sia essa la pratica d'aula

---

2016), sull'uso del concetto di segno in Peirce e sul ragionamento diagrammatico)]; il già ampiamente citato *quasi-empirismo di Lakatos* (1976/1979) (si vedano a titolo di esempio Balacheff (1991) e Nunokawa (1996), entrambi in riferimento alle dimostrazioni in didattica della matematica; Sriraman e English, 2010, in riferimento al ricorso al pensiero di Lakatos nelle teorie in didattica della matematica)]; *l'euristica di Pólya* (2014) [si vedano a titolo di esempio Kilpatrik (1987), in riferimento "all'eredità" dell'euristica di Pólya per la didattica della matematica; Ernest (2012), in riferimento al concetto di filosofia della matematica descrittiva invece che prescrittiva)]; *la filosofia del linguaggio di Wittgenstein del periodo delle Ricerche filosofiche* (Wittgenstein, 1953/2003) [si vedano a titolo di esempio Ernest, 1991/2004, in riferimento alla costruzione della conoscenza nell'ambito del costruttivismo sociale; Godino, Batanero e Font (2007), in riferimento al concetto di significato nell'approccio ontosemiotico; Sfard, Lavie e Steiner (2019) in riferimento al significato nell'ambito della Commognition)] o in generale posizioni legate a una *fenomenologia o filosofia derivata dall'analisi della pratica matematica* [si vedano a titolo di esempio le posizioni di Rota (1997), citate in Leung e Lopez-Real (2002) e di Thurston (1994), citato per esempio in Hanna (1996) e Boero, Douek e Ferrari (2008); Arzarello e Soldano (2019), in riferimento al concetto di dimostrazione nella pratica matematica].

nell'apprendimento della matematica; (2) il linguaggio di riferimento della logica classica è il linguaggio insiemistico e in esso gli oggetti matematici sono espressi in termini di insiemi nel senso classico del termine, mentre gli "oggetti" della pratica matematica sono oggetti in evoluzione, creati o trasformati dal processo creativo o di apprendimento; dunque, se gli oggetti matematici della pratica matematica fossero concepiti in termini di insiemi, allora sarebbe ragionevole pensarli non come insiemi fissi, ma come insiemi *variabili*, cioè in evoluzione durante la creazione o la concettualizzazione; (3) infine, nella pratica matematica sono primariamente le relazioni ad avere un ruolo centrale, in quanto sono esse che consentono la trasformazione di conoscenze pregresse in conoscenze nuove, mentre nella filosofia analitica in senso classico sono gli oggetti (in termini di insiemi sui quali si definiscono strutture) ad essere centrali.[167]

Nel capitolo 9 abbiamo messo in evidenza il fatto che per il nostro quadro teorico potrebbe essere di grande aiuto una filosofia della pratica matematica che abbia un'ontologia ed epistemologia compatibile con le esigenze della definizione da noi cercata.

Gli aspetti dinamici della creatività della pratica matematica, che non possono essere colti tramite gli strumenti della logica classica e il linguaggio insiemistico sono aspetti che caratterizzano in maniera sostanziale soprattutto la matematica contemporanea, cioè la matematica che vede la luce a partire dagli anni '50 del XX secolo in poi (Zalamea, 2009/2012a). È a partire dall'esame della produzione matematica contemporanea che Zalamea giunge infatti alla formulazione di un nuovo genere di filosofia della matematica che si presenta come una filosofia della pratica matematica che si contrappone a quella analitica, intesa come filosofia del linguaggio: la filosofia sintetica della matematica contemporanea (Zalamea, 2009/2012a).

Nei prossimi paragrafi caratterizzeremo in maniera più esaustiva questo approccio in filosofia della matematica poiché a nostro avviso in esso è possibile iscrivere il quadro teorico in cui si potrebbe inserire la definizione che stiamo cercando di fornire. La filosofia sintetica della matematica contemporanea informerà quindi il nostro quadro teorico sia dal punto di vista ontologico che epistemologico. Nell'esposizione faremo riferimento soprattutto a Zalamea (2009/2012a), ma in alcuni punti anche a Zalamea (2012b) e a Zalamea (2021).

[167] In realtà i tre punti evidenziati non sono tra loro indipendenti e sono anzi strettamente collegati, in quanto il tipo di logica determina il linguaggio di riferimento e il linguaggio determina la centralità degli oggetti o delle relazioni. D'altro canto, una logica stabilita a priori determina un linguaggio stabilito a priori, che a sua volta permette l'emergenza solo di una tipologia di oggetti stabilita a priori.

## 10. 3. 1. 2. La filosofia sintetica della matematica contemporanea

Come messo in evidenza nel paragrafo 10.3.1.1.2, secondo Shapiro (2000), gli approcci nella filosofia contemporanea della matematica si possono classificare in riferimento alla loro ontologia, che può essere realista o idealista, e in riferimento alla loro epistemologia, che può essere a sua volta o realista o idealista, ottenendo quattro possibili combinazioni di posizioni ontologiche ed epistemologiche.
Zalamea (2009/2012a) puntualizza come segue le quattro possibili combinazioni tra ontologia realista o idealista da un lato ed epistemologia realista o idealista dall'altro, così come emergono dall'analisi di Shapiro (2000):

> On the one hand, *ontological realism* has postulated that the objects studied by mathematics (whatever they are: ideas, forms, spaces, structures, etc.) lie buried in the real world, independently of our perception, while *ontological idealism* has suggested that mathematical objects are mere mental constructions. A realist stance thereby simplifies our supposed access to the real, while imposing strong constraints on the world (existential, formal, and structural constraints, etc.); in contrast, an idealist stance dismisses the world, sparing it from reliance on dubious organizational scaffoldings, but it faces the problem of mathematics' applicability head-on. *Epistemological realism*, on the other hand, has postulated (independently of any ontological position) that mathematical knowledge is not arbitrary and that its truth values are indices of a certain real stability, while *epistemological idealism* has regarded truth values as mere man-made mediations, which do not need to be propped up by any real correlate. An idealist stance again secures for itself a greater plasticity, with greater possibilities of access to the mathematical imagination, but it encounters serious difficulties at the junction of the imaginary and the real; a realist stance helps to understand mathematical thought's material success, but it places rigid restrictions on its creative liberty. (Zalamea, 2009/2012a, pp. 7–8, enfasi dell'Autore) [168]

---

[168] Il significato di fondo delle categorie *realista* e *idealista*, simile a quello della coppia di categorie *realista-pragmatista* (D'Amore, 2001), già discusse nel paragrafo 10.3.1.1., può essere accomunato anche a quello della coppia di categorie *assolutista-fallibilista* (Ernest, 1991/2004), con la differenza che con la prima coppia di categorie l'attenzione è focalizza sull'aspetto ontologico, dal quale si fa derivare quello epistemologico, mentre la seconda coppia di categorie tiene conto contemporaneamente, e in maniera indipendente, dell'aspetto ontologico e di quello epistemologico, mentre con la terza coppia di categorie l'attenzione si focalizza primariamente sull'aspetto epistemologico. Infatti, secondo Ernest, l'idea di una matematica intesa come scienza delle verità infallibili, *assolute*, impedisce la problematizzazione della *trasmissibilità* della (supposta) verità dalle premesse alle conclusioni tramite le dimostrazioni deduttive. Citando Kline, Popper, Kitcher, Wittgenstein, Putnam, Hersh e Lakatos, Ernest propone un punto di vista *fallibilista* che, a suo avviso, non intende "cacciare la matematica dal Paradiso", inteso come il regno della certezza e della verità, ma proporre un cambio di prospettiva in analogia con quanto accaduto in fisica, con la teoria quantistica, dove è stato necessario rinunciare alla certezza della determinazione contemporanea della posizione e dell'energia di una particella (Ernest, 1991/2004, p. 20). Facciamo notare che il termine "Paradiso" si riferisce qui a ciò che Hilbert affermò in riferimento al lavoro di Cantor, cioè che "nessuno potrà cacciarci dal Paradiso creato da Cantor" (Hilbert, 1926, p. 170).

L'obiezione che Zalamea muove in particolare alla posizione di Shapiro, e in generale alle classificazioni dicotomiche, è che un'adesione a-priori a posizioni ontologiche ed epistemologiche non permette di tenere conto della matematica reale, che viene fatta ogni giorno dai matematici e che non è riducibile a tali assunzioni:

> presuppositions prior to even setting eyes on the mathematical world has limited our perspective and has led to the perception of a rigid, static and eternal mathematics, a perception that has little or nothing to do with the real mathematics that is being done every day. Instead, a living mathematics, in incessant evolution, should be considered the basic presupposition of any subsequent philosophical consideration whatsoever. (Zalamea, 2009/2012a, p. 12)

La prospettiva filosofica della filosofia sintetica propone uno shift ontologico, epistemologico e metodologico importante, secondo cui è l'attività matematica "reale", la matematica "vivente", a dover precedere le prese di posizione ontologiche ed epistemologiche; è a partire dall'attività matematica che si dovrebbero dunque derivare un'ontologia e un'epistemologia e non viceversa. Questo punto di vista filosofico si contrappone dunque all'assunzione di posizioni *a-priori* riguardo alla questione ontologica ed epistemologica.
Nella filosofia sintetica della matematica non solo gli oggetti di studio sono tratti da ambiti della matematica contemporanea, e non solo da campi ristretti della disciplina, come per esempio le basi dell'aritmetica o la modalità organizzativa della geometria, ma lo sono anche i suoi *strumenti metodologici*. Come già evidenziato, anche la filosofia analitica si avvale di strumenti matematici per la propria analisi filosofica (la logica classica del primo ordine), ma Zalamea sottolinea che tale strumento è adatto all'analisi solo di una parte molto ristretta della produzione matematica che è molto diversa da quella che egli chiama "matematica reale". Inoltre, il suo motto "più matematica, meno filosofia" può essere interpretato nel senso della necessità di non considerare una logica prestabilita come base della matematica, ma di considerare la logica come uno strumento versatile che si configura secondo le esigenze della produzione matematica stessa (su questo aspetto si veda soprattutto Zalamea, 2012b).
Supposto che la filosofia matematica debba basarsi sulla pratica matematica, allora due sono le questioni da chiarire: (1) quale produzione matematica si dovrebbe scegliere come oggetto di studio; (2) quali sono le caratteristiche che contraddistinguono tale oggetto di studio. Dalla risposta a queste due questioni si potranno dedurre risposte alle domande più prettamente filosofiche, cioè relative alla natura degli oggetti matematici (la questione ontologica) e relative ai modi di acquisire conoscenza in matematica (la questione epistemologica), nonché relative alla fenomenologia della creatività matematica, dalla quale poi dedurre eventuali principi metodologici.
Per rispondere alle due questioni evidenziate, è necessario chiarire qual è la matematica che Zalamea considera come adatta per caratterizzare la pratica matematica.

Secondo l'Autore, la restrizione della filosofia della matematica ai soli ambiti in cui c'è un'invarianza di tipo di oggetti e di tipo di metodi (p.e. Geometria analitica e Geometria sintetica) è un errore metodologico grave, poiché tale restrizione si basa sull'idea errata che non ci sia differenza tra matematica elementare e matematica avanzata e che non ci sia una dualità di transito e di invarianti tra diversi ambiti matematici (Zalamea, 2009/2012a, p. 24). Queste presupposizioni impediscono di vedere la vera natura di quella che Zalamea chiama, seguendo Corfield, "real mathematics":

> Following David Corfield, we will call 'real mathematics' the warp of advanced mathematical knowledge that mathematicians encounter daily in their work, a warp that can be seen as perfectly real from several points of view: as a stable object of investigation for a broad community, as an assemblage of knowledge with a visible influence on the practice of the discipline, and as a framework that can be effectively contrasted with the physical world. (Zalamea, 2009/2012a, pp. 24–25)

Nell'immagine (Figura 31) sono rappresentate le relazioni tra le diverse tipologie di produzione matematica individuate da Zalamea. Una prima distinzione è quella tra matematica elementare e matematica avanzata. La matematica elementare si rispecchia nel corrispondente concetto di matematica elementare proposto da Felix Klein (1908, 1909), secondo cui la matematica elementare è la matematica che storicamente precede l'ingresso nel campo dell'Analisi matematica. La matematica avanzata è invece quella "reale" nel senso evidenziato dalla citazione precedente.

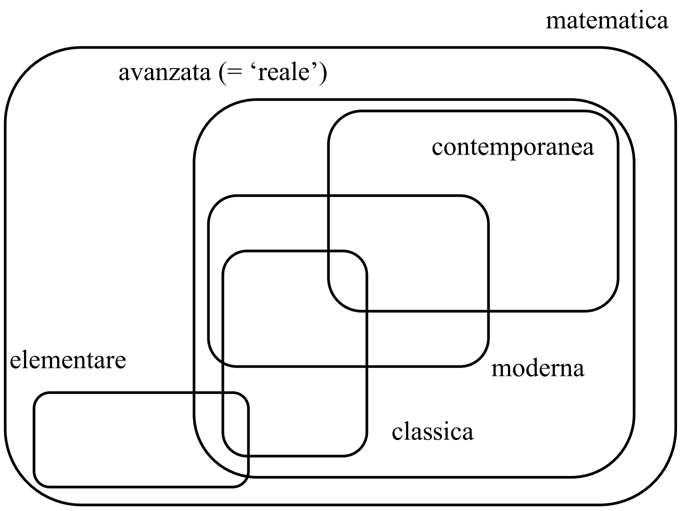



Figura 31. Correlazioni tra le tipologie matematiche: elementare, avanzata, classica, moderna e contemporanea (adattato da Zalamea, 2009/2012a, p. 26).

Come si evince dal grafico (Figura 31), la matematica elementare è quella che precede quella avanzata ed è quindi costituita da tutta la produzione matematica greca, come gli *Elementi* di Euclide, dalla matematica araba, con l'inizio dell'impiego dell'algebra per le soluzioni delle equazioni, dalla matematica del Rinascimento europeo, compresi i lavori relativi alle soluzioni generali delle equazioni di terzo e quarto grado, nonché la comparsa dei numeri complessi (o più precisamente dell'unità immaginaria e delle regole di calcolo con essa), dall'algebra simbolica, ma anche dalla geometria analitica cartesiana.
La matematica avanzata è composta invece dalla matematica classica, da quella moderna e da quella contemporanea e quindi comprende la produzione matematica a partire circa dalla metà del XVII secolo in poi, cioè dall'ingresso nel campo del calcolo differenziale. Essa si suddivide in tre periodi con caratteristiche fondamentalmente diverse della produzione matematica:

- *matematica classica* (metà XVII sec. – metà XIX sec.), in cui l'aspetto primario è l'uso sofisticato dell'infinito e i cui esponenti principali sono Pascal, Leibniz, Euler e Gauss;
- *matematica moderna* (metà XIX sec. – metà XX sec.), in cui l'aspetto primario è l'uso sofisticato di proprietà strutturali e qualitative e i cui esponenti principali sono Galois, Riemann e Hilbert;
- *matematica contemporanea* (metà XX sec. – oggi), in cui l'aspetto primario è l'uso sofisticato di proprietà di trasferimento (*transference*), riflessione (*reflection*) e incollaggio (*gluing*) e i cui esponenti principali sono Grothendieck, Serre e Shelah. (Zalamea, 2009/2012a, p. 27)

Ispirandosi ai lavori di Lautman (1908-1944/2011), il cui studio della matematica moderna egli intende estendere a quella contemporanea, Zalamea evidenzia come caratteristiche specifiche della matematica avanzata, delle quali è esente la matematica elementare, le seguenti cinque:

> *1. a complex hierarchization* of diverse mathematical theories, irreducible to one another, relative to intermediary systems of deduction;
> *2. a richness of models*, irreducible to merely linguistic manipulations;
> *3. a unity* of structural methods and conceptual polarities, behind their effective multiplicity;
> *4. a dynamics* of mathematical activity, contrasted between the free and the saturated,[169] attentive to division and dialectics;
> 5. *a theorematic interlacing* of what is multiple on one level with what is one on another, by means of mixtures, ascents and descents. (Zalamea, 2009/2012a, p. 30)

Caratteristiche fondamentali della matematica avanzata sono dunque la sua complessità, la sua ricchezza semantica, la sua forza unificante, in contrasto con

[169] I concetti di "free" e "saturated" si possono intendere in analogia con quelli di "indeterminato" e "determinato", rispettivamente.

idee di separazione e polarizzazione, la sua dinamicità, nonché il suo intreccio di aspetti generali e particolari.
Oltre a questi cinque punti, già evidenziati da Lautman (1908-1944/2011), che distinguono la matematica moderna da quella elementare, Zalamea individua altri cinque che si aggiungono come tratti distintivi specifici della matematica contemporanea:

> 6. the structural *impurity* of arithmetic (Weil's conjectures, Langlands's program, the theorems of Deligne, Faltings and Wiles, etc.);
> 7. the systematic *geometrization* of all environments of mathematics (sheaves, homologies, cobordisms, geometrical logic, etc.);
> 8. the *schematization*, and the liberation from set theoretical, algebraic and topological restrictions (groupoids, categories, schemas, topoi, motifs, etc.);
> 9. the *fluxion* and deformation of the usual boundaries of mathematical structures (nonlinearity, noncommutativity, nonelementarity, quantization, etc.);
> 10. the *riflexivity* of theories and models onto themselves (classification theory, fixed-point theorems, monstrous models, elementary/nonelementary classes, etc.). (Zalamea, 2009/2012a, pp. 41–42)

I punti 6 e 7 mettono soprattutto in evidenza che la matematica contemporanea presenta "transiti" da una base aritmetica a una base diversa (non solo geometrica) e che tale transito diventa evidente tramite una sorta di impurità dell'aritmetica, cioè tramite il ricorso a dimostrazioni di enunciati aritmetici attraverso argomenti non necessariamente aritmetici, dato che la struttura aritmetica non ben definita come le altre, non garantisce una modellizzazione.
Il punto 8 fa riferimento soprattutto al ruolo del concetto di *schema* introdotto da Grothendieck come strumento che consente di superare le separazioni tra ambiti matematici, in particolare tra algebra e geometria, arrivando a una concezione moderna di Geometria algebrica.
Il punto 9 riguarda primariamente i concetti che consentono di superare le barriere, come per esempio la non commutatività, mentre il punto 10 si riferisce alla capacità di cogliere aspetti di regolarità e ricorsività nei fenomeni descritti dalla matematica.
Dalle caratteristiche qui evidenziate emerge dunque una matematica contemporanea che si differenzia dalla matematica elementare per alcuni aspetti legati alla dinamicità e alla trasversalità, in cui i nuovi oggetti matematici sono spesso costrutti che esprimono tale trasversalità e dinamicità. Come esempio paradigmatico in questo senso si può infatti pensare al concetto di fascio e come produzione paradigmatica in questo senso a quella di Grothendieck, che si contraddistingue per la presenza di tutte le caratteristiche evidenziate in precedenza nei punti 6–10: "Grothendieck's work is a prime example, in which every instrument is simply directed toward controlling the transit of certain global mathematical conceptions through an enormous spectrum of local environments" (Zalamea, 2009/2012a, p. 46).

Pur essendo vero che esistono importanti risultati matematici che dimostrano che *ogni* costruzione matematica può essere rappresentata all'interno di un'appropriata teoria degli insiemi e che la stragrande maggioranza della matematica finora prodotta si possa rappresentare all'interno della teoria degli insiemi determinata dagli assiomi di Zermelo-Fraenkel (ZF) e che la matematica possa essere quindi colta tramite la sottostante logica classica del primo ordine, è pur vero, nota Zalamea, che questo fatto ha un valore puramente logico, che si configura come molto lontano dagli aspetti legati alla pratica matematica e al valore prettamente matematico dei risultati in questione (Zalamea, 2009/2012a, pp. 27–28).
Uno degli argomenti che viene spesso usato per sostenere che la matematica elementare sia sufficiente come oggetto dell'indagine filosofica in matematica è il fatto che ogni proposizione matematica vera, in quanto tautologia, è equivalente a qualsiasi altra dello stesso genere (Zalamea, 2009/2012a, p. 30). Come nota l'Autore, questo porta ad affermare che la proposizione "2+2=4" è equivalente al teorema di Hahn-Banach. Si tratta di un'affermazione che, pur essendo corretta dal punto di vista logico, è semanticamente insignificante per la pratica matematica; essa si basa sul fatto che il confronto tra le due proposizioni è effettuato all'interno di un sistema di base troppo potente, cioè il sistema ZF, in cui le differenze vengono annullate in quanto il sistema, nella sua generalità, non è in grado di coglierle (Zalamea, 2009/2012a, pp. 31–32). Una soluzione che consente confronti semanticamente più significativi, nota l'Autore, è quella proposta dalla *reverse mathematics*, nella quale si tratta di individuare gli assiomi rilevanti per un dato teorema, il che porta alla possibilità di un confronto tra ambienti molto meno potenti ma rilevanti per le diverse proposizioni.
Prima di procedere con l'analisi dei lavori di filosofi che hanno messo in primo piano la pratica matematica, Zalamea esamina estesamente i lavori di Lautman, come esempio di filosofo che ha analizzato in maniera molto profonda le caratteristiche della matematica moderna, e procede poi con l'analisi dei lavori di altri autori, alcuni dei quali citati di frequente anche in didattica della matematica, come per esempio Pólya, Lakatos, Kline, Tymoczko, Chatelet, Rota, mettendo in evidenza di quale delle tre tipologie di matematica (classica, moderna, contemporanea) si sono occupati:

> As we shall see, these approaches for the most part appear to concern classical mathematics (Pólya, Lakatos, Kline, Wilder, Kitcher), though other endeavors seek to examine modern (de Lorenzo, Mac Lane, Tymoczko, Chatelet, Rota), and even contemporary (Badiou, Maddy, Patras, Corfield), mathematics. We do not find a comprehension of modern mathematics as precise and broad as that achieved by Lautman in any of the cases of which we are aware. (Zalamea, 2009/2012a, p. 71)

Non esamineremo in dettaglio l'analisi dei diversi lavori, rinviando per maggiori dettagli a Zalamea (2009/2012a), ma vogliamo fare un breve cenno, a titolo di esempio, alle analisi dei contributi di Lakatos, Tymoczko e Rota.
Riguardo a Lakatos, Zalamea evidenzia la distanza che separa il Lakatos filosofo dalla matematica della sua epoca, "preventing him from taking anything like

snapshots of the mathematical thinking being forged around him" (Zalamea, 2009/2012a, p. 76). I contenuti matematici su cui si concentra Lakatos sono principalmente tratti dalla matematica elementare o classica (matematica greca, Abel, Cauchy), anche se sono esaminati gli aspetti fondazionali della fine del XIX-inizio XX secolo, benché con un'impostazione tipica della filosofia della matematica del XX secolo, di stampo analitico, e non manca un cenno all'Analisi non standard di Robinson. Inoltre, Zalamea muove una critica a Lakatos riguardo alle considerazioni che quest'ultimo fa in riferimento alla supposta indecidibilità del ben noto Teorema di Fermat, pur essendo, al tempo della stesura del testo di Lakatos (1976/1979), già stati messi a punto da Grothendieck gli strumenti tecnici che avrebbero permesso a Wiles (nel 1994) di fornire una dimostrazione della congettura di Fermat, che da allora in poi è un teorema a tutti gli effetti:[170] "Instead, somewhat dubious speculations are entertained regarding the undecidability of Fermat's Theorem – yet another example of the distance between the philosopher of mathematics and the mathematics of his epoch" (Zalamea, 2009/2012a, p. 76). La posizione "quasi-empirista" di Tymoczko (1985), che si basa sull'osservazione della pratica matematica, ma anche su una relativizzazione evolutiva degli standard di *verità* e *dimostrazione*, in linea con un concetto storicamente e culturalmente determinato di rigore in generale (si veda per esempio Grabiner, 2012), sembra sancire una sconfitta definitiva della filosofia come strumento per la comprensione globale dell'attività matematica, anche a causa della sempre crescente complessità dell'architettonica matematica. Secondo Zalamea questa posizione è dovuta a una conoscenza non approfondita della matematica reale; egli sottolinea che:

> The sort of 'quasi-empiricism' that Tymoczko adopts indicates that a deeper knowledge of mathematical practice could help to resolve certain philosophical controversies regarding realism and idealism, and that therefore (and this is one of the central foci of the present work) not only more philosophy, but more mathematics. (Zalamea, 2009/2012a, pp. 84–85)[171]

In Rota, Zalamea individua idee brillanti e "incendiarie" (Zalamea, 2009/2012a, p. 85) e una visione della matematica dinamica, oscillante e fluttuante, fermamente legata a personaggi e luoghi specifici della sua storia. Per Rota, evidenzia Zalamea:

---

[170] Ricordiamo che lo stesso Fermat aveva lasciato solo una nota a margine di un'edizione dell'*Aritmetica* di Diofanto, in cui affermava di essere in possesso di una dimostrazione della proposizione oggi nota come *Teorema di Fermat*, ma che essa non poteva trovare spazio nel ristretto margine di un libro. È chiaro che la dimostrazione fornita da Wiles non può essere la stessa che si possa supporre avesse Fermat, dato che il primo usò strumenti matematici non noti ai tempi di Fermat.

[171] Per una critica estesa della posizione assunta da Tymoczko, in particolare in riferimento alle conseguenze dovute alla dimostrazione assistita da calcolatore del Teorema dei Quattro colori, si veda Lolli (1987).

> analytic philosophy, 'perniciously influenced' by classical logic and by set theory, has turned its back on and has abandoned high mathematical creativity, be it geometrical, topological, differential, algebraic or combinatorial, thereby estranging itself from the real center of the discipline that helped it to emerge. (Zalamea, 2009/2012a, p. 87)

Inoltre, in Rota è presente una nuova idea di ontologia della matematica, in cui è centrale il concetto di *identità* e il cui scopo è quello di definire "the 'essence' of an object as its very web of factual superpositions, and which would help to replace an obsolete mathematical ontology (the 'comedy of existence' of mathematical objects)" (Zalamea, 2009/2012a, p. 86).
Rota recupera a tale scopo la nozione di *Fundierung* (fondazione), di origine husserliana, come passaggio tra il fattuale[172] (*factual*) e il funzionale. Prima di proseguire, caratterizziamo brevemente questi due concetti.

### 10. 3. 1. 2. 1. Digressione sui concetti di *Fundierung* e *facticity* in Rota

Secondo Rota, la *Fundierung* è una relazione di dipendenza, una relazione logica primaria che deve essere aggiunta alla nostra "logica del ragionamento" (Rota, 1973/1991, p. 42); si tratta di una relazione tra l'esperienza del mondo e la base fisica in cui essa è stratificata. Tale relazione è primaria in quanto non è riducibile ad altre; si può dire che un concetto A è fondato in un concetto B quando è impossibile pensare o raffigurarsi A senza pensare o raffigurarsi B, pur non essendo A riducibile a B.
La messa in evidenza della relazione di *Fundierung* consente di evitare il ricorso a un approccio riduzionista, in cui la caratterizzazione di un oggetto è fornita sempre per mezzo di spiegazioni mediate e mai dirette. L'errore del riduzionismo consiste infatti per Rota nel confondere il fenomeno del mondo (*worldly phenomenon*) con qualche fenomeno fisico o mentale su cui esso si fonda. Rota parla appunto per questo motivo di "fenomeno del mondo", evitando così qualsiasi affermazione riguardo all'esistenza reale o ideale degli oggetti; un fenomeno del mondo è in questo senso né fisico né mentale, ma contestuale. Così, per esempio, il fenomeno del mondo chiamato "giocare a scacchi" è legato da una relazione di *Fundierung* con le figure e la scacchiera, ma esso non è riducibile né al supporto materiale del gioco (scacchiera, figure), né a un fenomeno mentale, dato che il gioco degli scacchi non sta nel cervello di chi gioca. Il concetto di *facticity* (fatticità) denota le caratteristiche sulle quali si fonda un fenomeno del mondo nel senso del termine *Fundierung*; ma un fenomeno del mondo non è riducibile alle sue fatticità e dovrebbe essere considerato separatamente da esse. Un termine che Rota considera adatto per rendere bene il senso del termine *facticity* è il termine

[172] "Fattuale" nel senso di riferito a fatti.

"coping with" (Rota, 1973/1991, p. 46), cioè "far fronte a" o "tenere conto di". Così, per esempio, per giocare a scacchi bisogna tenere conto del fatto che servono una scacchiera e le figure, ma anche una spiegazione di come si gioca (per esempio un manuale o la spiegazione di un'altra persona), però il gioco degli scacchi non si riduce all'insieme di tali fatticità.

Ciò che manca in Rota, secondo Zalamea, è una sistematica elaborazione delle sue idee "brillanti e distillate" (Zalamea, 2009/2012a, p. 88), alcune delle quali egli si prefigge di elaborare in maniera più articolata. Notiamo infatti che è esattamente in tale direzione che si inserisce la filosofia sintetica della matematica contemporanea.

Dopo aver caratterizzato in termini generali le basi della filosofia sintetica della matematica contemporanea (Zalamea, 2009/2012a), presentiamo di seguito una breve caratterizzazione del modo in cui in essa vengono affrontate le questioni ontologica, epistemologica e fenomenologica.

#### 10. 3. 1. 2. 2. Questioni ontologiche

Le considerazioni riguardo la natura degli oggetti matematici nella filosofia sintetica della matematica contemporanea (Zalamea, 2009/2012a) tengono conto non solo della domanda "What?", cioè "Cosa?", ma anche della domanda "Where?", cioè "Dove?", considerando però che la risposta alla seconda domanda influenza la risposta alla prima. Si tratta dunque di un'ontologia che assume facce diverse in base al "luogo" (metaforico, nel senso del contesto sia culturale sia più prettamente matematico) in cui si intende conoscere l'oggetto, del quale non è possibile fornire una caratterizzazione aprioristica:

> contemporary mathematics is incessantly occupied with processes of transit in exact thought, involved in multiple webs of contradistinction, both internal and external. From this it immediately follows that the questions concerning the content and place of mathematical objects – the ontological 'what' and 'where' – through which we hope to describe and situate those objects, cannot be given absolute answers, and cannot be fixed in advance. The relativity of the 'what' and the 'where' are indispensable to contemporary mathematics, where everything tends toward transformation and flux. (Zalamea, 2009/2012a, p. 270)

Zalamea fa risalire questo cambio di prospettiva ontologica al lavoro di Grothendieck, che in matematica ha avuto un effetto simile a quello che ebbe la nascita della teoria della relatività in fisica; infatti, è a Grothendieck che Zalamea attribuisce la "svolta einsteineriana" (Zalamea, 2009/2012a, pp. 270–271) in matematica. Tale svolta consiste nel mettere al centro dell'attenzione il movimento, il transito degli oggetti, come nella teoria della relatività viene messo al centro il movimento degli osservatori; ciò che in tale "matematica relativa"

(*relative mathematics*) diventa centrale, è l'individuazione di invarianti appropriati che "si celano" dietro ai transiti.
Gli oggetti matematici in questa prospettiva cessano di essere "Uno", cioè entità con un'identità unitaria, e diventano "Molti", cioè entità variabili aventi molte facce che si configurano sotto forma di reti e come processi che evolvono nel tempo:

> Objects in this realm cease to be fixed, stable, classical and well founded-in sum, they cease to be 'ones'. Instead they tend toward the mobile, the unstable, the nonclassical, and the merely contextually founded – in short, they approach 'the many'. Multiplicity everywhere underlies contemporary transit, and the objects of mathematics basically become webs and processes. Determinate 'entities' firmly situated in one absolute, hard and fast universe, do not exist; instead we have complex signic webs interlaced with one another in various relative, plastic and fluid universes. (Zalamea, 2009/2012a, pp. 271–272)

Dunque, se il "Dove?" determina il "Cosa?", allora il contesto nel quale si considerano gli oggetti matematici determinerà la loro natura: in teoria degli insiemi si avranno necessariamente solo oggetti statici, fissi; se il contesto è invece quello della teoria delle categorie, allora sarà possibile considerare oggetti dinamici, che Zalamea chiama (quasi-)oggetti (Zalamea, 2009/2012a, p. 323), poiché sarà possibile cogliere le loro *transizioni* nel tempo. Come nota Zalamea, non c'è nulla all'infuori della tradizione che impedisce di considerare l'ontologia come lo studio di "oggetti asintotici", che evolvono come complessi di "mondo" e conoscenza, piuttosto che come lo studio di entità o essenze atemporali:

> though the Greek *ontotetês* sends us, through Latin translations, to a supposedly atemporal 'entity' or an 'essence' that 'ontology' would study, there is no reason (besides tradition) to believe that those entities or essences should be absolute and not *asymptotic, governed by partial gluings in a correlative bimodal evolution* between the world and knowledge.[173] (Zalamea, 2009/2012a, p. 277)

Riguardo alle modalità di considerare gli oggetti con un approccio insiemistico o categoriale, Zalamea evidenzia come nel primo caso gli oggetti sono analizzati come dei conglomerati o aggregati di elementi, cioè riducendoli a insiemi di elementi (questo è appunto per Zalamea l'approccio *analitico* agli oggetti), mentre nel secondo caso gli oggetti sono studiati in riferimento al loro comportamento esterno, cioè in virtù delle loro relazioni con gli altri oggetti in un dato contesto, espresse tramite i morfismi della categoria alla quale si suppone che

---

[173] Notiamo qui come il "processo bimodale tra conoscenza e mondo" di cui parla Zalamea sia in accordo con il concetto di "schiusura" (*disclosure*) secondo Rota: "We will use the term disclusure to denote the primordial way whereby Dasein relates to the world" (Rota, 1973/1991, p. 254), dove il "Dasein" è l'essere inteso come essere-nel mondo. Secondo Zalamea gli oggetti matematici possono essere visti come un'evoluzione bimodale unitaria tra l'esperienza del mondo (che possiamo identificare con la sua "schiusura") e la presa di coscienza di tale "schiusura", interpretata come comprensione.

appartengono[174] (questo è per Zalamea l'approccio *sintetico* agli oggetti) (Zalamea, 2009/2012a, p. 288).
In questo senso, gli oggetti che formano un contesto sono visti quindi come oggetti di una categoria, mentre le relazioni tra essi sono viste come i morfismi della categoria. Se l'oggetto viene studiato per via sintetica allora la sua definizione si dovrà basare sui morfismi che lo legano agli altri oggetti.[175]
Un problema che si pone è quello del grado di generalità di un morfismo o, come la chiama Zalamea, "l'universalità" di un morfismo rispetto a una certa proprietà. Detto diversamente: che cosa garantisce che una relazione tra l'oggetto e il suo contesto rimandi un'immagine dell'oggetto che sia generale (o generalizzabile)? A tale proposito Zalamea scrive quanto segue: "(A)a morphism is universal with respect to a given property if its behaviour with respect to other similar morphisms in the category possesses certain characteristics of unicity that distinguish it within the categorial environment" (Zalamea, 2009/2012a, p. 289). Questo significa che un morfismo (cioè una relazione) dell'oggetto con il contesto costituito da altri oggetti è universale se non ci sono altri morfismi della categoria con caratteristiche analoghe.
Concludiamo l'esposizione relativa agli aspetti ontologici nella filosofia sintetica della matematica mettendo in evidenza il fatto che in tale approccio la logica di riferimento non è stabilita a priori ma assume aspetti diversi, sulla base dell'ambiente matematico in cui si colloca l'attività matematica e sulla base delle esigenze della pratica matematica.
È legittimo chiedersi se e in che modo l'approccio sintetico alla matematica contemporanea sia compatibile con la matematica come essa viene di solito formulata ed espressa nel linguaggio degli insiemi e con la logica classica bivalente, a cui essa fa riferimento. A tale proposito rinviamo al lavoro di Caicedo (1995), che mostra in quali termini ci sia una tale compatibilità. In questo senso la logica classica, che è la logica associata alla teoria degli insiemi, è un caso limite della logica intuizionistica, che è una logica dei fasci, associata alla teoria delle categorie. A tale proposito Zalamea scrive quanto segue:

> A result due to Caicedo shows that classical logic in a 'generic' fiber of a sheaf of first-order structures is no more than an adequate limit if intuitionistic logic in the 'real' fibers of the sheaf. This remarkable situation shows that the construction of the classical and the positive as 'limit idealizations', as seen in the aforementioned mathematical examples, is reflected in the realm of logic as well, and in exactly the same fashion. What comes to the surface, once again, is the continuity of

[174]Tratteremo in maniera estesa il concetto di categoria nel capitolo 11. Qui premettiamo solo in maniera intuitiva che una categoria è composta da una classe di oggetti generici, che possono essere anche degli insiemi, e da un insieme di morfismi (o frecce), aventi ciascuno un solo oggetto come dominio e un solo oggetto come codominio, compresi i morfismi identità per ciascun oggetto, nonché da una operazione di composizione tra morfismi che è associativa.
[175] Anche qui ci sembra forte l'analogia con l'idea di contesto come "rete di funzioni" (network of functions), in cui la "comprensione" è la comprensione di una tale funzione, cioè il suo coglierla considerandola con una certa finalità (Rota, 1973/1991, p. 253).

> mathematical knowledge, for which watertight compartments are worthless. (Zalamea, 2009/2012a, p. 283)

### 10. 3. 1. 2. 3. Questioni epistemologiche

La natura transitoria degli oggetti matematici e la loro conformazione in reti di relazioni in contesto porta a un tipo di epistemologia che non può essere quella classica, nella quale gli oggetti sono entità statiche e unitarie.[176]
Lo strumento che Zalamea propone per un'epistemologia che sia in grado di integrare diverse prospettive, e che lui chiama "epistemologia comparativa", è una sorta di "fascio" epistemologico, ispirato al corrispondente strumento matematico che rappresenta uno degli strumenti di base della geometria algebrica di Grothendieck (sull'opera di Grothendieck si veda Zalamea, 2019).[177]
Per comprendere meglio il genere di epistemologia che Zalamea propone, è necessario tenere presente, come già evidenziato in precedenza, che essa si riferisce a dei (quasi-)oggetti che sono in realtà reti di relazioni e che in essi si sovrappongono e intrecciano gli aspetti ontologici ed epistemologici in una prospettiva fenomenologica di esperienza e comprensione.
Dunque, adottando una prospettiva fenomenologica, la commensurabilità tra le interpretazioni delle *fatticità* dei *fenomeni del mondo*, per citare Rota (1973/1991), non deve essere necessariamente stabilita a livello ontologico e a livello epistemologico (anche se naturalmente può esserlo), ma può anche semplicemente essere stabilita pragmaticamente, a partire dall'utilità pratica, cioè dalla *funzionalità* (Rota, 1973/1991) dell'accostamento di due prospettive epistemologiche differenti. Solo successivamente si cercherà un "accordo" in termini di commensurabilità, che dovrà emergere dalla ricerca stessa.
Zalamea prende in esame tre polarità che caratterizzano a suo avviso un approccio epistemologico e che egli usa per inquadrare l'approccio epistemologico della filosofia sintetica della matematica contemporanea: (a) la *polarità analisi-sintesi*; (b) la *polarità idealismo-realismo*; (c) la *polarità intensionalità-estensionalità*.

---

[176] Sottolineiamo che un'epistemologia adatta a un'ontologia transitoria deve essere in grado di superare le frontiere tra il concettuale e il materiale (Zalamea, 2009/2012a, pp. 295–296), ma anche di rendere flessibili e mobili tali frontiere. Notiamo inoltre che ciò che qui si deve intendere per "concettuale" è simile a ciò che in D'Amore (2001) è considerato pragmatico e in Shapiro (2000) idealista, mentre ciò che si deve intendere per "materiale" è simile a ciò che in D'Amore (2001) è chiamato "realista" e in Shapiro (2000) "strutturalista". Naturalmente non vi è una sovrapposizione tra i significati dei termini in questione, ma vi è una certa analogia che ci sembra sufficiente per rendere più facilmente comprensibili le relazioni tra i concetti.
[177] Dal punto di vista puramente concettuale, un fascio unisce in sé il concetto di proiezione (puntuale) di uno spazio topologico su uno spazio base e il concetto di contro-proiezione (funzionale) che consente di individuare possibili continuità nello spazio proiettato.

La prima polarità, cioè la *polarità analisi-sintesi*, può essere vista, in un senso dialettico classico, come l'acquisizione di conoscenza tramite una contrapposizione tra tesi (conoscenza per "scomposizione") e antitesi (conoscenza per "composizione"). Se la si considera però in un senso relativo, cioè senza riferimento a criteri assoluti, allora la conoscenza del mondo in realtà si presenta come un'oscillazione perpetua tra differenziazione (analisi) e integrazione (sintesi), nella quale queste due componenti sono bilanciate in uno sforzo gnoseologico continuo, tramite il quale la ragione "ascende" attraverso l'analisi e "discende" attraverso la sintesi (Zalamea, 2009/2012a, pp. 317–318). L'Autore associa metaforicamente la teoria degli insiemi all'approccio tipico dell'analisi e la teoria delle categorie all'approccio tipico della sintesi, mettendo in evidenza che il primo è predominante nella visione analitica della matematica, mentre il secondo caratterizza la matematica contemporanea reale. Egli non nega l'importanza del ruolo che le formulazioni insiemistiche hanno nella messa in evidenza nonché nella risoluzione di molti problemi, e dunque nell'acquisizione di un certo tipo di conoscenza in matematica (Zalamea, 2009/2012a, p. 317). In realtà nella pratica matematica si ha però una costante oscillazione tra linguaggio di tipo categoriale e linguaggio di tipo insiemistico ed è il secondo che può essere contestualizzato nel primo e non viceversa. Dunque: l'approccio epistemologico generale è di tipo sintetico, ma in esso si coniugano analisi e sintesi.[178]

Riguardo alla *polarità idealismo-realismo* abbiamo già scritto nei paragrafi precedenti. Aggiungiamo qui soltanto che, poiché secondo Zalamea i modi in cui gli oggetti matematici nascono e si manifestano e i modi in cui essi sono compresi sono intrecciati e si riflettono l'uno nell'altro, dando luogo a transiti tra ontologia, fenomenologia ed epistemologia, il compito dell'epistemologia della matematica non dovrebbe essere quello di definire i concetti di reale e ideale in maniera assoluta, ma quello di caratterizzare le forme di transito tra molti strati di idealità e realtà che compongono i (quasi-)oggetti matematici:

> mathematical (quasi-)objects modes of creation, modes of existence, and the modes by which they are known are interlaced and reflected in one another (general transitoriness between phenomenology, ontology and epistemology). The relative (partial, hierarchized, distributed) knowledge of those transits therefore becomes an indispensable task for mathematical epistemology. Beyond trying to define the ideal or the real in an absolute manner (a definition that, from our perspective, reflects a poorly posed problem), the crucial task of mathematical epistemology should instead consist in describing, pinpointing, hierarchizing, decomposing and recomposing the

[178] Parlare di analisi e sintesi, che richiamano le concezioni cartesiane di ragione e di conoscenza, non deve essere visto, a nostro avviso, come in contrasto con una posizione fenomenologica, in cui il ruolo di tali strumenti non è negato, ma ridimensionato in un contesto differente. Infatti, la comprensione delle relazioni "presenti" tra le funzioni che determinano un oggetto in un contesto è, secondo Rota, uno dei termini della comprensione di senso, anche se non l'unica (Rota, 1973/1991, p. 253). A nostro avviso tale comprensione può essere vista come un risultato della dialettica tra analisi e sintesi.

> diverse forms of transit between the many strata of ideality and reality of mathematical (quasi-)objects. (Zalamea, 2009/2012a, pp. 323–324)

La *polarità estensivo-intensivo* è originata da una messa in discussione del principio di astrazione di Frege, secondo cui ogni proprietà individua l'insieme degli oggetti che hanno tale proprietà. Come già evidenziato in precedenza, nel sistema assiomatico ZF tale principio è introdotto attraverso l'assioma di separazione, che induce una simmetria tra gli aspetti estensivi e intensivi: "given a set $A$ and a formula $\varphi(x)$, there exists a subset $B=\{a \in A: \varphi(a)\}$, and so an equivalence obtains (locally, within the restricted universe $A$) between $\varphi(a)$ (intensionality) and $a \in B$ (extensionality)" (Zalamea, 2009/2012a, p. 324).
Come sottolinea l'Autore, a parte la convenienza tecnica di tale simmetria, dalla quale dipende anche la natura del continuo cantoriano, non vi sono dei motivi di natura filosofica o matematica che vietino una rottura nella simmetria del principio di astrazione fregeano, che potrebbe anche essere assunta come un presupposto necessario per una concezione non-cantoriana di continuo (Zalamea, 2012b). Inoltre, nota Zalamea, molte caratteristiche intensionali degli oggetti e dei processi matematici che possono essere colte tramite un'impostazione categoriale non consentono una descrizione insiemistica, testimoniando in questo modo a favore di una sostanziale asimmetria del principio di astrazione (Zalamea, 2009/2012a, p. 325; si veda anche il paragrafo 9.3.2.4.).[179] Zalamea sottolinea che dalla prospettiva di asimmetrizzazione del principio di astrazione di Frege, e quindi della non generalità dell'assioma di separazione, discende la possibilità che non tutte le formule diano luogo a classi e che la presunzione di "esistenza" dei punti come entità geometriche di base possa essere eliminata, il che significa che la fondazione analitica, e quindi aritmetica, della matematica non è un fattore *necessario* per la matematica.

### 10. 3. 1. 2. 4. Aspetti fenomenologici

Un ultimo aspetto della filosofia sintetica zalameana che riteniamo importante esporre qui è legato a quella che l'Autore chiama "la fenomenologia della creatività matematica" e che lui evidenzia come poco o per nulla presa in esame dalla filosofia tradizionale (analitica) della matematica. Nonostante molti matematici attivi (Poincaré, Hadamard, Grothendieck, Rota) si siano occupati degli aspetti legati alla creatività matematica, la filosofia "professionale" della matematica non ha fatto tesoro di tali lavori.

[179] Naturalmente intendiamo affermare che tale principio non è un principio *generale*, non che esso non possa valere in *particolare*. Anche in questo caso, la simmetria può essere vista come un caso limite dell'asimmetria del principio di astrazione di Frege. Nell'ambito della didattica della matematica rimandiamo per una discussione approfondita delle tipologie di ragionamento che discendono dagli aspetti intensionale ed estensionale del ragionamento a Vargas (2020).

Per riuscire a cogliere l'aspetto della creatività del pensiero matematico, è necessario considerare quella che Zalamea chiama una "base mobile" (Zalamea, 2009/2012a, p. 329) per la matematica. Tale base mobile si prefigura come qualcosa di paragonabile a una sorta di "pensiero platonico" che tiene conto della trasformabilità di concetti, dimostrazioni, esempi e che, parafrasando Merlau-Ponty, Zalamea chiama "lo spiegamento della matematica" (*the unfold of mathematics*, Zalamea, 2009/2012a, p. 339). Tale "spiegamento" si manifesta attraverso il superamento di barriere artificiali tra ambiti e modalità di espressione della matematica, sulla scia del lavoro pionieristico di Grothendieck, il quale si mostra come "constant transgressor of artificial barriers and explorer of natural continuous connections between apparently disparate images, concepts, techniques, examples, definitions and theorems" (Zalamea, 2009/2012a, p. 339).
Mettiamo in evidenza che la concezione platonica a cui si riferisce Zalamea non è esattamente la stessa di quella realista a cui fanno riferimento D'Amore (2001a) e Shapiro (2000), ma si prefigura come un'ontologia mutevole e non statica, considerata come basata su una *possibilità* di transito continuo del pensiero, rispetto alla quale si *attualizzano* (o concretizzano) (quasi-)oggetti matematici dipendenti dal contesto in cui emergono e quindi non assoluti ma relativi.
In questo senso, Zalamea si richiama ancora ai lavori di Rota, mettendo in evidenza le due caratteristiche fondamentali che i (quasi-)oggetti acquisiscono e che Rota (1973/1991) stesso riporta alle idee di base di *Fundierung*[180] e di *facticity*. Secondo questa prospettiva, i (quasi-)oggetti sono sempre inseriti pragmaticamente in un qualche contesto specifico e acquisiscono un ruolo nel confronto con altri (quasi-)oggetti nel contesto, tramite la loro funzionalità (*functionality*). È proprio questa specifica *Fundierung* dei (quasi-)oggetti a rendere impossibile qualsiasi oggettualità nel senso comune del termine, poiché i processi della creatività matematica si manifestano indipendentemente dalle classificazioni analitiche caratterizzate dai classici concetti elementari di appartenenza ($\in$) e inclusione ($\subset$), relativi alla teoria degli insiemi (Zalamea, 2009/2012a, p. 345).
Come sottolinea Lesser (2001), in un articolo sulla risposta che l'opera di Rota fornisce alla domanda "Che cos'è la matematica?": "It will be the start of a philosophical journey that will eventually disclose the 'conditions of possibility' of mathematics. The disclosure of such conditions of possibility is the "answer" to the question" (Lesser, 2001, p. 6). Dunque, anche nella filosofia sintetica della matematica, la domanda relativa all'uso definitorio della copula "è", e quindi al modo di conoscere, deve essere inteso in termini di attualizzazione di *possibilità*, cioè di concretizzazione di condizioni di realizzazione, piuttosto che come una presa di coscienza di qualcosa di "realmente esistente" in senso platonico classico.
Un'altra caratteristica fondamentale della fenomenologia della creatività matematica, anch'essa tratta dall'analisi dei lavori di Rota, è per Zalamea l'incessante passaggio tra una "matematica metaforica", tipica della fase creativa,

[180] Qui la *Fundierung* nel senso di Rota (1973/1991) è intesa come il fondamento delle reti concettuali in matematica, che qui abbiamo chiamato (quasi-)oggetti.

in cui le idee sono ancora molto potenti ma vaghe, e la concretizzazione matematica dal punto di vista tecnico, in cui queste immagini sfocate si precisano e restringono attraverso le delimitazioni tecniche.
In questo senso, i fenomeni matematici sono per Zalamea delle reti fattuali e funzionali che si celano dietro agli oggetti matematici "ben fondati"; tali reti si costituiscono in termini di metafore, idee, processi, congetture, esempi, definizioni e teoremi (Zalamea, 2009/2012a, p. 346).
Tornando al concetto di "pensiero platonico" come base mobile per la creatività matematica, evidenziamo che per Zalamea, nella prospettiva platonica dinamica a cui egli fa riferimento, la polarità scoperta-invenzione che abbiamo messo in evidenza tramite la contrapposizione realista-pragmatista, in realtà non è antagonistica, duale, ma rappresenta un intreccio dialettico tra le due polarità. Tali polarità si esprimono da un lato in termini di strutture che sono *percepite* dal soggetto come già esistenti (quindi "scoperte"), dall'altro in termini di costruzione di un linguaggio che è in grado di rilevare e mettere in evidenza tali strutture (quindi in termini di "invenzione"): "observations of structuration tend to approach (in spiraling or asymptotic turns) the processes of discovery, while constructions of language tend to approach (after perhaps one more 'turn of the screw') processes of invention" (Zalamea, 2009/2012a, p. 331).

### 10. 3. 2. Considerazioni riguardo alle ripercussioni della filosofia sintetica della matematica contemporanea sulla presente ricerca

Abbiamo già messo in evidenza che la filosofia sintetica della matematica contemporanea rappresenta il quadro teorico più ampio per la definizione che stiamo cercando di fornire ma, dato che in essa la questione ontologica è riferita agli oggetti matematici e non agli oggetti matematici specifici della didattica della matematica, è necessario fare alcune considerazioni aggiuntive.

#### 10. 3. 2. 1. Questioni ontologiche

Pur riconoscendo che la pratica matematica dei matematici continui a essere un importante riferimento per l'insegnamento-apprendimento (Hamami & Morris, 2020), ricerche recenti in didattica della matematica esaminano criticamente il rapporto tra i due contesti, sottolineando la necessità di una scelta accurata e consapevole degli aspetti giudicati trasponibili dal contesto matematico a quello della didattica della matematica (Weber, Dawkins, & Mejía-Ramos, 2020). In questo senso è necessario tenere conto delle differenze dovute al contesto istituzionale e culturale diverso in cui tali pratiche si realizzano ed evitare affrettate

conclusioni e generalizzazioni (Schoenfeld, 2020). Altre ricerche evidenziano invece la necessità di tenere conto delle differenze nelle pratiche matematiche dei matematici, che non possono essere intese come una sola pratica unitaria (Hanna & Larvor, 2020).
Di seguito vogliamo esporre brevemente le nostre considerazioni riguardo all'opportunità dell'assunzione la filosofia sintetica della matematica, che si basa sull'analisi della pratica della matematica contemporanea, come riferimento teorico per la nostra ricerca. Si potrebbe infatti obiettare che la matematica contemporanea non rappresenti *tutta* la matematica e ancor meno la matematica insegnata a scuola. D'altro canto è necessario riflettere sulla trasposizione dei concetti derivanti dalla filosofia sintetica, basata sulla pratica matematica, nella pratica della didattica della matematica.
Per quanto riguarda la prima questione ci sembra importante sottolineare che la matematica contemporanea ha in questo contesto il merito di aver consentito di cogliere aspetti generali legati alla pratica matematica, cioè aspetti che da sempre hanno contraddistinto tale pratica, ma che non sono mai entrati a far parte della versione finale della matematica, in termini di oggetti matematici formalizzati dalle tecniche matematiche. Nella matematica contemporanea emergono dunque la necessità e la possibilità di includere questi aspetti in precedenza non considerati (anche per la mancanza di un linguaggio adeguato) come parte integrante degli oggetti matematici e quindi determinanti per la sua ontologia.
Per quanto riguarda la seconda questione, possiamo affermare che nella ricerca di una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica è stata proprio la necessità di fare riferimento a una riflessione sulla *pratica matematica*, in quanto più vicina alla *pratica della didattica della matematica* come disciplina, ancor prima che al processo di apprendimento, piuttosto che (solo) alla matematica nella sua versione compiuta, "rifinita", a indurci a cercare riferimenti filosofici di natura sintetica. Come abbiamo evidenziato nel capitolo 9, ci sono forti analogie tra la filosofia della partica matematica in generale e la filosofia della didattica della matematica e dopo l'esposizione delle caratteristiche della filosofia sintetica della matematica contemporanea possiamo constatare che le caratteristiche ontologiche ed epistemologiche di quest'ultima corrispondono alle esigenze da noi evidenziate per un inquadramento teorico, anche da un punto di vista tecnico, della questione ontologica nel senso della presente trattazione. Infatti, è soprattutto la concezione dinamica, in termini di processi, nonché pragmatica, in termini di uso in contesto, degli oggetti matematici a rendere l'ontologia derivante della filosofia sintetica della matematica contemporanea adatta a fungere da base per un'ontologia (matematica) della didattica della matematica. Le questioni tecniche legate a questo aspetto verranno discusse più in dettaglio nei capitoli 11, 12 e 13.
Tuttavia, dato che siamo interessati a fornire una definizione di oggetto matematico specifico della *didattica della matematica* e, come abbiamo messo in evidenza, un tale oggetto ha le caratteristiche di quello che abbiamo chiamato un

*modello interpretativo*, dobbiamo tenere conto non solo dell'oggetto matematico (primario) per come esso è formulato in matematica o concepito nella filosofia della matematica, ma anche della sua interpretazione in termini di modello interpretativo del primo e/o del secondo ordine.
A nostro avviso i (quasi-)oggetti pragmatici possono fungere da base anche per i modelli interpretativi del primo e del secondo ordine in quanto, come evidenzia Zalamea (2021), gli strumenti matematici che modellizzano il pensiero tipico della matematica contemporanea, e di cui ci occuperemo nel capitolo 13, si basano in realtà su concetti universali che caratterizzano strutturalmente non solo il pensiero (creativo) matematico, ma il pensiero (creativo) in generale. Essi possono quindi essere usati sia per inquadrare i (quasi-)oggetti dinamici della pratica matematica, sia i (quasi-)oggetti matematici specifici della didattica della matematica in riferimento ai modelli interpretativi del primo o/e del secondo ordine.[181]
Dunque è la generalità del *funzionamento strutturale* del pensiero (sia esso matematico o non matematico), che Zalamea evidenzia come modellizzabile in maniera metaforica dagli strumenti/oggetti della matematica contemporanea, a consentirci di inquadrare da un unico punto di vista i tre possibili livelli in cui si stratifica l'oggetto matematico specifico della didattica della matematica: quello relativo all'oggetto matematico (primario); quello relativo al modello interpretativo del primo ordine; quello relativo al modello interpretativo del secondo ordine.
Tornando alle tre questioni relative al paradigma di ricerca messe in evidenza da Guba e Lincoln (1994) e ricontestualizzate in filosofia della matematica da Sriraman (2009) e Sriraman e English (2010) come questioni fondamentali per una filosofia della didattica della matematica, possiamo affermare che la nostra ricerca assume come ontologia (matematica) per la didattica della matematica quella della filosofia sintetica della matematica contemporanea (Zalamea, 2009/2012a), nella quale gli oggetti sono (quasi-)oggetti dinamici, il cui significato coincide con l'insieme delle attribuzioni di significato tramite l'uso in contesto.
Vi è un ultimo aspetto che Zalamea non considera esplicitamente, in quanto egli non si occupa di *didattica* della matematica, ma di cui noi dobbiamo occuparci in maniera esplicita: come messo in evidenza dal criterio (4'') individuato nella prima parte della tesi, una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica deve tenere necessariamente conto non solo della pratica matematica, ma anche degli oggetti matematici come essi sono definiti formalmente. Infatti, mentre in matematica non è indispensabile chiedersi quali sono le relazioni degli oggetti dinamici della pratica matematica con questi oggetti formali (il matematico ne fa ricorso senza una necessaria problematizzazione di tali relazioni), in didattica della matematica è necessario chiarire questo legame,

[181] Ricordiamo che un modello interpretativo è del primo ordine se il soggetto che assume il ruolo di soggetto osservato è lo studente/l'insegnante, mentre è del secondo ordine se il soggetto osservato è il ricercatore in didattica della matematica (rappresentato per esempio attraverso la sua produzione scientifica).

dato che in essa tali oggetti formali fungono da riferimento per gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica.
Questo è quindi un importante aspetto del quale dovrà tenere conto la definizione che intendiamo fornire nel presente lavoro.

### 10. 3. 2. 2. Questioni epistemologiche

Come sottolineano Guba e Lincoln (1994), le tre questioni ontologica, epistemologica e metodologica non sono indipendenti l'una dall'altra ed è la questione ontologica a determinare quella epistemologica e queste due insieme quella metodologica. Come già evidenziato, un'ontologia dinamica non è conciliabile con un'epistemologia rigidamente prefissata, in quanto uno dei compiti più importanti dell'epistemologia nel caso di un'ontologia dinamica è quello di spiegare come avvengono i transiti durante l'evoluzione degli oggetti dinamici. In questo senso, Zalamea evidenzia le tre polarità già discusse nel paragrafo 10.3.1.2.3. che caratterizzano l'epistemologia della matematica: analisi-sintesi, realtà-idealità, estensione-intensione, come strumenti per la descrizione di tali transiti.
La prima delle tre polarità (analisi-sintesi) si riferisce a uno strumento di indagine che modellizza almeno dai tempi di Descartes (1637/1998) il pensiero in generale e quello matematico in particolare. Infatti, l'incessante alternarsi di fasi di analisi (differenziazione di possibili punti di vista) e sintesi (integrazione in una prospettiva il più possibile unitaria) non è di certo esclusivo della filosofia della matematica. Esso può essere quindi assunto senza ulteriori interpretazioni anche in didattica della matematica, in termini di principio dialettico di base per la nostra posizione epistemologica.
La seconda delle tre polarità (estensione-intensione) rappresenta un importante tassello per un'epistemologia che deve tenere conto di un'ontologia transitoria, in cui gli oggetti sono (quasi-)oggetti *dinamici*.
Vargas caratterizza la dicotomia estensione-intensione come segue:

> The philosophical dichotomy "extensional-intensional" describes modes of defining collections, as proposed by the School of Port-Royal. Extensional refers to the (list of) members while intensional refers to the properties characterizing those elements. Gottlob Frege famously elaborated on the difference between the two approaches and, in his example, the intensional difference between "The evening star" and "the morning star", is not extensionally present: they are the same element (the planet Venus). The dichotomy is also reflected in mathematics, where a same set can be expressed extensionally (e. g. as {2, 4, 6, 8, 10}) or intensionally ({x\x is an even natural number and 1 < x < 11}). (Vargas, 2020, pp. 141–142)

Come già evidenziato, il principio di astrazione di Frege è soddisfatto se vale l'assioma di separazione del sistema di assiomi ZF.

Possiamo esemplificare questo concetto sulla base dell’esempio portato nella citazione: la proprietà caratteristica (intensione, espressa tramite “x è un numero (naturale) pari e $1<x<11$”) determina in maniera inequivocabile, all’interno di un insieme universo (l’insieme dei numeri pari), gli *elementi* che la soddisfano (estensione, espressa nell’esempio dall’insieme $\{2, 4, 6, 8, 10\}$). Sottolineiamo che Frege discute estesamente questa problematica nel tentativo di caratterizzare la specificità del linguaggio matematico a partire da quello naturale (capitolo 7), mettendo in evidenza proprio la simmetria “intensionale-estensionale” come caratterizzante per il linguaggio matematico. Per approfondimenti sulla complementarietà tra ragionamento intensionale ed estensionale, invece, rimandiamo al già citato Vargas (2020).

Dunque, se si assume che valga necessariamente una simmetria tra intensione ed estensione allora ci si deve collocare in un sistema di assiomi in cui vale l’assioma di separazione. Ma ZF è una teoria formale, applicabile agli oggetti matematici espressi nella loro versione formale, non agli oggetti matematici in evoluzione che vengono creati o “scoperti” (nel senso di concretizzazione di possibilità) durante la pratica matematica. Questo significa che, data una proprietà $\varphi(x)$, l’insieme degli oggetti che la possiedono non è necessariamente un insieme fisso, ma varia sulla base delle informazioni possedute in un dato momento, e anche che l’insieme universo in riferimento a cui, tramite l’assioma di separazione, dovrebbe essere possibile individuare gli oggetti aventi una certa proprietà (che può naturalmente anche essere vuoto), non esiste necessariamente nella fase creativa della pratica matematica (o almeno non esiste per le proprietà che emergono per la prima volta da essa). Dunque, la simmetria dell’assioma di separazione è *necessariamente rotta* nella pratica matematica. In questo senso gli oggetti matematici dinamici possono al più fare riferimento a degli *insiemi variabili* che, sotto certe condizioni, non esprimibili in ZF, diventano “statici” e soddisfano gli assiomi di ZF.

Quanto appena evidenziato vale a maggior ragione nel contesto della pratica d’insegnamento-apprendimento, in cui gli oggetti conosciuti (e insegnati) sono necessariamente in costante evoluzione, ma anche nella pratica della didattica della matematica, cioè nella produzione di conoscenza in essa come disciplina.

In questo senso non sarebbe lecito assumere, a meno di informazioni inequivocabili, che il ragionamento dello studente si svolga in riferimento a insiemi stabili e fissi o che per lo studente sia sempre dato l’insieme universo per le proprietà che sta considerando. Per esempio, se lo studente fa ragionamenti relativi ai numeri primi, questo non autorizza a supporre che egli abbia come riferimento l*’insieme* dei numeri primi, che è un *sottoinsieme* dei numeri naturali (insieme universo), ma che potrebbe anche semplicemente stare ragionando solo su alcuni (pochi) esempi, considerati come oggetti a sé stanti e non facenti parte di insiemi che “trasmettono” certe proprietà non esplicitamente evidenziate.

In questo senso la teoria delle categorie è molto più adatta a fungere da riferimento per la pratica, sia essa matematica, sia essa legata alla didattica della matematica, in quanto si basa su pochissimi assiomi che non pongono condizioni rigide come

la teoria degli insiemi, dato che una categoria non è determinata da proprietà caratteristiche ma solo da relazioni tra i suoi oggetti, il che significa che essa è aperta "all'ingresso" di nuovi elementi e perciò *potenzialmente dinamica*. Allo stesso tempo la teoria degli insiemi è interpretabile in essa come categoria particolare (la categoria *Set*, i cui oggetti sono degli insiemi e i cui morfismi sono le funzioni tra insiemi). Ma su questo argomento torneremo con maggior attenzione e profondità nel capitolo 11.
Concludendo la discussione relativa alla polarità intensionale-estensionale, possiamo affermare che, nell'epistemologia transitoria a cui facciamo riferimento nel presente lavoro, non vale (in termini generali) la simmetria del principio di astrazione di Frege.
La terza polarità (idealità-realtà) ci riporta di nuovo alla questione ontologica, dato che la suddetta polarità si riconduce alla più volte citata dualità *oggetti della conoscenza come dipendenti dall'azione dell'essere umano* (cioè idealità o pragmaticità di tali oggetti) – *oggetti della conoscenza realmente esistenti, indipendentemente dall'essere umano* (esistenza "reale" di tali oggetti).
Una questione fondamentale alla quale dobbiamo fornire una risposta in questo senso è la questione gnoseologica, cioè la questione relativa alla possibilità di accesso alla conoscenza e, in particolare, la possibilità di accesso alla conoscenza attraverso un approccio sintetico, cioè attraverso una conoscenza degli oggetti in contesto.

### 10. 3. 2. 3. Il problema gnoseologico

Sembra inevitabile, una volta posto il problema ontologico, porre *di conseguenza* anche quello gnoseologico, cioè relativo alla *possibilità* di acquisizione di conoscenza;[182] come evidenzia D'Amore: "(I)inutile dire che tra i due esiste una correlazione molto forte, si potrebbe dire che sono omozigoti; però sono comunque due e non uno" (D'Amore, 2017, p. 151). Vediamo di seguito come è possibile caratterizzare le due problematiche ontologica-gnoseologica, prima di inquadrare la questione in riferimento al presente lavoro.

---

[182] Potremmo dire che la questione epistemologica indaga di solito le modalità di acquisizione di conoscenza in una specifica disciplina, mentre la questione gnoseologica si focalizza sulle domande relative alla possibilità di accesso e trasmissione della conoscenza in senso generale nonché sull'attuabilità di tale accesso. In questo senso un'epistemologia si situa all'interno di una certa prospettiva gnoseologica, la quale rappresenta una sorta di "garanzia" di effettività per quanto concerne i suoi strumenti per raggiungere la conoscenza. Nel caso specifico del presente lavoro, la questione gnoseologica dovrebbe aiutare a chiarire in che senso l'acquisizione di conoscenza per via sintetica (Zalamea, 2009/2012a) o non riduzionista (Rota, 1973/1991) o pragmatista (Peirce, 1960, CP) o pragmatica (Wittgenstein, 1953/2003) sia in grado di garantire un'effettiva conoscenza dell'oggetto studiato.

Secondo D'Amore (2015a, 2017), la questione gnoseologica coinvolge diversi livelli di generalità. A un primo livello, una contrapposizione che risale ai tempi della Grecia antica è quella tra coloro che ammettono la possibilità di conoscere (i dogmatici), e coloro che la negano (gli scettici). D'altra parte, la possibilità di acquisire conoscenza porta con sé la possibilità che essa possa essere trasmessa.
Dando per scontata la prima delle due posizioni evidenziate, secondo cui è possibile conoscere e trasmettere conoscenza, la domanda alla quale è necessario rispondere è, *come* avviene l'acquisizione di conoscenza; la risposta a tale domanda è stata fornita tramite la discussione delle tre polarità analitico-sintetico, estensionale-intensionale, reale-ideale ed attraverso l'affermazione che è possibile conoscere un oggetto per via sintetica, cioè attraverso il suo "comportamento" in contesto. Questo non esaurisce però la questione gnoseologica, che deve fornire una risposta alla domanda sull'*effettiva conoscibilità* dell'oggetto per via sintetica. Dunque, accanto alle domande sul "Cosa?" (Quale genere di oggetti?) e sul "Dove?" (In quale contesto?), nonché sul "Come?" (In che modo si acquisisce conoscenza?), che determinano l'ontologia e l'epistemologia della (didattica della) matematica, è necessario considerare anche la domanda relativa al "In che senso?" (Che cosa garantisce l'effettività di tale conoscenza?), che determina la gnoseologia in (didattica della) matematica.
Ammesso che sia possibile conoscere e che la conoscenza sia trasmissibile, classicamente si tratta di decidere se aderire a una posizione *apriorista* (da essa risultano concezioni innatiste della conoscenza, tipicamente platoniche, oppure concezioni secondo cui si attribuisce il primato all'intuizione o all'evidenza rispetto alla conoscenza razionale o viceversa) oppure si può aderire a una posizione secondo cui la conoscenza si trasmette *a posteriori* (risultano posizioni empiriste secondo cui la conoscenza logico razionale va giustificata, dato che non è il risultato di un'esperienza diretta delle "cose" (*res*) (D'Amore, 2017, p. 12).
Scartando una posizione innatista, che sembra smentita dalla ricerca scientifica e dalla ricerca in didattica della matematica in particolare, le due posizioni che rimangono sono quella apriorista, nella versione secondo cui si riconosce il primato della conoscenza razionale sull'intuizione o viceversa, e quella empirista. Parlando di matematica, può sembrare alquanto singolare aderire a una posizione empirista. Infatti, come abbiamo già avuto modo di accennare nelle pagine precedenti, in filosofia della matematica si usa parlare di "quasi-empirismo", soprattutto sulla scia dei lavori di Lakatos (1976/1979), anche se non mancano critiche a tali posizioni (si veda il paragrafo 9.3.3.1.4. e Lolli, 1996), soprattutto per la mancanza di attenzione agli aspetti logici.[183] Una posizione quasi-empirista e soprattutto fallibilista (Ernest, 1991/2004) sembra tuttavia spesso indispensabile in didattica della matematica, durante i primi approcci agli oggetti matematici. D'altro canto, anche una posizione razionalista sembra indispensabile in didattica

[183] Si vedano anche le note di Zalamea (2009/2012a) al lavoro di Tymoczko, riportate nel paragrafo 10.3.2.2.

della matematica, se non si vuole correre il rischio di trasmettere un'immagine completamente distorta di quest'ultima, presentandola come una scienza empirica. Mentre in matematica il problema della contrapposizione tra (quasi)empirismo e razionalismo non si presenta (il matematico di professione sa benissimo che, pur basandosi la sua pratica di ricerca su aspetti relativi all'intuizione, al ricorso a esempi etc., egli dovrà formulare in ultima analisi le sue produzioni in un linguaggio pre-determinato, rispettando, almeno intuitivamente, certe regole logiche), in didattica della matematica tale problema rappresenta uno dei punti focali della disciplina. Infatti, di solito lo studente non è in grado di fare le necessarie distinzioni che il matematico fa automaticamente, proprio perché non sospetta nemmeno della loro esistenza.[184]

Notiamo dunque anche qui che in realtà ciò di cui necessita l'epistemologia della didattica della matematica per una posizione gnoseologicamente sostenibile, è un'epistemologia transitoria, non aprioristica, che in matematica si realizza spontaneamente, mentre in didattica della matematica sembra dover essere *indotta* dal processo di insegnamento-apprendimento.

Per quanto riguarda la precedenza della conoscenza intuitiva su quella razionale, essa ci sembra più adatta alle scienze della fede che non alla matematica, il che ci spinge ad affermare che, pur senza negare l'importanza dell'intuizione, la matematica per noi *è* conoscenza razionale.

Di conseguenza diventa necessario decidere, seguendo il ragionamento di D'Amore (2015a, 2017), a chi attribuire il criterio di verità nella conoscenza: al soggetto conoscente o all'oggetto conosciuto. Questo ci riconduce alle implicazioni legate alle assunzioni ontologiche: affermare che "la verità" risiede nell'oggetto della conoscenza significa affermare che l'oggetto esiste di per sé, indipendentemente dall'essere umano che lo conosce; questo significa che si assume una posizione realista riguardo agli oggetti matematici; d'altro canto, se si ritiene che "la verità" risiede nel soggetto, allora si afferma (almeno implicitamente) che l'oggetto non ha un'esistenza indipendente dall'essere umano, ma un'esistenza ideale (in quanto è un oggetto del pensiero dell'essere umano) o che ha un'esistenza pragmatica (in quanto è un oggetto della pragmatica umana, creato sulla base delle esigenze manifestate in quest'ultima), oppure, in una prospettiva fenomenologica, che si tratta di un *worldly phenomenon* (Rota, 1973/1991), riguardo alle caratteristiche mentali o fisiche del quale non è necessario assumere una posizione.

Possiamo notare che le posizioni idealista e pragmatica si differenziano soprattutto sulla base del criterio che viene usato per la loro caratterizzazione: nel primo caso

---

[184] È anche vero che il matematico è stato anch'egli una volta studente e quindi in linea di principio le distinzioni evidenziate possono essere apprese attraverso quello che Bishop (1991) chiama *mathematical enculturation*, cioè l'acquisizione graduale delle caratteristiche che contraddistinguono una data cultura attraverso la partecipazione alle attività in essa. Tuttavia, coloro che diventano matematici, e per i quali probabilmente il processo di *enculturation* ha avuto esito positivo, sono una piccolissima percentuale rispetto alla popolazione scolastica complessiva, la quale sembra invece necessitare di interventi specifici in tale senso.

esso emerge da una contrapposizione tra *reale* (nel senso di materiale) e *ideale* (nel senso di pensato dall'essere umano); nel secondo caso esso emerge da una contrapposizione tra *reale* (nel senso di *pre*esistente all'essere umano e indipendente da esso) e *pragmatico* (nel senso di secondario rispetto all'azione dell'essere umano e da essa dipendente).[185]
Come già sottolineato, l'epistemologia proposta da Zalamea (2009/2012a) è un'epistemologia transitoria che si muove tra questi due poli: a volte gli oggetti appaiono come preesistenti e vengono "scoperti" (nel caso specifico questi "oggetti" sono più che altro le relazioni espresse tramite i morfismi nel linguaggio delle categorie), mentre altre volte essi appaiono come "creati" a partire da altri oggetti, sulla base delle necessità della pratica matematica. Possiamo notare che questo modo di procedere ha una certa analogia con la ben nota dualità processo-oggetto, molto studiata in didattica della matematica e da noi ripetutamente citata nel corso della trattazione (si vedano a titolo di esempio Sfard, 1991; Dubinsky, 1991; Scheiner, 2016). Infatti, se consideriamo il fenomeno della reificazione (Sfard, 1991), l'oggetto potrebbe essere percepito dal soggetto che compie tale reificazione come una scoperta di un nuovo oggetto, qualcosa che può essere nominato, indicato, pensato come un tutt'uno, mentre la fase procedurale potrebbe apparire come pragmaticamente determinata dall'esigenza di ottenere il risultato al quale conduce la procedura. Questa prospettiva è confermata anche dalle posizioni più recenti di Sfard e collaboratori, in riferimento al concetto di routinizzazione (Lavie, Steiner, & Sfard, 2019) dei discorsi matematici, in quanto tale routinizzazione è resa possibile proprio attraverso l'acquisizione del linguaggio che dunque "crea" l'oggetto.
Come già evidenziato, riferendosi al concetto di *Fundierung* nella prospettiva fenomenologica di Rota (1973/1991), alla quale si richiama Zalamea (2009/2012a), è possibile sospendere il giudizio sulla questione dell'esistenza degli oggetti matematici, in quanto essi sono considerati dei fenomeni del mondo (*worldly phenomena*) per i quali non è necessario fare affermazioni riguardo alla loro natura fisica o mentale. I fenomeni del mondo si fondano nelle fatticità, la cui totalità rappresenta il significato dell'oggetto. Rota sottolinea anche che nel contesto fenomenologico, dire che un fenomeno è un fenomeno del mondo equivale a dire che è un fenomeno *in contesto*; in questo senso, secondo Rota, gli oggetti possono essere conosciuti *completamente* attraverso il loro "essere" nel mondo, cioè nel contesto e, in ogni caso, gli approcci riduzionistici (che Zalamea chiama *analitici*) sono sempre secondari a quelli non riduzionistici (che Zalamea chiama *sintetici*):

> Given any phenomenon X, there is a non-reductionist attitude towards X, as well as reductionist attitudes. The description of the non-reductionist attitude has to precede the reductionist description. Not only that, but it is possible just to describe every

[185] In questo senso una posizione fenomenologica è certamente anche, in prima istanza, pragmatica.

> phenomenon at its own level, without even needing to resort to reduction to other levels. (Rota, 1973/1991, p. 45)

Tuttavia: quali sono le fatticità degli oggetti matematici? Nell'esempio usato di frequente da Rota, cioè il gioco degli scacchi, le fatticità del fenomeno del mondo "giocare a scacchi" sono le figure, la scacchiera, le regole del gioco, tutti gli aspetti fisici o mentali in cui il giocare a scacchi si fonda (nel senso che non è possibile pensare il giocare a scacchi senza pensare a tali fatticità) ma ai quali il giocare a scacchi non è riducibile.
La domanda sulla natura delle fatticità degli oggetti matematici, ai quali è possibile accedere solo indirettamente, attraverso delle rappresentazioni semiotiche (Duval, 1993, 1995) diventa dunque una domanda fondamentale non solo dal punto di vista epistemologico, ma anche dal punto di vista gnoseologico.
Per via dell'impossibilità di un riferimento ostensivo a essi, l'unica relazione di fondazione (nel senso di *Fundierung*) che gli oggetti matematici, intesi come "oggetti del mondo", possono avere, è una fondazione basata sulle rappresentazioni semiotiche. Così un triangolo non è pensabile di per sé, ma solo attraverso una qualche sua rappresentazione semiotica, sia essa verbale (definizione) sia essa grafica (disegno, costruzione geometrica), ciascuna appartenente a un qualche registro semiotico (Duval, 1993, 2011/2017); ma nello stesso tempo, il triangolo non è riducibile all'insieme delle sue fatticità, cioè all'insieme delle sue rappresentazioni semiotiche, ma piuttosto all'insieme degli *usi* in contesto che tali fatticità (rappresentazioni) consentono.
L'uso delle rappresentazioni semiotiche in matematica non può però prescindere dalla loro interpretazione concettuale (Steinbring, 2006), senza la quale il segno non può avere un significato (per qualcuno).[186]
Inoltre, l'acquisizione di conoscenza deve coinvolgere non solo l'interpretazione del singolo segno, ma anche l'interpretazione attiva dell'intero "testo", in cui esso è inserito, il che ci conduce alla questione relativa al circolo ermeneutico, secondo cui la comprensione delle singole parti del testo (orale o scritto) richiede una comprensione del testo nella sua interezza e viceversa (Schleiermacher, 2000).
Come sottolinea D'Amore, in conclusione alla trattazione della problematica gnoseologica:

> La conoscenza non è una banale duplicazione del mondo, come voleva un particolare tipo di positivismo o il neo-empirismo logico: eliminando il pensiero, avremmo due mondi e non uno e, semplicemente, ci saremmo certamente complicati la vita (…). Pertanto, la conoscenza deve essere uno schema concettuale progettato sopra il reale, non un secondo reale. (D'Amore, 2017, p. 11)

---

[186] Qui non ci soffermiamo sulla teoria della mediazione semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) e sul ruolo che in essa ha l'insegnante, in una prospettiva vygotskiana, come mediatore tra gli aspetti culturali incorporati negli artefatti e la produzione semiotica che scaturisce dal loro uso in aula, dato che nel presente stadio dello sviluppo del nostro quadro di riferimento tale tema ci porterebbe troppo lontano dall'argomento trattato.

Dunque, in matematica, la questione gnoseologica è determinata da quella ontologica, che conduce a quella semiotica, la quale a sua volta conduce a quella interpretativa ed ermeneutica.
Nei paragrafi successivi esporremo le nostre posizioni riguardo alla prospettiva semiotica ed interpretativa in cui ci inseriamo, così come riguardo ad alcune questioni che da essa sorgono, come quello del significato e quello del linguaggio, nonché riguardo al ruolo che in essa hanno le metafore e le analogie.
La questione gnoseologica troverà la sua trattazione conclusiva nel capitolo successivo, attraverso il ricorso ad alcuni strumenti della teoria delle categorie.

## 10. 4. La questione semiotica

### 10. 4. 1. La definizione di segno e il concetto di semiosi

Dal punto di vista semiotico il quadro di riferimento per il presente lavoro è fornito dalla semiosi peirciana.
Forniamo la seguente definizione di segno data da Peirce:

> A sign, or representamen, is something which stands to somebody for something in some respect or capacity. It addresses somebody, that is, creates in the mind of that person an equivalent sign, or perhaps a more developed sign. That sign which it creates I call the interpretant of the first sign. The sign stands for something, its object. It stands for that object, not in all respects, but in reference to a sort of idea, which I have sometimes called the ground of the representamen. (Peirce, CP, 2.228)

Per Peirce, il concetto di segno è strettamente legato a quello di rappresentante (*representamen*) mentale e di pensiero in generale: "(A)a Sign is a Representamen with a mental Interpretant.[187] Possibly there may be Representamens that are not Signs (…) But thought is the chief, if not the only, mode of representation" (Peirce, CP, 2.274).
Facciamo un esempio.
Possono essere *representamen* le orme che lascia un animale sul terreno, ma esse non possono essere considerate segni di per sé (in senso peirciano); per esempio non lo saranno (in senso peirciano) per un altro animale, a meno che non si attribuisca agli animali la facoltà di generare pensiero. Le orme possono invece essere un *representamen*-segno[188] per un essere umano che, vedendole, pensa all'animale (l'oggetto del segno), e nel quale tale pensiero fa emergere un interpretante, per esempio la curiosità per il tipo di animale che ha lasciato le orme.

---

[187] Facciamo notare che nella semiosi peirciana l'*Interpretant* non deve essere confuso con il soggetto che interpreta, cioè con l'interprete.
[188] Di seguito ricorreremo alla locuzione "segno-*representamen*" per denotare l'idea di segno in Peirce, al fine di evitare fraintendimenti con il significato generico del termine "segno" o con il suo uso in altri approcci.

Per Peirce la semiosi è una sorta di processo fenomenologico, in cui l'esperienza del mondo avviene secondo relazioni basate su tre categorie fondamentali dell'esperienza che diventano le categorie base della Faneroscopia, cioè della fenomenologia peirciana:[189] la Primità, la Secondità, la Terzità.
Peirce caratterizza tali categorie come segue:

> *Firstness* is that which is such as it is positively and regardless of anything else. *Secondness* is that which is as it is in a second something's being as it is, regardless of any third. *Thirdness* is that whose being consists in its bringing about a secondness. (Peirce, EP, 2, 267)[190]

Alle tre categorie faneroscopiche si possono associare alcune parole chiave che esplicitano in maniera esemplificativa le loro caratteristiche:

> (1) Firstness: immediacy, first impression, freshness, sensation, unary predicate, monad, chance, possibility;
> (2) Secondness: action-reaction, effect, resistance, alterity, binary relation, dyad, fact, actuality;
> (3) Thirdness: mediation, order, law, continuity, knowledge, ternary relation, triad, generality, necessity. (Zalamea, 2012b, p. 58)

Dunque, la Primità è intuitivamente tutto ciò che si presenta come non riconducibile ad altro, la Secondità è ciò che si ottiene come reazione, o in seguito, alla Primità, mentre la Terzità rappresenta la relazione tra le prime due.
Considerando l'evoluzione temporale della semiosi, è necessario tenere conto della dinamicità delle sue componenti.
Per quanto riguarda l'oggetto a cui rinvia il segno-*representamen*, è necessario distinguere tra (a) un *oggetto immediato* (l'oggetto così come è rappresentato dal segno); (b) un oggetto *dinamico* (l'oggetto veramente efficiente ma non immediatamente disponibile) (Peirce, CP 8.343).
Inoltre Peirce distingue tre diversi tipi di interpretante: (a) un interpretante *immediato* (l'interpretante rappresentato o significato nel segno); (b) un interpretante *dinamico* (l'effetto veramente prodotto, da parte del segno, nella mente di chi compie il processo semiotico); (c) un interpretante *normale* (l'effetto

[189] *Faneroscopia* è il termine coniato da Peirce per esprimere il concetto di *fenomenologia*; l'esigenza del coniare un termine nuovo è dettata dal fatto che secondo l'Autore la mancanza di associazioni con termini già noti dovrebbe rendere più facile e chiara la sua caratterizzazione (Peirce, EP, 2, 362). Notiamo che riguardo al concetto di fenomenologia Peirce si richiama a Hegel, il quale aveva già tentato nella sua opera *Phänomenologie des Geistes* (cioè *Fenomenologia dello spirito*, pubblicata nel 1807) di individuare le tipologie di elementi (o categorie) universali dell'esperienza, cioè tali da essere presenti in qualsiasi cosa che si presenti alla mente (Peirce, EP, 2, 267).
[190] Nelle citazioni "Peirce, EP, 2, 267" si riferisce alla raccolta di opere peirciane note come "Essential Peirce", citate in bibliografia sotto "Peirce, C. S. (1998)". Nelle citazioni nel corpo del testo il numero 2 indica il numero del volume, mentre il numero che segue quello del volume indica il numero di pagina.

che sarebbe stato veramente prodotto nella mente del soggetto da parte del segno se il pensiero fosse stato sufficientemente sviluppato) (Peirce, CP 8.343).
Possiamo dunque notare che la semiosi peirciana coinvolge sia aspetti interpretativi del processo semiotico compiuto da parte di un soggetto, sia aspetti normativi, che possono riguardare uno stato di riferimento "ideale"; l'interpretante "normale" (*normal*)[191] è chiamato da Peirce anche interpretante *finale*. Esso è il modo in cui il segno-*representamen* "tends to represent itself to be related to its Object" (Peirce, CP 4.536). L'interpretante finale è dunque una sorta di "arresto" o stabilizzazione della semiosi che può essere o effettiva, cioè compiuta dal soggetto, oppure potenziale, intesa come una stabilizzazione (temporanea) attesa (nel nostro caso) da parte dell'insegnante in un dato momento del percorso formativo dello studente.
Abbiamo parlato di "stabilizzazione temporanea", in quanto la semiosi peirciana è un processo illimitato, almeno potenzialmente, in cui la terna costituita dal segno-*representamen*, l'oggetto e l'interpretante è solo il nucleo base. La semiosi può essere pensata come una catena semiotica composta dai tre elementi che costituiscono il suo nucleo.
In essa la relazione tra i tre elementi del nucleo merita particolare attenzione, in quanto rappresenta quello che Peirce chiama una *relazione triadica genuina*, cioè non riducibile a relazioni diadiche tra il segno-*representamen* che innesca la semiosi (la *Primità*), l'oggetto per cui esso sta (la *Secondità*) e l'interpretante che ne risulta (la *Terzità*):

> A Sign, or Representamen, is a First which stands in such a genuine triadic relation to a Second, called its Object, as to be capable of determining a Third, called its Interpretant, to assume the same triadic relation to its Object in which it stands itself to the same Object. The triadic relation is genuine, that is its three members are bound together by it in a way that does not consist in any complexus of dyadic relations. That is the reason the Interpretant, or Third, cannot stand in a mere dyadic relation to the Object, but must stand in such a relation to it as the Representamen itself does. Nor can the triadic relation in which the Third stands be merely similar to that in which the First stands, for this would make the relation of the Third to the First a degenerate Secondness merely. *The Third must indeed stand in such a relation, and thus must be capable of determining a Third of its own; but besides that, it must have a second triadic relation in which the Representamen, or rather the relation thereof to its Object, shall be its own (the Third's) Object, and must be capable of determining a Third to this relation.* All this must equally be true of the Third's Thirds and so on endlessly; and this, and more, is involved in the familiar idea of a Sign; and as the term Representamen is here used, nothing more is implied. (Peirce, CP, 2.274, enfasi nostra)

Paolucci (2010) fornisce la seguente interpretazione grafica della semiosi peirciana (Figura 32):

[191] Il termine *normal* è qui da intendersi nel senso di *normato* o *normativo*.

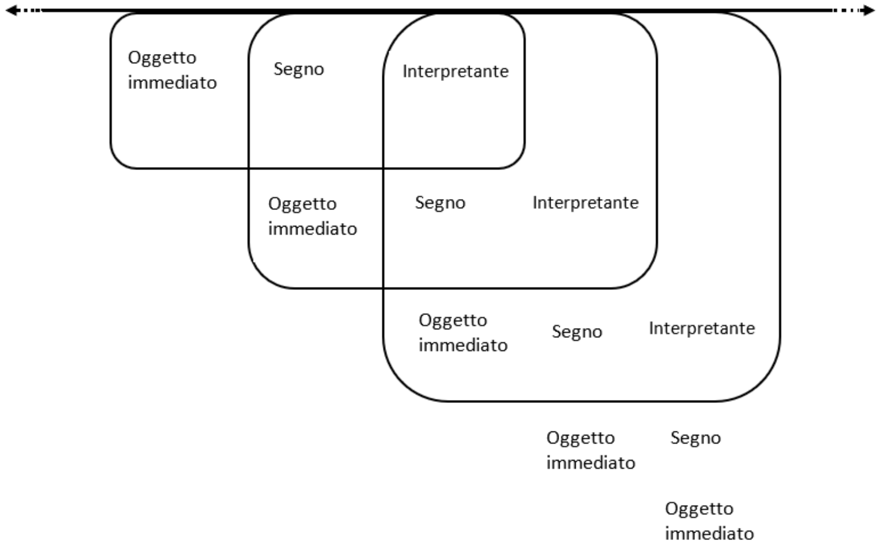


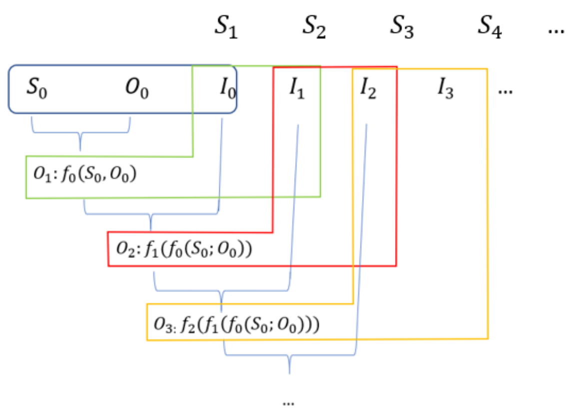

Figura 32. Schema della semiosi peirciana (adattato da Paolucci, 2010).

Dunque, secondo l'interpretazione che questo Autore dà alle relazioni tra segno-*representamen*, oggetto e interpretante, a ogni passaggio vi è uno "shift" d'identità degli ultimi due elementi della catena nonché l'ingresso di un nuovo elemento, il nuovo interpretante. Ciò che era interpretante nel primo passaggio diventa segno nel secondo e oggetto immediato nel terzo e così via.
Paolucci scrive a tale proposito che le tre componenti semiotiche peirciane segno, oggetto e interpretante non possiedono né un'identità *logica* né un'identità *sostanziale* (Paolucci, 2010). Dunque, ciò che è segno (o oggetto o interpretante) non lo è per sue caratteristiche intrinseche, ma per via del *ruolo* che assume in un dato istante del processo semiotico.
La rappresentazione schematica della semiosi peirciana proposta da Paolucci (Figura 32) non tiene conto, a nostro avviso, di una parte della citazione di Peirce precedentemente riportata, e che di seguito evidenziamo in corsivo: "(T)the Third must indeed stand in such a relation, and thus must be capable of determining a Third of its own; but besides that, it must have a second triadic relation in which *the Representamen, or rather the relation thereof to its Object, shall be its own (the Third's) Object*, and must be capable of determining a Third to this relation" (Peirce, CP, 2.274, enfasi nostra).
A nostro avviso lo schema proposto da Paolucci non rispecchia pienamente il significato della parte del testo evidenziato in corsivo, in quanto non tiene conto del fatto che, a ogni passaggio della semiosi, il nuovo oggetto non è quello che prima era il segno-*representamen*, ma è *la relazione* tra tale *segno-representamen*

e l'oggetto a esso associato. Questa è infatti la caratteristica fondamentale della "triadicità genuina" delle relazioni che caratterizzano la semiosi peirciana e sulla quale si fonda anche il *continuum* peirciano (Zalamea, 2012b).
Un'interpretazione leggermente diversa della semiosi peirciana si trova in Bagni (2009), dove l'Autore si chiede quale sia, nel processo semiotico peirciano, l'oggetto del secondo segno. Egli considera due alternative: (1) quella in cui l'oggetto rimane sempre quello iniziale, che si arricchisce di senso; (2) quella in cui l'oggetto del secondo segno è "l'oggetto originale in quanto in relazione con il primo segno" (Bagni, 2009, p. 143). Bagni conclude che entrambe le interpretazioni sono ammissibili e che in realtà propongono due modalità diverse di considerare lo stesso fenomeno. Dal punto di vista della prima alternativa, viene sottolineato il fatto che il segno non corrisponde a "un significato unico, 'bloccato', ma porta a considerare altri segni mediante i quali il significato stesso si arricchisce" (Bagni, 2009, p. 144); dal punto di vista della seconda alternativa viene sottolineato invece "che l'oggetto rappresentato si lega in termini decisivisi con i vari segni" (Bagni, 2009, p. 144).
L'interpretazione fornita da Bagni non tiene conto, a nostro avviso, di due aspetti: (1) nel caso in cui il secondo oggetto è considerato sempre quello iniziale, non tiene conto della caratteristica della "triadicità genuina" delle relazioni tra le tre componenti semiotiche, in quanto in essa le relazioni tra le singole componenti si possono ridurre a relazioni diadiche (segno-oggetto; oggetto-interpretante; segno-interpretante), il che è evidente anche dalla rappresentazione triangolare[192] fornita da Bagni, la quale, a sua volta, non appare mai in Peirce; (2) nel caso in cui il secondo oggetto è considerato come "l'oggetto iniziale, in quanto in relazione con il primo segno", la posizione di Bagni non tiene conto del fatto che per Peirce *è tale relazione stessa* a costituire il secondo segno e non il primo *oggetto in quanto in relazione* con il primo segno. Infatti, come già evidenziato in riferimento all'interpretazione fornita da Paolucci, nel passaggio peirciano citato in precedenza, è *la relazione* del segno-*representamen* con il suo oggetto a essere l'oggetto del passaggio successivo.
Quella che proponiamo di seguito è un'interpretazione del testo peirciano che tiene conto sia degli aspetti messi in evidenza da Paolucci (lo shift d'identità degli ultimi due elementi a ogni passaggio e l'ingresso di un ulteriore elemento, il che garantisce la "triadicità genuina" della relazione semiotica di base), sia di quelli messi in evidenza da Bagni (il legame dell'oggetto con i vari segni), ma che allo stesso tempo traduce più fedelmente, a nostro avviso, il testo peirciano, considerando la relazione del segno-*representamen* con il suo oggetto in un dato passaggio come l'oggetto del passaggio successivo.
A tale scopo introduciamo dunque nello schema proposto da Paolucci una funzione ricorsiva che determini a ogni passaggio il nuovo oggetto immediato a

[192] La rappresentazione è "triangolare" nel senso che segno-*representamen*, oggetto e interpretante sono raffigurati come vertici di un triangolo, il che suppone che la relazione triadica sia riducibile alle relazioni rappresentate dai tre lati del triangolo, che sono diadiche.

partire dalla *relazione tra quello precedente e il suo segno-representamen* e non a partire dal solo segno-*representamen*.
Riportiamo di seguito lo schema (Figura 33) che rappresenta la nostra interpretazione della semiosi peirciana, sulla base della citazione di Peirce fornita inizialmente.




$S_0$: *Segno (representamen) iniziale*
$O_0$: *Oggetto iniziale*
$O_i$: *Oggetto immediato* $(i+1)-$*esimo*
$f_i$: *funzione che esprime la relazione tra l'Oggetto immediato* $i-$*esimo e il Segno* $i-$*esimo*

Figura 33. Schema della semiosi illimitata peirciana.

Lo schema mostra le relazioni tra il segno (representamen) i-esimo ($S_i$), l'oggetto i-esimo ($O_i$) e l'interpretante i-esimo ($I_i$). I tre elementi del primo "ciclo" sono rappresentati nel riquadro blu scuro in alto a sinistra: il segno-*representamen* iniziale ($S_0$) si riferisce a un oggetto iniziale ($O_0$) attraverso una relazione che genera un primo interpretante ($I_0$). La relazione $f_0$ che ha generato $I_0$, rappresentata dalla prima parentesi graffa a sinistra rivolta verso il basso, diventa l'oggetto $O_1$, mentre $I_0$ assume ora il ruolo di segno-*representamen* ($S_1$) del nuovo oggetto ($O_1$) e la relazione tra $S_1$ e $O_1$ ($f_1$), rappresentata dalla seconda parentesi graffa rivolta verso il basso, fa emergere un nuovo interpretante $I_1$, il quale completa un secondo ciclo. Nell'immagine (Figura 33) sono rappresentati a titolo di esempio quattro cicli della semiosi illimitata: ogni ciclo è contraddistinto da un esagono a forma di "L" di colore diverso: il secondo ciclo in verde, il terzo in rosso, il quarto in giallo. In alto sono rappresentati i segni-*representamen* ($S_i$), ciascuno in corrispondenza dell'interpretante che si trasforma nel segno.
La semiosi illimitata può essere espressa in maniera compatta, il che consente di cogliere la sua struttura matematica, attraverso una funzione ricorsiva.

Ponendo $S_0 = x_0$; $O_0 = y_0$; $I_i = z_i$, otteniamo la seguente scrittura simbolica di una successione che definisce ricorsivamente il processo di semiosi illimitata peirciana, nella quale l'accento è posto sugli oggetti immediati ($O_i$) e nella quale $F(n)$ è l'oggetto immediato *n*-esimo:

$$F(n) = f_n(f_{n-1}(\ldots f_1(f_0(x_0; y_0); z_1) \ldots); z_n). \qquad (1)$$

Forniamo dunque la seguente definizione ricorsiva di semiosi illimitata peirciana:

$$F(n+1) = f_{n+1}(F_n; z_n), \quad con\ F(0) = f_0(x_0, y_0)\ \ e\ \ n \in N, \qquad (2)$$

dove $F(n)$ è l'oggetto immediato *n*-esimo; $f_n$ è la funzione che esprime la relazione tra il segno $i$-esimo e l'oggetto immediato $i$-esimo; $z_i$ è l'interpretante $i$-esimo, $x_0$ è il segno-*representamen* iniziale, $y_0$ è l'oggetto immediato iniziale e $z_0$ è l'interpretante iniziale.

Osservando la formula ci si rende conto che, mentre l'esistenza del segno iniziale e dell'oggetto iniziale sono postulate in un certo senso,[193] non è chiaro in che modo gli $z_i$ entrino a far parte della formula, cioè come vengono "generati" i nuovi interpretanti nella semiosi. Per comprendere questo aspetto è necessario tenere presente che l'universo del discorso in cui si compie la semiosi peirciana è dato dal *continuum* peirciano, che può essere pensato come il "regno" delle *possibilia*, cioè "dei posti che possono venire occupati di volta in volta da elementi variabili, tanto che quello che prima è oggetto può poi diventare segno e poi interpretante o viceversa (…) non si tratta di individui, bensì di *possibilia* indeterminati che sono determinabili esclusivamente attraverso determinazione reciproca" (Paolucci, 2010, p. 150). Potremmo dunque pensare gli interpretanti $z_i$ nella funzione ricorsiva come delle attualizzazioni di *possibilia* che vengono determinati dall'interazione dell'oggetto e del segno in ogni singolo passaggio, mentre $x_0$ e $y_o$ sono il segno e l'oggetto iniziali che supponiamo già attualizzati e dunque determinati tramite le loro relazioni reciproche. I nuovi interpretanti vengono dunque *generati dalle relazioni* reciproche tra segno-*representamen* e oggetto.

Nell'ambito della semiosi peirciana i segni possono essere classificati sulla base della relazione con l'oggetto dinamico da cui sono determinati (Peirce, CP 4.536). Peirce distingue in questo senso tra *icone* (vi è una relazione di somiglianza strutturale, metaforica o di altra natura tra segno e oggetto dinamico rappresentato), *indici* (vi è una relazione *reale*, per esempio di causa-effetto, tra segno e oggetto dinamico rappresentato) e *simboli* (vi è una relazione convenzionale tra segno e oggetto dinamico rappresentato) (Perice, CP 8.335).

Dato che i termini *segno*(-representamen), *oggetto* e *interpretante* non sono né caratteristiche logiche né sostanziali degli elementi della semiosi, ma sono delle

[193] Bagni nota per esempio che "l'assenza' può considerarsi alla stregua di un segno. Si potrebbe ipotizzare che proprio la constatazione di un'assenza sia il segno da cui prende le mosse il processo di semiosi illimitata" (Bagni, 2009, p. 31).

occorrenze libere che si determinano solo tramite le loro relazioni reciproche, mentre dall'altro lato la qualità del segno di essere un'icona, un indice o un simbolo dipende dalla relazione che il segno-*representamen* ha con l'oggetto, la semiosi illimitata peirciana è in realtà un processo continuo di interpretazione di relazioni tra segni. In questo senso ciò che in un certo istante è un'icona può diventare in un altro istante un indice o un simbolo e viceversa. In questo senso, icona, indice e simbolo non sono caratteristiche intrinseche del segno, ma della relazione tra esso e l'oggetto dinamico.

Per esempio, la scrittura "2+3" può essere pensata come un segno ($S_0$) che per il soggetto che lo percepisce è legato al numero 5 (oggetto) ($O_0$) attraverso una relazione ($f_0$) che nel caso specifico è data dal fatto che "se addiziono 3 a 2 ottengo 5", la quale può far sorgere l'idea che "scrivere '2+3' e scrivere '5' sia la stessa cosa" (interpretante) ($I_0$). Questo interpretante diventa allora un segno ($S_1$) per l'oggetto costituito dalla relazione "se addiziono 3 a 2 ottengo 5" ($O_1 = f_0(S_0;O_0)$) e la relazione tra questi due elementi ($S_1$ e $O_1$) può far sorgere un nuovo interpretante ($I_1$), per esempio il fatto che "posso scrivere 5 = 2+3". Questo nuovo interpretante, cioè "posso scrivere '5 = 2+3'" diventa poi un segno ($S_2$) per l'oggetto costituito dalla relazione tra "se addiziono 3 a 2 ottengo 5" e "scrivere '2+3' e scrivere '5' è la stessa cosa" ($O_2 = f_1(S_1;O_1)$. La relazione tra il segno "posso scrivere '5=2+3'" e l'oggetto costituito dalla relazione tra "se addiziono 3 a 2 ottengo 5" e "scrivere '2+3' e scrivere '5' è la stessa cosa" può generare un nuovo interpretante, per esempio "ciò che scrivo a destra dell'uguale deve essere equivalente a ciò che scrivo a sinistra dell'uguale" ($I_2$). Questo nuovo interpretante può diventare a sua volta un segno per l'oggetto $O_3 = f_2(S_2;O_2)$ e così via.

L'esempio mostra che in realtà la semiosi produce una successione di oggetti, ciascuno dei quali può essere considerato come un oggetto immediato ($O_0 = f_0(S_0;$ $O_0)$, $O_1 = f_1(S_1;\ O_1)$, $O_2 = f_2(S_2;\ O_2)$, …), ma che in realtà questi costituiscono elementi di una successione che forma un oggetto dinamico $f_2(f_1(f_0(S_0;\ O_0)))$. Nell'esempio concreto, l'oggetto dinamico $f_2$ è dato dalla relazione tra la relazione $f_1$ e la relazione $f_0$, che si è creata tra $S_0$ e $O_0$, come rappresentato nell'immagine (Figura 34).

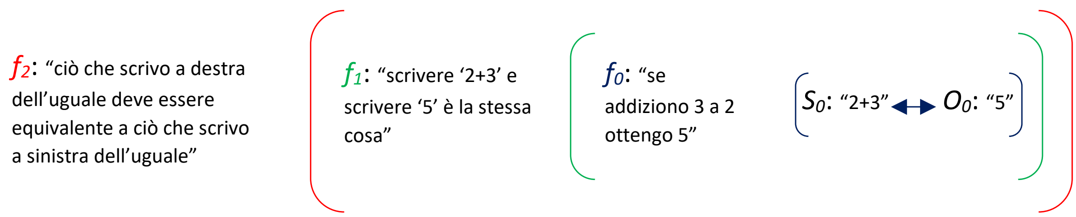



Figura 34. Esempio di semiosi peirciana sulla base della funzione ricorsiva (2).

Dall'esempio che abbiamo fornito diventa chiaro che il ruolo di segno-*representamen* attribuito a "2+3" e il ruolo di oggetto attribuito a "5" non dipendono affatto da una qualche loro caratteristica intrinseca, ma dal fatto che "3+2" si manifesta per primo come quello che potremmo chiamare, seguendo Rota, un *worldly phenomenon*.
Avremmo potuto scegliere anche "5" come segno e "2+3" come oggetto, il che avrebbe potuto portare a un oggetto $f_0$ del tipo "posso pensare '5' come '2+3'", il quale avrebbe potuto generare un altro oggetto dinamico, sulla base degli interpretanti che sarebbero intervenuti in questo processo semiotico. Gli oggetti semiotici dinamici non sono dunque oggettivi e prestabiliti, ma dipendono dalla capacità del soggetto di cogliere un segno come stante per qualcos'altro e dalla sua capacità di generare relazioni che producono nuovi interpretanti. È ovvio che in un oggetto dinamico costituito da molti passaggi nemmeno il soggetto stesso che compie la semiosi potrà tenere traccia di tutti i passaggi che costituiscono la successione di oggetti immediati, ma possiamo dire che ogni parte di un tale processo riproduce la struttura complessiva e che, presi due oggetti immediati successivi, essi possono essere sempre considerati come il segno e l'oggetto iniziali di un processo semiotico.
La semiosi peirciana può essere intesa come un modello generale per il pensiero umano, nel quale si mettono in evidenza le sue caratteristiche puramente relazionali. Anche le caratteristiche dei segni come icone, indici e simboli non devono essere intese, come già evidenziato, come caratteristiche di entità oggettuali, ma in termini di: tipo di relazione che in un dato istante mette in relazione l'elemento che funge in quell'istante da segno-*representamen* con l'oggetto dinamico.
Ciò che non troviamo nella semiosi peirciana sono invece delle specificazioni sulle modalità in cui sorgono gli interpretanti, il che non deve tuttavia sorprendere, dato che il ruolo della semiosi non è quello di modellizzare un certo tipo di ragionamento in un dato contesto, ma di caratterizzare in maniera molto generale le relazioni che costituiscono il pensiero.
Per esempio, di che genere sono le relazioni rappresentate con la freccia tra $S_0$ e $O_0$ e dalle parentesi blu, verde e rossa (Figura 34)? In che cosa consiste il passaggio da un oggetto immediato a quello successivo? Quali sono le condizioni per poterlo compiere?
Riguardo alle condizioni specifiche sotto le quali si realizza il pensiero come attività semiotica, sia in termini concettuali sia in termini cognitivi, esistono diversi approcci in didattica della matematica.[194] Nei prossimi paragrafi ci soffermeremo sul triangolo epistemologico (Steinbring, 1989, 2006), che unisce la dimensione interpretativa, concettuale, a quella semiotica, sull'approccio al pensiero matematico nell'ambito della teoria dei registri semiotici (Duval, 1993, 2011/2017), nonché sul costrutto di *semiotic bundle* (Arzarello, 2006).

[194] Per un'analisi approfondita dei diversi approcci semiotici in riferimento all'apprendimento in matematica, si veda Iori (2015).

### 10. 4. 2. Il triangolo epistemologico: la necessità di un'interpretazione

Steinbring (2006) caratterizza i segni matematici dal punto di vista epistemologico, mostrando che tali segni assolvono a due funzioni: (1) una funzione semiotica, che potremmo chiamare di rappresentanza, secondo cui un segno sta per qualcos'altro (l'oggetto); (2) una funzione epistemologica che esprime il ruolo del segno matematico nel quadro della costituzione epistemologica della conoscenza matematica (Steinbring, 2006, p. 134).
L'Autore afferma che "[mathematical] signs do not have a meaning of their own, this has to be produced by the learner by means of establishing a mediation to suitable reference contexts" (Steinbring, 2006, p. 135).
La relazione tra il contesto di riferimento dell'oggetto, il segno che lo rappresenta e il concetto (che assume su di sé la funzione epistemologica del segno), è rappresentata da quello che Steinbring chiama "il triangolo epistemologico" (Figura 35).

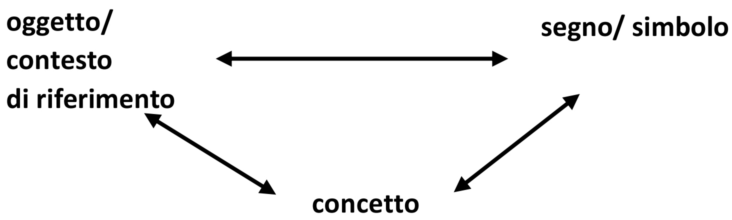



Figura 35. Il triangolo epistemologico (tratto da Steinbring, 1989, 2006).

Ai tre vertici del triangolo epistemologico sono rappresentati l'oggetto, considerato in un contesto di riferimento, il segno, che nel contesto diventa simbolo,[195] e il concetto matematico. La freccia orizzontale che collega l'oggetto nel contesto di riferimento con il segno in qualità di simbolo e viceversa, esprime la funzione semiotica di referenza del segno; le due frecce oblique che collegano da un lato l'oggetto nel contesto di riferimento con il concetto e viceversa, dall'altro il segno/simbolo con il concetto e viceversa, rappresentano la funzione mediatrice del concetto matematico sotto l'influenza del sapere matematico

[195] Potremmo affermare, in linea con la terminologia usata da Peirce, che un segno diventa simbolo se viene considerato in riferimento a una relazione convenzionale che lo lega a un oggetto rappresentato nell'ambito del linguaggio matematico in un dato contesto di riferimento. Tuttavia, evidenziamo ancora una volta che in senso peirciano una rappresentazione triangolare risulta come una degenerazione della generazione triadica fondamentale per la sua semiosi. Una rappresentazione in accordo con quella peirciana sarebbe una "stella" di tre segmenti con un estremo coincidente nello stesso punto.

(Steinbring, 2006, p. 135), senza la quale il segno/simbolo non può svolgere la propria funzione epistemologica.
Per illustrare in dettaglio i concetti espressi tramite il triangolo epistemologico ci serviamo di un esempio di una sua interpretazione in riferimento al concetto di probabilità, fornito da Steinbring (Figura 36).

**oggetto/contesto di riferimento**
**-dado ideale**
**-popolazioni statistiche**
**-struttura indipendente**

**segno/ simbolo**
**- numerali frazionari**
**- frequenze relative come segni o percentuali**
**- assiomi come elenchi di enunciati**

**concetto**
**-probabilità classica**
**-probabilità frequentista**
**-probabilità assiomatica**

Figura 36. Il triangolo epistemologico per il concetto di probabilità (tratto da Steinbring, 2006).

Possiamo notare che nel vertice relativo all'oggetto nel suo contesto di riferimento ci sono tre diversi oggetti/contesti che rappresentano tre fasi successive dell'evoluzione del concetto di probabilità: il dado ideale, riferito all'origine della teoria della probabilità nel gioco d'azzardo, le popolazioni statistiche, in riferimento al contesto delle scienze empiriche, e "la struttura indipendente", in riferimento alla formulazione assiomatica della probabilità. Al vertice associato al segno/simbolo corrispondono le modalità di rappresentazione tipiche per la probabilità in riferimento ai tre oggetti/contesti: la frazione come simbolo usato per rappresentare la probabilità legata al lancio di un dado; le frequenze relative come rappresentazioni di percentuali in riferimento alla statistica; il gruppo di assiomi in riferimento alla struttura assiomatica. Infine, il vertice del triangolo relativo al concetto matematico è rappresentato dalle tre concezioni di probabilità che mediano la relazione semiotica di referenza tra l'oggetto/contesto e il segno/simbolo: i concetti di probabilità classica, di probabilità frequentista e di probabilità assiomatica.
Possiamo notare che, a differenza di quanto avviene nella semiosi peirciana, i concetti di segno e di oggetto sono intrinsecamente legati alla natura dell'elemento: ciò che è oggetto non può essere segno e viceversa. Il triangolo epistemologico mette in evidenza il fatto che il legame tra segno e oggetto richiede un'interpretazione concettuale legata al sapere matematico, ma non rappresenta un processo di pensiero come nel caso della semiosi peirciana.

Steinbring (2006) evidenzia il fatto che è possibile ricorrere a una successione di triangoli epistemologici per rappresentare il processo di apprendimento dello studente, ma tale successione di triangoli non dice nulla su come si passi da un triangolo all'altro. Infatti, è proprio la "genuinità" della relazione triadica nella semiosi peirciana a garantire la continuità del processo, mentre la relazione espressa nel triangolo epistemologico è solo apparentemente triadica, in quanto riducibile a relazioni diadiche tra gli elementi associati ai vertici. Dunque, se da un lato il triangolo epistemologico mette in evidenza la necessità di interpretazione del segno in uno specifico contesto epistemologico, in cui esso diventa simbolo che sta per un oggetto specifico, dall'altro lato il triangolo epistemologico non fornisce alcuno strumento per l'analisi delle trasformazioni dei segni nel passaggio da un triangolo all'altro. Inoltre, esso non tiene in considerazione il fatto che in matematica di frequente la relazione tra segno e oggetto non entra direttamente in gioco, ma rimane implicita, come per esempio quando si compiono trasformazioni semiotiche nel linguaggio algebrico.

### 10. 4. 3. Il pensiero matematico nell'ambito della teoria dei registri semiotici

Secondo Duval (1993; 1995) vi è una fondamentale differenza tra gli oggetti matematici e gli oggetti di altre discipline che risiede nel fatto che gli oggetti matematici non sono accessibili ai sensi e quindi non è possibile riferirsi a essi in maniera ostensiva.[196] L'accesso agli oggetti matematici è dunque possibile *esclusivamente* tramite le rappresentazioni semiotiche e questa è una cartatteristica distintiva dell'attività cognitiva in matematica. A partire da questa assunzione di base, Duval caratterizza l'attività matematica come un'attività essenzialmente semiotica, nella quale il pensiero matematico si realizza tramite trasformazioni di segni che sono rappresentazioni semiotiche, cioè segni prodotti all'interno di sistemi semiotici di rappresentazione. Esaminiamo più in dettaglio la posizione assunta da Duval.
Secondo Ernest (2006), un *sistema semiotico* è costituito da (1) un insieme di segni di base che possono essere espressi per via orale o scritta, oppure essere disegnati o codificati elettronicamente; (2) un insieme di regole di produzione e trasformazione di segni, inclusa la potenziale capacità di creazione sia di segni atomici che composti; (3) un insieme di relazioni tra i segni e il loro significato incorporati in una struttura di significato sottostante (Ernest, 2006, pp. 69–70).
Secondo Duval (2011/2017), la differenza tra segni prodotti indipendentemente da un sistema semiotico, come ciò avviene nella semiosi peirciana, e segni prodotti in sistemi semiotici, di cui la lingua naturale è il classico esempio, consiste nel

[196] Questo è un aspetto che non trova pieno riscontro nella posizione di Steinbring (2006), in quanto egli suppone che, dal punto di vista epistemologico, per lo studente gli oggetti iniziali sono oggetti matematici concreti che vengono gradualmente sostituiti da oggetti matematici astratti.

fatto che in un sistema semiotico i segni sono prodotti secondo regole stabilite nel sistema. In questo caso si parla quindi di *rappresentazioni semiotiche* e non semplicemente di segni. Come sottolinea l'Autore, le rappresentazioni semiotiche si differenziano dalle rappresentazioni (o segni) in generale, per il fatto che, nel caso delle rappresentazioni, tra la rappresentazione e l'oggetto rappresentato sussistono relazioni di causa-effetto e tali rappresentazioni sono prodotte automaticamente nella mente (si pensi alle immagini mentali) o per mezzo di uno strumento (per esempio la foto di un oggetto), mentre le rappresentazioni semiotiche sono prodotte *intenzionalmente* all'interno di un sistema semiotico di rappresentazione. Per Duval, la presenza di regole di produzione di rappresentazioni semiotiche nei sistemi semiotici non è sufficiente per inquadrare l'attività semiotica sulla quale si basa il pensiero matematico, in quanto la differenza sostanziale tra i sistemi semiotici specifici della matematica e altri sistemi semiotici in generale è data dalle regole di *sostituzione* di un segno con un altro. Per esempio, nel linguaggio naturale c'è la possibilità di ricorrere a sinonimi per esprimere un concetto, ma i termini usati, pur essendo sinonimi, portano con sé significati non completamente sovrapponibili. In un sistema semiotico matematico, le regole di sostituzione sono invece stabilite in maniera univoca, dato che esistono regole di trasformazione prestabilite. Un classico esempio in questo senso potrebbe essere la trasformazione di 20% in frazione, cioè in $\frac{20}{100}$ oppure la trasformazione di quest'ultima frazione in un'altra a essa equivalente, come per esempio $\frac{1}{5}$. In entrambi i casi si rimane all'interno del registro numerico e si effettuano dei trattamenti. Un caso particolare è invece quello delle trasormazioni semiotiche in algebra, come per esempio 2x+x=3x, dove la regola di trasformazione rimane come codifica implicita nell'algoritmo di calcolo.

Secondo Duval (2006), un *registro semiotico* è un sistema semiotico con la caratteristica specifica che i segni in esso si contraddistinguono come tali non semplicemente per via del loro ruolo di rappresentazione dell'oggetto per il quale stanno, in senso peirciano, ma soprattutto per la loro capacità di trasformazione in altri segni, secondo regole di trasformazione specifiche del registro. Un registro semiotico è in grado di svolgere la funzione di comunicazione, oggettivazione e trattamento (Duval, 1996, citato in Iori, 2015); l'ultima di queste tre funzioni non può invece essere assolta da un sistema semiotico che non sia anche un registro semiotico.

Il significato delle rappresentazioni semiotiche in un registro semiotico non è da considerarsi come a sé stante, cioè come caratteristica sostanziale della rappresentazione semiotica, ma come emergente dalla giustapposizione tra rappresentazioni semiotiche appartenenti allo stesso registro semiotico.

D'Amore e Santi (2018) propongono la seguente definizione di *sistema semiotico*, come risultato di una sintesi tra il concetto di sistema semiotico secondo Ernest e il *registro semiotico* come particolare sistema semiotico secondo Duval: (1) un insieme di segni di base che hanno significato solo se opposti a, o in relazione con, altri segni di base (per esempio il sistema decimale numerico); (2) un insieme di

regole organizzative per la produzione di segni a partire da quelli di base e per la loro trasformazione; (3) un significato sottostante risultate dalle relazioni tra i segni di base che formano rappresentazioni semiotiche strutturate (D'Amore & Santi, 2018, p. 63).
Nei registri semiotici la relazione tra il segno e l'oggetto per cui esso sta non solo non è mai causale, ma essa non è nemmeno la fonte di attribuzione di significato al segno. Infatti, come risulta dal punto (1) della definizione di registro semiotico appena fornita, il significato del segno in un registro semiotico non si basa sulla relazione di referenza con l'oggetto ma, come già evidenziato, sulla possibilità di opposizione (o giustapposizione) con altri segni di base del registro.
Per esempio, nel registro semiotico dell'aritmetica, il significato di ciascuna delle dieci cifre del sistema numerico decimale non risulta dalla sua relazione con insiemi di oggetti aventi cardinalità corrispondente a tale cifra, ma dalla necessità di scelta di quella cifra invece che delle altre nove nella composizione dei numeri. Il significato della cifra 7 nel numero 374 risulta dal fatto che in quella posizione sta il 7 e non una delle altre nove cifre. Se al posto del 7 vi fosse qualsiasi altra delle restanti nove cifre, si sarebbe trattato di un altro numero. Dunque, il significato della cifra 7 *in quel numero* risulta dalla sua giustapposizione alle altre nove cifre nella posizione delle decine. In un sistema numerico binario, il significato della cifra 1 si evince dalla sua giustapposizione a una sola altra cifra: 0. È proprio questa caratteristica di regolamentazione esplicita delle regole di trasformazione dei segni nei registri semiotici a permettere l'enorme sviluppo computazionale in matematica.
Dato che nei registri semiotici in matematica il significato dei segni non è legato all'oggetto, dal punto di vista dell'apprendimento della matematica si pone il problema del ben noto "paradosso di Duval" (Duval, 1993, p. 38), secondo cui lo studente non può fare a meno, proprio a causa dell'inaccessibilità diretta degli oggetti matematici, di confondere l'oggetto matematico con una sua rappresentazione semiotica. Si pongono dunque due problematiche fondamentali che caratterizzano l'apprendimento in matematica: (1) date due rappresentazioni semiotiche dello stesso oggetto, riconoscere l'unicità dell'oggetto di riferimento; (2) dato un oggetto matematico, essere in grado di ricorrere a sue diverse rappresentazioni semiotiche (Duval, 2011/2017). Il superamento di entrambe queste problematiche si presenta come la chiave per la conservazione del senso dell'attività matematica, la quale si svolge, secondo l'Autore, effettuando delle trasformazioni semiotiche all'interno dello stesso registro semiotico (i trattamenti) o effettuando trasformazioni da un registro semiotico a un altro (le conversioni). La capacità di produrre pensiero matematico è legata al coordinamento efficace di registri semiotici differenti e l'apprendimento si verifica solo se lo studente è in grado di effettuare una tale coordinazione (D'Amore, 2015b; Duval, 2011/2017).
Le ricerche in didattica della matematica hanno mostrato non solo che le conversioni portano a una perdita di significato [per esempio, lo studente non riconosce lo stesso oggetto matematico "retta" di fronte alle due rappresentazioni

y=2x+1 (rappresentazione semiotica nel registro algebrico) e la retta rappresentata nel piano cartesiano (rappresentazione semiotica nel registro grafico)], ma che anche i trattamenti modificano il senso degli oggetti matematici (per esempio, lo studente attribuisce un senso diverso alle due rappresentazioni semiotiche 0,5 e ½ del numero razionale $+\frac{1}{2}$) (D'Amore, 2006).
Dunque, una problematica centrale per l'apprendimento in matematica risiede nell'individuazione delle caratteristiche che rendono "efficace" una trasformazione semiotica (trattamento o conversione) dal punto di vista cognitivo. In questo senso è centrale il ruolo dell'operazione di mappatura "one-to-one" (Duval, 2011/2017, p. 31) (cioè biunivoca) tra le unità di significato che costituiscono il contenuto delle rappresentazioni semiotiche. Come afferma Iori (2015): "ciò che è interessante in matematica è effettuare delle variazioni di contenuto in un certo registro dato o scelto in modo da ottenere delle variazioni di contenuto, mantenendo lo stesso oggetto, in un altro registro" (Iori, 2015, p. 53).
Per una messa in corrispondenza biunivoca delle unità di significato di due rappresentazioni semiotiche è necessario, dal punto di vista cognitivo, riconoscere prima tali unità di significato. Per esempio, riconoscere le unità costitutive della rappresentazione semiotica nel registro algebrico della retta di equazione $y=2x+1$ significa distinguere le variabili $x$ e $y$, il coefficiente angolare 2, il "termine noto" 1, mentre riconoscere le unità costitutive della corrispondente retta nel registro grafico della geometria analitica significa distinguere l'ascissa ($x$) e l'ordinata ($y$) di un punto nel piano cartesiano, la pendenza della retta, il suo punto di intersezione con l'asse delle ordinate. Per una conversione cognitivamente "efficace" da un registro all'altro, lo studente deve essere in grado di "tradurre" la rappresentazione semiotica del primo registro nella rappresentazione semiotica del secondo registro con una corrispondenza uno-a-uno tra le rispettive unità di significato. Questo significa che una semplice presentazione di rappresentazioni semiotiche in diversi registri semiotici non induce spontaneamente a una conversione tra esse.
Nel caso dei trattamenti, invece, la "traduzione" è di solito garantita da regole e algoritmi specifici di un determinato registro che non richiedono una distinzione di unità di significato e una loro messa in corrispondenza biunivoca.
Naturalmente la traducibilità tra due rappresentazioni semiotiche non è sempre possibile in maniera così univoca come nell'esempio della retta riportato sopra. Infatti, tale traducibilità dipende dal grado di congruenza tra le rappresentazioni (Duval, 1995, 2011/2017), che può variare da una congruenza totale a una totale mancanza di congruenza. Questo è un altro aspetto importante dal punto di vista didattico, in quanto evidenzia l'importanza cruciale della scelta opportuna del registro semiotico di partenza, e soprattutto di arrivo, nella risoluzione dei problemi, dato che tale scelta non è neutra, dal punto di vista delle unità di significato delle rappresentazioni semiotiche attivabili in un dato registro e traducibili nell'altro (Duval, 2011/2017, pp. 82–83).

### 10. 4. 4. Il *semiotic bundle*

Pur essendo la teoria dei registri semiotici una teoria semiotica molto potente e articolata, è vero che in molti contesti di apprendimento si rende opportuno interpretare segni che non appartengono necessariamente a dei registri semiotici, come per esempio i gesti o l'intonazione della voce. Si tratta di elementi che, dal punto di vista dell'osservatore che analizza il processo di insegnamento-apprendimento, possono fornire informazioni preziose sulla dimensione intuitiva dell'attività matematica.

Questo genere di segni di natura molto generica entra a far parte degli elementi costitutivi della conoscenza matematica soprattutto a partire dall'ingresso nel campo della teoria della "mente incorporata" (*embodied cognition*) di Lakoff e Núñez (2000) (si veda il paragrafo 9.3.3.1.5.), secondo la quale i concetti matematici astratti si costruiscono a partire da alcune metafore di base (*ground metaphors*) tratte dall'esperienza concreta. In tale prospettiva è fondamentale un approccio semiotico multimodale che possa consentire di tenere conto di una vasta gamma di risorse semiotiche che intervengono durante le ore di matematica, ma che non hanno una controparte in un registro semiotico (Arzarello, 2006; Arzarello, Paola, Robutti, & Sabena, 2009).

A partire da questa esigenza nasce il costrutto di *semiotic bundle* (Arzarello, 2006). Un *semiotic bundle* è un insieme semiotico dinamico costituito da: (1) una collezione di insiemi semiotici, ciascuno dei quali è formato da (i) un insieme di segni che possono essere prodotti con diverse azioni aventi carattere intenzionale, come pronunciare, parlare, scrivere, disegnare, gesticolare, maneggiare un artefatto; (ii) un insieme di modi per produrre segni e possibilmente trasformarli; tali modi possono essere regole o algoritmi ma possono essere anche azioni più flessibili o modi di produzione usate dal soggetto; (iii) un insieme di relazioni tra questi segni e i loro significati incorporati nella struttura di significato sottostante; (2) un insieme di relazioni tra gli insiemi semiotici descritti al punto (1) (Arzarello, 2006, p. 281).

Notiamo soprattutto due caratteristiche fondamentali che distinguono il *semiotic bundle* dal registro semiotico di Duval, come esso viene presentato da D'Amore e Santi (2018), cioè adattato alla definizione di sistema semiotico di Ernest (2006): (1) il *semiotic bundle* non richiede che ci siano regole di produzione e trasformazione di segni prestabilite, tali regole non devono, anche se possono, essere degli algoritmi; questo contribuisce ad ampliare notevolmente le tipologie di segni che possono essere presi in considerazione; (2) il *semiotic bundle* prende in considerazione l'evoluzione temporale del sistema semiotico attraverso l'idea di *insieme semiotico dinamico*: "a *semiotic bundle* is a system of signs - with Peirce's comprehensive notion of sign - that is produced by one or more interacting subjects and that evolves in time" (Arzarello, Paola, Robutti, & Sabena, 2009, p. 100); (3) nel *semiotic bundle* è contemplato il ricorso a segni "nuovi", introdotti *ad hoc* dai soggetti impegnati nell'attività matematica, ma non appartenenti a un

registro semiotico; inoltre, l'insieme semiotico può essere riferito a una singola persona ma a anche a un gruppo di individui che interagiscono, consentendo così di considerare l'evoluzione del flusso semiotico dell'intero processo di insegnamento-apprendimento nel suo complesso.
Per ora ci fermiamo qui riguardo al rapporto tra *semiotic bundle* e registri semiotici, ma torneremo su esso ripetutamente nel seguito della trattazione.

## 10. 5. Una prospettiva ermeneutica

Nei capitoli precedenti abbiamo parlato di frequente di modelli interpretativi, evidenziando come questo concetto contribuisca a determinare gli aspetti ontologici specifici della didattica della matematica. In questo paragrafo e in quello successivo vorremmo esporre le ragioni per cui riteniamo che sia più opportuno parlare di modello ermeneutico piuttosto che di modello interpretativo. Infatti, un tale modello non può essere inteso come l'interpretazione di un singolo segno, ma come un modello interpretativo del "testo" in cui tale segno è usato, riferendoci al concetto di *testo* in senso ampio, come proposto da Ricoeur (2016), secondo cui l'ermeneutica non deve essere intesa necessariamente come l'interpretazione di testi scritti o orali, ma anche come l'interpretazione di una sequenza di azioni.
Nella semiosi peirciana il segno-*representamen* fa sorgere un interpretante che è un'interpretazione del segno-*representamen* ma, come già sottolineato, Peirce non si sofferma sulle modalità con cui tale interpretazione avviene. D'altro canto, Steinbring (2006) introduce una componente interpretativa nel triangolo epistemologico, ma in esso è il singolo segno-simbolo, seppure considerato in un contesto epistemologico, a essere interpretato e non il "testo" (inteso anche come catena di azioni) in cui esso viene usato.
Nell'attività di insegnamento-apprendimento, invece, è importante interpretare un segno non solo in riferimento al contesto epistemologico in cui esso è inserito "istituzionalmente", ma anche in riferimento al significato che esso assume nell'ambito del "testo" prodotto dal soggetto (o del gruppo di soggetti) su cui si focalizza l'attenzione dell'osservatore. In questo senso a nostro avviso è necessaria un'azione interpretativa che cerchi di comprendere l'uso del singolo elemento (segno) a partire dal senso dell'intero testo (scritto, orale o sotto forma di azione etc.). Questo genere di interpretazione può essere inquadrato nell'ambito dell'ermeneutica.
Originariamente l'ermeneutica si riferiva all'interpretazione dei testi sacri, successivamente all'interpretazione dei testi filosofici, storici e dell'arte. Il concetto di base su cui si fonda l'idea di ermeneutica è legato al fatto che l'interpretazione di un testo avviene sempre sulla base delle conoscenze pregresse, dovute all'appartenenza storica e culturale del soggetto interpretante.

Le origini dell'ermeneutica moderna vengono di solito fatte risalire a Schleiermacher (2000) e a Dilthey (1986), ma è solo con Heidegger (1927/2017) e poi con Gadamer (1960/2019) che l'ermeneutica varca la frontiera della prospettiva epistemologica di metodo interpretativo dei testi, muovendo verso una prospettiva ontologica, in cui è l'essere stesso a subire una trasformazione tramite l'azione ermeneutica. Questo passaggio influenza in maniera profonda il rapporto stesso che gli esseri umani hanno con il mondo (Bagni, 2009, p. 46). In *Verità e metodo*, Gadamer (1960/2019) assume le caratteristiche dell'ermeneutica come azione interpretativa in cui il soggetto interpretante non assume una posizione distaccata e "oggettiva" di fronte al testo, ma introduce nell'interpretazione sé stesso attraverso i propri pre-giudizi e viene egli stesso trasformato dall'interpretazione che compie.

Il pre-giudizio non è inteso come qualcosa di negativo, ma come qualcosa di necessario per l'ingresso nel circolo ermeneutico. Il concetto di circolo ermeneutico, già caratterizzato da Heidegger (1927/2017), ma le cui origini risalgono a Schleieremacher (2000), può essere espresso nel modo seguente: per comprendere il tutto (il testo completo, sia esso verbale, orale o scritto, o di altra natura), l'interprete deve comprendere le sue singole parti, ma è solo attraverso la comprensione del modo in cui la totalità organizza le singole parti che queste possono essere comprese.

In questo senso, la pre-comprensione del testo anticipa già la comprensione di ciò che deve essere ancora interpretato. L'apparente circolarità della conoscenza è però necessaria e non dannosa, se il soggetto interpretante rimane aperto all'evoluzione e trasformazione dei propri pre-giudizi come conseguenza del processo interpretativo, che può così trasformarsi da circolo a spirale (Bagni, 2009).

La (necessaria) presenza di pre-giudizi non deve essere intesa come una mancanza di scientificità dell'ermeneutica, in quanto: "la scientificità della ricerca si realizza nella misura in cui i pre-concetti vengono via via rinnovati e sostituiti nel corso del lavoro di interpretazione, in modo sempre più adeguato, e sempre più in sintonia con l'oggetto che viene indagato" (Reale, 2019, p. XV).

L'ermeneutica si realizza attraverso quella che Gadamer chiama "la fusione degli orizzonti" (Gadamer, 1960/2019, p. 635), in cui l'orizzonte dell'opera interpretata, considerata nel suo contesto storico (e culturale) si fonde con l'orizzonte storico (e culturale) dell'interprete, producendo la comprensione. Notiamo infine che, secondo Gadamer, l'ermeneutica è un fatto essenzialmente linguistico, in quanto l'ermeneutica è interpretazione finalizzata alla comprensione e tutto ciò che può essere compreso è linguaggio. In questo senso, per Gadamer vi è un legame strettissimo tra ermeneutica e ontologia, in quanto l'essere conoscibile è solo nel linguaggio. L'interpretazione del termine "testo" nel senso di Ricoeur (2016) amplia implicitamente anche il concetto di linguaggio, che non deve essere necessariamente discorsivo.

In didattica della matematica l'ermeneutica rappresenta un fondamentale paradigma metodologico (si veda p. e. Iori, 2015).
D'altro canto, l'ermeneutica è proposta anche come prospettiva da assumere nell'introduzione della componente storica nelle ore di matematica o nella formazione degli insegnanti, attraverso il ricorso a fonti storiche originali, con l'obiettivo della diffusione della storia e della cultura matematica (si veda p. e. Jahnke, Arcavi, Furighetti, & El Idrissi, 2000).
In Bagni (2009) l'ermeneutica assume invece la veste di una prospettiva generale in didattica della matematica, in cui l'interpretazione delle fonti storiche è solo un modo per introdurre sia lo studente sia l'insegnante all'approccio ermeneutico in aula.
Bagni si ispira alla posizione di Rorty (2004), secondo il quale nella scienza è necessario distinguere tra "discorso normale" e "discorso anormale":

> [un] 'discorso normale' (una generalizzazione della nozione kuhniana di 'scienza normale') è un qualsiasi discorso (scientifico, politico, teologico o altro) che incorpori criteri condivisi per raggiungere l'accordo; è anormale qualsiasi discorso che manchi di tali criteri. (Rorty, 2004, p. 35, citato in Bagni, 2009, p. 66)

Mentre l'epistemologia richiede un ampio accordo su principi base come quello della natura della razionalità, o almeno delle modalità con cui un tale accordo possa essere raggiunto, "l'ermeneutica coglie le relazioni tra i vari discorsi, come tra le linee di una possibile conversazione, una conversazione che non presuppone matrici disciplinari comuni ai parlanti" (Rorty, 2004, p. 637, citato in Bagni, 2009, p. 68).
Bagni (2009) propone dunque, a partire da un confronto tra un approccio epistemologico e un approccio ermeneutico, una prospettiva ermeneutica in didattica della matematica, in cui non vi è una presupposizione[197] di commensurabilità tra i discorsi dei partecipanti al discorso. L'Autore evidenzia la prospettiva ermeneutica che si configura nel solco tracciato da Rorty, come:

> al contempo una posizine filosofica mirante a sostituire la filosofia fondazionalista e un 'esercizio di pensiero' (…) [che] non ha come scopo quello di sviluppare la conoscenza nel senso della scienza 'normale' (alla ricerca di nuove verità nell'ambito dei paradigmi vigenti), bensì si colloca in una posizione di dialogo con i discorsi 'anormali', riferiti a paradigmi alternativi a quelli accettati, operando con dei discorsi 'incommensurabili con il discorso corrente'. (Bagni, 2009, p. 67)

Dal punto di vista della presente ricerca, una prospettiva ermeneutica ci appare come necessaria per vari motivi: sia perché essa sembri supportare al meglio la posizione epistemologica dinamica e "comparativa" proposta da Zalamea e assunta anche da noi, sia perché l'idea stessa di oggetto matematico specifico della

[197] Bagni preferisce parlare di *presupposizione* piuttosto che di *pre-concetto*, giudicando il primo termine come "*felicemente* generico" (Bagni, 2009, p. 46). L'Autore fa notare che un esempio classico di presupposizione in didattica della matematica è costituito dalla scelta del registro semiotico nell'approccio a un problema matematico.

didattica della matematica presuppone l'accettazione di una 'incommensurabilità' (in generale) del discorso didattico con il discorso epistemologico corrente della matematica come disciplina "ben fondata".
Così, per esempio, nei modelli ermeneutici del primo ordine sarà necessario tenere conto di possibili incommensurabilità tra i "discorsi" del soggetto (studente o insegnante) osservato e il "discorso" dell'osservatore (insegnante o ricercatore). Infatti, è solo attraverso un approccio ermeneutico che l'insegnante o il ricercatore in didattica della matematica possono cogliere la razionalità dello studente nonché il suo modo di conoscere gli oggetti matematici che si stanno via via formando. In questa luce, tali "modi di conoscere" non sono da considerarsi come *errori* ma come presupposizioni necessarie per l'ingresso nel circolo ermeneutico, conoscenze con uno status ontologico proprio, come oggetti di conoscenza dinamici, specifici della didattica della matematica. È proprio in quasta direzione che a nostro avviso può essere inquadrato in senso generale anche il costrutto di CUTHE (*cognitive unity of theorems*) (Boero, 2017), collocato nell'ambito del quadro della razionalità comunicativa di Habermas (1996/1998).
Ma l'approccio ermeneutico è fondamentale anche per quelli che abbiamo chiamato finora *modelli interpretativi del secondo ordine*, in quanto il ricercatore in didattica della matematica che assume la posizione dell'epistemologo o del filosofo della didattica della matematica, e che dunque deve prescindere dal *modus operandi* nelle singole teorie della disciplina (Bicudo & Miarka, 2016), si trova necessariamente a dover confrontare e far dialogare tra loro prospettive che possono apparire come "incommensurabili".[198]

### 10. 5. 1. Modelli ermeneutici

Da quanto esposto finora possiamo notare che in didattica della matematica, da un lato abbiamo una struttura cognitiva in evoluzione che si pone in relazione con degli oggetti matematici; dall'altro abbiamo l'essere umano, colui che osserva, studia, analizza il modo con cui ciò avviene e per fare ciò necessita di un modello che gli consente di trarre inferenze, cioè che giustifica le inferenze che vengono tratte dalle osservazioni.
Nei capitoli precedenti abbiamo introdotto il concetto di modello interpretativo per circoscrivere meglio la problematica derivante da quest'ultima riflessione. In particolare siamo partiti dal termine *second order model* che ricorre di frequente in ricerche che si collocano nell'ambito costruttivista per riferirsi ai modelli esplicativi usati dai ricercatori in didattica della matematica per compiere

[198] Notiamo che Prediger, Bikner-Ahsbahs e Arzarello (2008) parlano di *compatibilità* nell'ambito del networking di teorie, ma soprattutto in riferimento a un coordinamento di teorie a fini pratici, cioè in un'ottica di costruzione di quadri teorici di ricerche empiriche specifiche.

inferenze sulle conoscenze costruite dallo studente (si vedano per esempio Ulrich, Tillema, Hackenberg e Norton, 2014; Simon, 2017).
Secondo Steffe, i modelli del secondo ordine sono "hypothetical models observers may construct of the subject's knowledge in order to explain their observations (i. e. their experience) of the subject's states and activities" (Steffe, 1995, p. 495).
Nel capitolo 8 abbiamo già evidenziato i due livelli interpretativi che si possono distinguere in didattica della matematica, dando luogo a quelli che abbiamo chiamato *modelli interpretativi del primo e del secondo ordine*, sulla base della posizione assunta dal ricercatore in didattica della matematica, che può essere quella di colui che analizza e studia i fenomeni d'aula, cioè riferiti alla prasseologia, oppure quella di colui che studia i fenomeni di acquisizione di conoscenza in didattica della matematica come disciplina.
L'idea di *second order model* alla quale ci siamo ispirati nel mettere in evidenza i modelli interpretativi ha però la caratteristica di essere difficilmente conciliabile con l'idea di oggetto matematico specifico della didattica della matematica di cui stiamo cercando una definizione: un *second order model* è statico, cioè esso presuppone che esista un'interpretazione standard di un fenomeno, alla quale ciò che viene osservato deve in un certo senso conformarsi, eventualmente con il passare del tempo, come per esempio nel caso dei concetti e delle concezioni matematiche studiati da Simon (2017) e da noi esposti nel capitolo 7. Sia in questo, sia nei capitoli precedenti, abbiamo invece evidenziato come una caratteristica imprescindibile degli oggetti matematici in didattica della matematica sia la loro dinamicità e nel capitolo 6 abbiamo notato che una caratteristica distintiva degli esempi di oggetti matematici specifici della didattica della matematica è quella di essere determinati dalle relazioni che formano i complessi concettuali, i quali creano delle reti che evolvono nel tempo. I diagrammi che abbiamo usato nei capitoli 6 e 8 non sono dunque altro che delle immagini istantanee dei modelli interpretativi a cui ci stiamo riferendo, dato che quest'ultimi evolvono nel tempo (Figura 37), in base alle necessità della ricerca, e non sono modelli prestabiliti e statici.

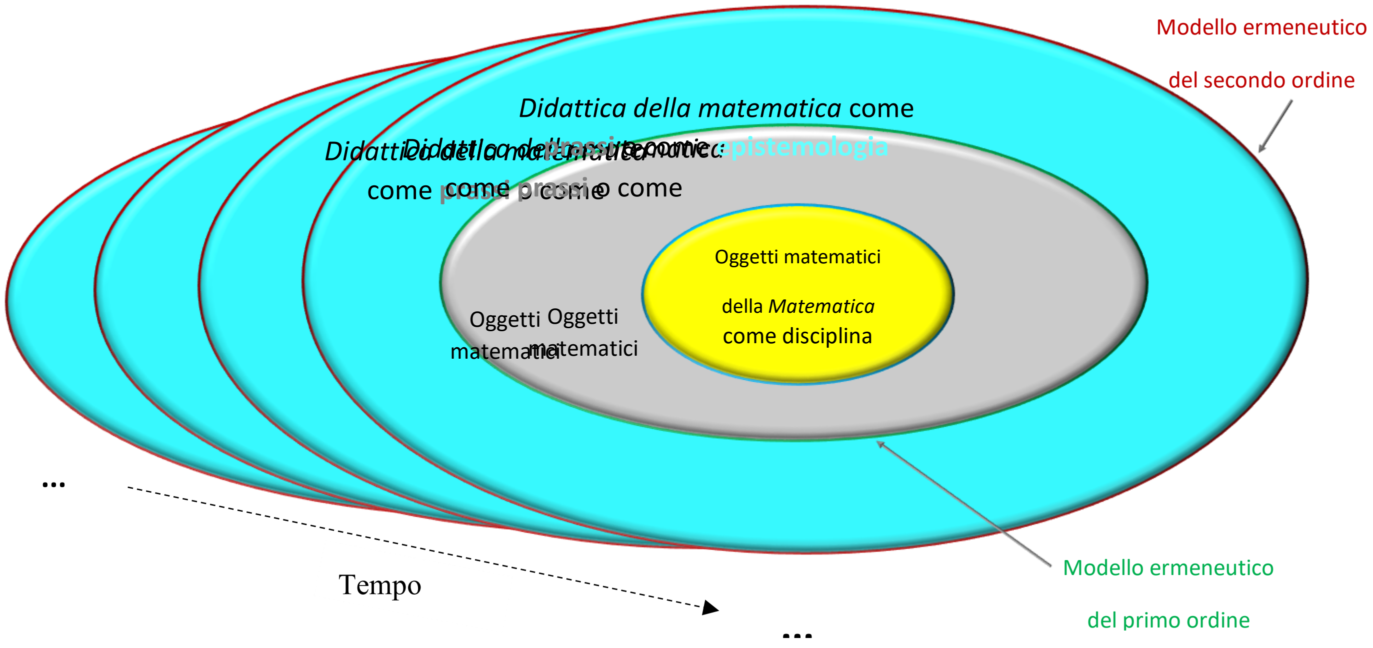



Figura 37. Le tre componenti ontologiche degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica come modelli ermeneutici dinamici.

Prendendo quindi spunto dall'idea di *second order model* e dalle considerazioni fatte in questo capitolo e nel capitolo 8 riguardo ai modelli interpretativi, definiamo qui il concetto di *modello ermeneutico* come qualsiasi interpretazione in termini di attribuzioni di significato a un oggetto da parte di un soggetto che vengono inferite da parte di un osservatore a partire dall'osservazione delle azioni del soggetto o di un gruppo di soggetti in un dato contesto, siano esse espresse tramite l'uso di un termine in un testo scritto o orale, o attraverso gesti o altre manifestazioni intenzionali.

Preferiamo parlare di modello "ermeneutico" piuttosto che di modello "interpretativo" per sottolineare il fatto che un tale modello non deve essere inteso come l'interpretazione di un singolo segno/simbolo come stante per qualcos'altro, cioè in termini puramente referenziali, ma deve essere inteso come l'interpretazione del segno/simbolo nel "testo" in cui esso è usato. Ricordiamo che il termine *testo* è usato qui in senso molto ampio, in accordo con l'interpretazione fornita da Ricoeur (2016), secondo cui l'ermeneutica può essere intesa anche come l'interpretazione di un insieme di azioni.

Un modello ermeneutico diventa un *oggetto* per l'osservatore, il quale lo oggettiva tramite i propri strumenti di ricerca; esso non è necessariamente un oggetto per l'osservato.
Un modello ermeneutico ha diversi livelli che nel caso di cui ci stiamo occupando in questo lavoro sono i due già evidenziati in precedenza come modelli interpretativi del primo e del secondo ordine. Dunque, se il soggetto osservato (individuo o gruppo di individui) è lo studente o l'insegnante, coinvolto nella prasseologia d'aula o in metariflessioni su essa, possiamo parlare di modello ermeneutico del primo ordine; se il soggetto "osservato" è il ricercatore in didattica della matematica, attraverso la sua produzione scientifica, possiamo parlare di modello ermeneutico del secondo ordine.
I modelli ermeneutici del primo e del secondo ordine possono essere visti come "strati" diversi di oggetti della didattica della matematica, indipendenti l'uno dall'altro: se una ricerca è prevalentemente empirica, gli oggetti che essa produrrà sono assimilabili a dei modelli del primo ordine, se si tratta di una ricerca teorica, gli oggetti che essa produrrà saranno assimilabili a modelli del secondo ordine; se una ricerca è non solo teorica, cioè produce un risultato teorico nuovo, ma mostra anche una sua applicazione in aula, allora gli oggetti della didattica della matematica da essa prodotti saranno assimilabili a dei modelli del primo e del secondo ordine, in una specie di "annidamento" dei primi nei secondi. Rimane naturalmente sempre presente il riferimento al livello ontologico relativo all'oggetto "primario" che nel nostro caso è l'oggetto matematico della matematica come disciplina.
Evidenziamo che l'oggetto primario su cui si costruiscono i modelli del primo e del secondo ordine non deve essere necessariamente un oggetto matematico. In didattica della matematica tali oggetti primari possono essere di diversa natura: essi possono essere anche, in maniera più generale, degli atteggiamenti nei confronti di un argomento, per esempio nei confronti della matematica stessa. D'ora in poi, parlando di oggetto matematico specifico della didattica della matematica, ci riferiremo solo al caso in cui l'oggetto primario è un oggetto matematico e non per esempio l'*affect* (Markku, Hannula, & Di Martino, 2018) o l'atteggiamento verso la matematica in generale (Di Martino & Zan, 2011), nei quali non è necessariamente individuabile un oggetto matematico primario.
L'insieme costituito dall'oggetto matematico primario e dal modello del primo e/o del secondo ordine costituisce un oggetto matematico specifico della didattica della matematica.
Di solito l'oggetto matematico specifico della didattica della matematica porta il nome dell'oggetto matematico (eventualmente con qualche aggiunta di specificazione, come abbiamo notato negli esempi del capitolo 6, dove abbiamo evidenziato che in didattica della matematica si usano termini come "divisione per partizione" e "divisione per contenenza") ma ha caratteristiche sue proprie, che possono essere determinate anche dalle lenti teoriche e dagli strumenti usati per la sua oggettificazione.

Si sarà notato che, parlando di modelli ermeneutici e in particolare di oggetti matematici specifici della didattica della matematica, non abbiamo parlato di oggetti *primi* della didattica della matematica, ma abbiamo parlato di oggetti intesi come prodotti della didattica della matematica come disciplina. In questo senso non intendiamo contraddire quanto messo in evidenza da Ernest (2012) riguardo all'etica come filosofia prima della didattica della matematica e dell'ontologia derivante da tale assunzione. Infatti, a nostro avviso, attraverso la considerazione degli oggetti della didattica della matematica come *risultati di ricerca in didattica della matematica* non stiamo assumendo posizione riguardo all'ontologia *prima* in didattica della matematica, ma riguardo a quella che potremmo chiamare un'"ontologia seconda" in essa, e comunque soltanto in riferimento agli oggetti matematici.
Infatti, come già accennato in precedenza, pur non mettendo in discussione la posizione assunta da Ernest (2012) secondo cui la questione relativa agli oggetti della didattica della matematica non può prescindere dall'essere umano e dall'etica come filosofia prima, a nostro avviso è possibile considerare come oggetti della didattica della matematica delle entità che si configurano in termini di risultati di ricerca in didattica della matematica riferibili alla conoscenza matematica di un soggetto.[199] Dunque, ribadiamo che, pur riconoscendo la necessità di prendere in considerazione sia la componente etica sia quella epistemologica nella discussione relativa all'ontologia in didattica della matematica, riteniamo che sia possibile, al fine di ridurre la complessità del problema, considerare la componente etica come una costante e focalizzare l'attenzione sulle variazioni della sola componente epistemologica.

## 10. 6. La questione del significato

Come già sottolineato nei capitoli precedenti, la presente ricerca si posiziona in una prospettiva pragmatista e quindi anche la questione del significato degli oggetti (matematici e matematici specifici della didattica della matematica) non può che configurarsi in termini pragmatici, cioè in termini del loro uso in contesto. In particolare facciamo riferimento alla massima pragmatica peirciana che esprime il concetto di significato nell'ambito del pragmatismo (o pragmaticismo) peirciano (Peirce, 1960).
Come evidenzia Zalamea (2012b), Peirce fornisce tre diverse definizioni di massima pragmatica nel corso della stesura della sua vastissima produzione scientifica. Riguardo alla prima di tali formulazioni, Peirce stesso scrive quanto segue:

[199] Evidenziamo il fatto che per "soggetto" qui intendiamo, in accordo con la definizione di modello ermeneutico, chi è soggetto all'osservazione da parte del ricercatore, sia esso un singolo individuo o un gruppo di individui.

> the Maxim of Pragmatism, as I originally stated it, Revue philosophique VII, is as follows: 'Considérer quels sont les effets pratiques que nous pensons pouvoir être produits par l'objet de notre conception. La conception de tous ces effets est la conception complète de l'objet' [la massima del pragmatismo, come da me formulata in origine, Revue philosophique VI, è la seguente: Considera quali sono gli effetti pratici che noi pensiamo possano essere prodotti dall'oggetto della nostra concezione. La concezione di tutti questi effetti è la concezione completa dell'oggetto]. (Peirce, CP, 5.18)

In riferimento all'attribuzione di significato ai giudizi teorici, il pragmatismo (o pragmaticismo) è visto da Peirce come il principio guida che regola tale attribuzione di significato: "Pragmatism is the principle that every theoretical judgment expressible in a sentence in the indicative mood is a confused form of thought whose only meaning, if it has any, lies in its tendency to enforce a corresponding practical maxim" (Peirce, CP, 5.18).

Per esempio, il giudizio "*2n* sta per un numero pari" ha solo il significato di rafforzare la massima pratica espressa da "se un numero è pari, scrivilo come *2n*". È chiaro che un comportamento razionale non può consistere nello scrivere "*2n*" ogni volta che si incontra un numero pari e nemmeno nel fatto di individuare il simbolo "*2n*" con un numero pari, ma questo comportamento contribuisce alla costituzione del significato sia del termine "*2n*" sia del concetto di numero pari. Altri contesti nei quali il soggetto incontrerà dei numeri pari forniranno altre "regole di comportamento" che contribuiranno ad arricchire il significato del concetto di numero pari, ampliando così i suoi contesti d'uso. Infatti, un altro modo in cui Peirce esprime la massima pragmatica, in questo caso circoscritta al significato di un simbolo, è il seguente: "(T)the entire intellectual purport of any symbol consists in the total of all general modes of rational conduct which, conditionally upon all the possible different circumstances and desires, would ensue upon the acceptance of the symbol" (Peirce, CP 5.438).

La massima pragmatica afferma dunque che l'insieme di tutti i comportamenti indotti dall'accettazione del simbolo costituisce il suo significato.

Ricordiamo che per Peirce la semiosi è un processo potenzialmente illimitato; tuttavia, nella realtà esso può considerarsi come sospeso quando raggiunge una certa stabilità. Gli interpretanti nella semiosi peirciana intesa come pensiero razionale sono chiamati anche *interpretanti logici*. Se un interpretante logico si stabilizza, cioè non evolve in altri interpretanti, allora esso può essere considerato un *interpretante logico finale*. L'interpretante logico finale ha la caratteristica di indurre nel soggetto un *habit change*, cioè un "cambio d'abito" o "cambio di abitudine", nel senso di una modifica del comportamento; l'*habit* che produce il cambiamento è un habit particolare, chiamato da Peirce *belief* e il pensiero si genera come processo di evoluzione del *belief-habit*:

> A cerebral habit of the highest kind, which will determine what we do in fancy as well as what we do in action, is called a *belief*. (…) A *belief-habit* in its development begins by being vague, special, and meagre; it becomes more precise, general, and full,

> without limit. The process of this development, so far as it takes place in the imagination, is called *thought*. (Peirce, CP 3.160)

Il significato è per Peirce null'altro che l'insieme degli interpretanti logici finali in tutti i possibili contesti. L'interpretante logico finale deve essere una convinzione che induce un comportamento cosciente, non può essere per esempio una sensazione. È questa, afferma Peirce, la sostanziale differenza tra il suo pragmatismo e quello di James, il quale accetta come significato, cioè come interpretante logico finale, anche le percezioni (Peirce, CP, 5.494).
Riguardo alla problematica dell'acquisizione di conoscenza, cioè riguardo alla gnoseologia, Zalamea interpreta come segue la massima pragmatica peirciana:

> The maxim affirms that we can only attain knowledge after conceiving a wide range of representability possibilities for signs (firstness), after perusing active-reactive contrasts between sub-determinations of those signs (secondness), and after weaving recursive information between the observed semeioses (thirdness). (Zalamea, 2012b, p. 58)

Dunque, l'acquisizione di conoscenza è possibile attraverso l'interiorizzazione di una vasta gamma di rappresentazioni semiotiche (di un oggetto) in diversi contesti d'uso e dopo aver colto da un punto di vista metacognitivo l'invarianza nelle trasformazioni tra diverse rappresentazioni semiotiche.
Possiamo notare una forte somiglianza con l'idea di acquisizione di conoscenza in matematica nell'ambito della teoria dei registri semiotici di Duval. Infatti, l'interiorizzazione di "un'ampia gamma di rappresentazioni semiotiche di segni" può essere interpretata come una messa in atto di un'operazione di designazione di un oggetto con diverse rappresentazioni semiotiche; l'esame dei "contrasti tra azione e reazione tra sottodeterminazioni di tali segni" può essere inteso come l'esame di possibili trasformazioni semiotiche di trattamento e conversione; infine, l'intreccio di "informazioni ricorsive della semiosi osservata" può essere inteso come il pensiero meta-riflessivo della semiosi che porta al riconoscimento dell'oggetto come invariante per trasformazioni (Duval, 2009).
Tuttavia è importante sottolineare che la massima pragmatica non si riferisce esplicitamente alla matematica, ma all'acquisizione di conoscenza in generale o, detto diversamente, tramite essa Peirce non sembra riconoscere, in termini gnoseologici, una posizione di eccezionalità alla conoscenza matematica.
Notiamo anche la sintonia della posizione peirciana con la posizione fenomenologica di Rota, in quanto la conoscenza "nel mondo" per Rota è sinonimo di conoscenza "in contesto" (Rota, 1973/1991, p. 45). Dunque, possiamo affermare che la relazione di fondazione, basata sulla *Fundierung* nel senso di Rota (1973/1991), è una relazione di attribuzione di significato che può essere rilevata nell'atteggiamento (*habit*) del soggetto, indotto da certe credenze (*beliefs*), tramite le quali egli "filtra" la sua esperienza "del mondo", ovvero la sua esperienza in

contesto. Le "fattualità"[200] (*facticities*) sulle quali si basa la *Fundierung* sono in questo senso le risorse semiotiche che il soggetto è in grado di mobilitare in un contesto, senza le quali non è possibile pensare il fenomeno [o il (quasi-)oggetto], ma al cui insieme esso non è riducibile. Per esempio, il significato del fenomeno o (quasi-)oggetto *derivata* non sarà assoluto, ma sarà sempre determinato dall'insieme delle risorse semiotiche (simboli: $f'(x) = \frac{df}{dx}$; definizioni: per esempio quella di derivata in un punto, di retta tangente a un punto del grafico di una funzione; teoremi: per esempio le "regole di calcolo" delle derivate, ma anche risorse semiotiche non appartenenti a registri semiotici, come il gesto che descrive la posizione "orizzontale" della retta tangente in un punto di massimo) che il soggetto riesce a mobilitare effettivamente, o anche solo potenzialmente, in un dato contesto. Va da sé che, se un soggetto non riesce ad attivare alcuna risorsa semiotica relativa al concetto di derivata, essa non ha alcun significato per tale soggetto. Dunque, in ultima istanza, l'attribuzione di significato nel contesto della semiosi peirciana è esprimibile in termini di attivazione di risorse semiotiche.
Attraverso la massima pragmatica la questione gnoseologica relativa alla possibilità di acquisizione di conoscenza per via sintetica, non riduzionista, pragmatica, degli oggetti (matematici) riceve una risposta affermativa nell'ambito della semiosi peirciana. Infatti, l'ultima citazione della massima pragmatica afferma proprio che è *possibile* acquisire conoscenza nella modalità descritta.
Più avanti nella trattazione vedremo che la massima pragmatica riceve conferma anche per via più prettamente matematica, nell'ambito della teoria delle categorie.
Un altro concetto di significato in senso pragmatico a cui facciamo riferimento è quello espresso da Wittgenstein (1953/2003), che si iscrive in una prospettiva esclusivamente linguistica, dove il significato è riferito all'uso dei termini linguistici in quelli che Wittgenstein chiama "giochi linguistici":

> For a large class of instances of the use of the word 'meaning'– though not in all cases of its use – we can explain this word as follows: The meaning of a word is its use in language. And the meaning of a name is sometimes explained by pointing to its bearer. (Wittgenstein 1953/2003, p. 40)

Ma tali usi sono "countless", innumerevoli, sottolinea Wittgenstein, in quanto i segni, le parole, le frasi, ma anche i giochi linguistici non sono determinati a priori, ma se ne possono pensare sempre dei nuovi, e l'Autore vede nella matematica un esempio paradigmatico in questo senso:

> But how many kinds of sentence are there? Say assertion, question and command? – There are countless kinds; countless different kinds of use of all the things we call 'signs', 'words', 'sentences'. And this diversity is not something fixed, given once and for all; but new types of language, new language-games, as we may say, come into existence, and others become obsolete and get forgotten. (We can get a rough picture of this from the changes in mathematics). (Wittgenstein, 1953/2003, p. 26)

[200] Nel senso di "inerenti alla realtà".

Ci sono forti analogie tra le concezioni di significato in Peirce e Wittgenstein e le due posizioni ci sembra possano supportare in maniera adeguata i due poli della polarità idealismo-realismo nell'epistemologia evidenziata da Zalamea (2009/2012a). Infatti, il significato pragmatico peirciano, che include l'insieme degli *habit* in contesto, può essere associato a una fase "di scoperta" (cioè "realista"), in cui gli oggetti matematici sono percepiti come "nascosti" nei comportamenti (mentali e non) indotti dagli *habit*, mentre il significato pragmatico wittgensteiniano, che include gli usi in contesto di termini linguistici, può essere associato a una fase concepita come "creativa" (cioè "ideale"), in quanto gli oggetti emergono attraverso il linguaggio in cui si fa uso di essi nei giochi linguistici.
Tornando all'esempio relativo al concetto di derivata, nell'ambito dell'attribuzione di significato "alla Wittgenstein", il significato di derivata non deve essere inteso, a nostro avviso, semplicemente come l'uso della parola "derivata", poiché questo renderebbe troppo ristretta e poco operativa la nozione di significato. Se si amplia il significato del termine "parola", facendo sì che esso comprenda diverse rappresentazioni possibili (p. e. simboli, parole, grafici etc.), purché siano intesi come facenti parte di un linguaggio e dunque inseribili in un discorso, sia esso verbale o di altro genere, allora il significato "alla Wittgenstein" può essere visto come l'uso nel discorso delle risorse semiotiche attivate, da parte del soggetto, in un determinato gioco linguistico, che funge da contesto. D'altra parte, il significato "alla Peirce" sarebbe quindi l'effetto ottenuto tramite l'insieme delle risorse semiotiche attivabili e attivate dal soggetto nel contesto.

## 10. 7. Il ragionamento diagrammatico

Un aspetto importante del pensiero matematico, secondo Peirce, è il fatto che esso è fondamentalmente di tipo diagrammatico in quanto, indipendentemente dal fatto che il pensiero si riferisca all'ambito aritmetico o all'ambito geometrico, esso conduce al ricorso a diagrammi nonché alla loro generalizzazione:

> We find some peoples drawn more toward arithmetic; others more toward geometry. But in either case, a correct method of reasoning was sure to be reached before many centuries of real inquiry had elapsed. The reasoning would be at first awkward, and one case would be needlessly split up into several. But still all influences were pressing the reasoner to make use of a diagram, and as soon as he did that he was pursuing the correct method. For mathematical reasoning consists in constructing a diagram according to a general precept, in observing certain relations between parts of that diagram not explicitly required by the precept, showing that these relations will hold for all such diagrams, and in formulating this conclusion in general terms. All valid necessary reasoning is in fact thus diagrammatic. (Peirce, CP 1.54)

Dunque, per Peirce, il ragionamento *necessariamente* deduttivo,[201] cioè "necessariamente vero", è di tipo diagrammatico, dato che si basa sulle relazioni messe in evidenza dal diagramma e non sugli oggetti o elementi in esso coinvolti.[202]
Ribadiamo che, pensando a un diagramma non si deve pensare necessariamente a una rappresentazione grafica o figurativa; come sottolinea Dörfler: "Diagrams are not to be understood in a figurative but rather in a relational sense (such as a circle expressing the relation of its peripheral points to the midpoint)" (Dörfler, 2016, p. 25). Infatti, secondo Peirce, anche una formula è un diagramma, in quanto in essa sono espresse relazioni strutturali che si possono evincere dalla sua osservazione. Nella classificazione dei segni della semiosi peirciana, un diagramma è un'icona, in quanto la sua relazione, in qualità di segno-*representamen*, con l'oggetto dinamico, è di somiglianza, una somiglianza di tipo relazionale o strutturale.
Si potrebbe dire che un diagramma è tale in quanto percepito dall'interprete come un segno-*representamen* avente una somiglianza con una qualche struttura relazionale [che Peirce chiama "precetto" (Peirce, 1960, CP 1.54)], la quale funge da oggetto nella semiosi, mentre la relazione di somiglianza emerge come interpretante da essa. Come già sottolineato, le qualità di icona, indice o simbolo non sono caratteristiche sostanziali di un segno, ma dipendono dalla sua relazione con l'oggetto dinamico. Dunque, una rappresentazione semiotica in senso peirciano può essere un diagramma in un dato contesto e in un dato istante per qualcuno, ma può essere un indice o un simbolo in un altro istante, in un altro contesto o per un altro interprete. Questo sottolinea ancora una volta che il significato di un oggetto non può che essere dedotto dall'attribuzione di significato in contesto, da parte di un soggetto, e non in generale, a partire da qualità sostanziali dei segni usati. Questo non smentisce però in nessun modo il fatto che nel momento in cui si colgono le caratteristiche relazionali di un diagramma, esso è un'icona.

## 10. 8. Cenni al ruolo del linguaggio

Nella teoria dei registri semiotici il registro della lingua naturale è un registro che svolge un ruolo particolare, in quanto esso non è un registro matematico in senso stretto (cioè "a purely mathematical register", Duval, 2011/2017, p. 90), ma è

[201] Notiamo che Peirce distingue tra ragionamento deduttivo necessario e possibile, dove il primo è "necessariamente vero", mentre il secondo è probabile (Peirce, CP 2.267); il primo corrisponde al concetto classico di deduzione, mentre il secondo al concetto classico di abduzione.
[202] Naturalmente questo non significa che ogni diagramma rappresenti un ragionamento "necessariamente vero", ma che un ragionamento "necessariamente vero" può essere espresso da un diagramma.

usato in matematica per la formulazione di definizioni, enunciati di teoremi e per il ragionamento in generale.
Riguardo all'uso del linguaggio naturale nell'apprendimento della matematica è importante evidenziare alcuni aspetti importanti:

- è necessario prestare particolare attenzione al fatto che a una forte vicinanza dal punto di vista grammaticale tra il linguaggio naturale usato in matematica e il linguaggio naturale usato nella vita quotidiana corrisponde una differenza dal punto di vista sintattico: nel linguaggio naturale l'unità minima di significato è la parola, mentre nel discorso condotto in linguaggio naturale nell'ambito della matematica l'unità di significato minima è la frase (Duval, 2007, 2011/2017),[203] allo stesso tempo il linguaggio naturale usato come (o nel) linguaggio matematico ha una sintassi completamente diversa da quella del linguaggio ordinario, in quanto la sua morfologia in quel contesto è dettata dallo status teorico delle componenti del discorso (gli enunciati) e non dall'appartenenza dei termini a una categoria grammaticale (nel senso di sostantivo, aggettivo, verbo etc.) (Lolli, 1996, p. 26);
- il linguaggio naturale (o ordinario) svolge un importante ruolo di mediazione tra i processi mentali e i linguaggi simbolici, tra l'esperienza e l'emergenza dei concetti matematici, nonché come strumento di sviluppo di consapevolezza metalinguistica in riferimento a linguaggi tecnici specifici e come strumneto di validazione degli enunciati (Boero, Douek, & Ferrari, 2008);
- dal punto di vista didattico, il linguaggio matematico dovrebbe emergere gradualmente dal linguaggio ordinario, il quale dovrebbe fungere da metalinguaggio in cui è possibile riconoscere i tratti distintivi degli oggetti matematici, espandere il ragionamento, assegnare valori di verità e classificare gli enunciati sulla base del loro status teorico (Lolli, 2015, 2018), separando gradualmente i concetti di esistenza e verità in matematica dai corrispondenti concetti nel linguaggio naturale usato nella vita quotidiana (D'Amore & Santi, 2018).

Secondo D'Amore e Santi (2018) ci sono due elementi costituitivi che contribuiscono al significato personale degli oggetti matematici: (1) invarianti operatori o schemi, nel senso evidenziato da Vergnaud (1992) e (2) un sistema di convinzioni e interpretazioni. Se vi è un disallineamento tra significato personale e culturale degli oggetti matematici, gli studenti ricorrono a metapratiche (D'Amore, 2005a) come invarianti operatori privi di significato personale [per esempio imitando il linguaggio usato dal docente o assumendo 'attitudini dimostrative' osservate nel docente (D'Amore, 2006)] oppure a modelli intuitivi che si rifanno al'uso nel linguaggio ordinario del termine linguistico che denota l'oggetto matematico (per esempio interpretando il termine "dimostrazione" nel

[203] Notiamo che l'Autore parla di "frase", in quanto si riferisce alla produzione discorsiva nel linguaggio naturale per come essa appare allo studente; dal punto di vista logico le frasi nel linguaggio naturale usato in matematica sono degli enunciati.

senso dell'esibizione di alcuni esempi che dimostrano l'esistenza di un oggetto o la verità di un fatto).
Un possibile approccio al rapporto tra linguaggio matematico e linguaggio naturale è quello proposto da Ferrari (2004b), che si iscrive all'interno della linguistica funzionale (Halliday, 2004), nell'ambito della pragmatica. L'Autore evidenza che la relazione tra linguaggio matematico e linguaggio quotidiano[204] può essere inquadrato in termini di ricorso a diversi registri linguistici nello stesso linguaggio.
I registri linguistici non devono essere confusi con i registri semiotici nel senso di Duval (1995). Infatti, come sottolinea Ferrari, i registri linguistici si definiscono a partire dalle funzioni del linguaggio (Halliday, 2004)[205] che consentono alla lingua di svolgere le sue funzioni piuttosto che a partire da caratteristiche sostanziali dei loro elementi e delle relazioni tra essi. Nella linguistica funzionale lo studio di un testo (sia esso scritto o orale) è strettamente legato alla *funzione* e al *contesto*;[206] ciò che collega il testo al contesto è appunto il registro linguistico (Ferrari, 2004b, p. 35).
Quello che finora abbiamo chiamato "linguaggio matematico" è definito da Ferrari come "un sistema multimodale che include testi verbali, espressioni simboliche e rappresentazioni figurali) e multivariato (che include un ampio spettro di registri)" (Ferrari, 2004b, p. 47), mentre quello che abbiamo chiamato finora "linguaggio naturale" è caratterizzato da Ferrari (2004b) come "linguaggio quotidiano" che si riferisce ai registri più comuni del linguaggio verbale, che può essere sia orale sia scritto (Ferrari, 2004b, p. 110). Dunque, secondo la prospettiva della linguistica funzionale il linguaggio di per sé è uno, ciò che varia, sulla base delle funzioni che esso svolge, è il suo *uso in contesto*.

---

[204] Notiamo che Ferrari preferisce usare il termine "linguaggio quotidiano" piuttosto che ricorrere a quello che abbiamo usato noi finora, cioè "linguaggio naturale", in quanto egli giudica tale locuzione fuorviante, dato che "nessun linguaggio è 'naturale', meno che mai la componente verbale dei registri matematici avanzati" (Ferrari, 2004b, p. 110). Precisiamo che quando usiamo i termini "linguaggio naturale" o "linguaggio ordinario" lo facciamo in senso intuitivo, ma molto vicino a quello che Ferrari chiama "linguaggio quotidiano".

[205] Halliday distingue tra tre componenti funzionali del linguaggio: (1) *ideazionale* (riguarda l'aspetto logico, rappresentazionale del linguaggio); (2) *interpersonale* (riguarda lo scambio tra gli interlocutori) e (3) *testuale* (riguarda l'organizzazione del messaggio con il "discorso circostante" in cui si inserisce e con il contesto di situazione in cui è stato prodotto) (Halliday, 2004, p. 309).

[206] Come sottolinea Ferrari (2004b), nell'ambito della linguistica funzionale il termine *contesto* ha un significato più specifico rispetto a quello dell'accezione comune. È possibile distinguere tra *contesto di situazione*, che fa riferimento ad aspetti come spazio, tempo e interlocutori in qualità di persone fisiche; *co-testo*, che fa riferimento ad altre parti del testo (precedenti o successive) nonché a eventuali altri testi che stanno con esso in relazione; *contesto di cultura*, che fa invece riferimento ai sistemi di convinzioni e conoscenze relative ai partecipanti allo scambio culturale. Per l'accezione comune di "contesto" l'Autore ricorre invece a termini come *situazione*, *circostanze* etc. Specifichiamo che noi abbiamo usato finora il termine *contesto* in un senso generico, che può comprendere elementi di tutte e tre le accezioni specifiche evidenziate nella linguistica funzionale, ma che è più vicino a quello di *situazione* o *insieme di circostanze*. Questo è anche il senso in cui lo useremo di seguito, salvo diverse specificazioni esplicite.

Una distinzione importante in questo senso è quella tra registri evoluti e registri colloquiali; i primi sono prevalentemente registri "specialistici" delle discipline, ma anche registri narrativi o della conversazione colta, mentre i secondi si riferiscono a usi meno colti o non specialistici del linguaggio nella quotidianità. In questo senso il linguaggio matematico in cui la componente simbolica ha un ruolo importante non è altro che un registro linguistico matematico avanzato che comunque di solito non è privo delle componenti verbale o figurale (Ferrari, 2004b). Infatti, la componente verbale è quasi sempre presente nel linguaggio matematico, eccezione fatta per linguaggi completamente formalizzati come per esempio il linguaggio informatico.
Anche se il ricorso ai registri evoluti è più frequente nella versione scritta dei testi verbali, esso si riscontra anche nelle produzioni orali; viceversa, il ricorso al registro colloquiale non è di esclusiva pertinenza del linguaggio verbale, come mostrano i protocolli di studenti esaminati da Ferrari (2018). Dal punto di vista didattico Ferrari ricorre proprio al confronto tra alcuni registri appartenenti al linguaggio matematico (che sono prevalentemente evoluti) e i registri colloquiali per inquadrare le difficoltà degli studenti (2004, p. 37).
Dunque, il linguaggio matematico può essere inteso come riferito a registri diversi sulla base del contesto (nel senso di contesto di situazione, ma anche di cultura) in cui viene usato: in una classe della scuola primaria tale linguaggio sarà diverso da quello usato in un'aula universitaria e quest'ultimo sarà ancora diverso da quello attivato in un confronto in occasione di un convegno di matematici.[207] Pur essendo molto probabile che il ruolo della componente simbolica diventi sempre più importante nei passaggi tra questi tre contesti situazionali e culturali, questa non sarà l'unica differenza, in quanto anche nella componente verbale si noterà, almeno in generale, un'evoluzione verso registri più avanzati.
È in questa prospettiva che si inserisce, a nostro avviso, quanto evidenziato in precedenza, cioè che il linguaggio matematico deve emergere gradualmente da quello ordinario (Lolli, 2015, 2018), separando gradualmente i concetti di verità ed esistenza in matematica da quelli nel linguaggio quotidiano (D'Amore & Santi, 2018): far emergere il linguaggio matematico da quello quotidiano significa prendere coscienza dell'esistenza di diversi registri linguistici che sono "governati" da concezioni di razionalità sempre più circoscritte.
L'attivazione di un registro linguistico dipende dalla disponibilità delle risorse linguistiche necessarie per la sua attivazione, ma un fattore importante è dato, come già sottolineato, dalla presa di coscienza della necessità di attivazione di registri diversi sulla base delle diverse funzionalità linguistiche. La consapevolezza dell'esistenza di diversi registri linguistici sembra dunque essere un requisito indispensabile dal punto di vista didattico, che però di solito non si manifesta spontaneamente nello studente e richiede un'attenzione specifica:

[207] D'altro canto, il testo linguistico sia orale che scritto contribuisce in maniera significativa a una diversificazione delle funzionalità del registro che collega il testo al suo contesto (Ferrari, 2004b).

> everyday-life and mathematical language are considerably divergent as to use, and that this may prove a severe obstacle to learning. (…) as the goal of just preventing students from adopting conversational schemes is of course neither a reasonable nor a viable one, they need to be able to recognize the two ways of using language and to switch between them. (Ferrari, 2004a, p. 386)

L'approccio funzionale al linguaggio mette in evidenza il fatto che l'attribuzione di significato non è determinabile in maniera oggettiva, ma solo in funzione dell'uso del linguaggio; la sua analisi è, a nostro avviso, necessariamente di tipo ermeneutico, in quanto la valutazione di un testo dal punto di vista funzionale richiede una sua valutazione che si basa su presupposizioni relative alla sua appartenenza a un certo registro, presupposizione che si configura come riferita al testo come un tutto unitario, ma che può, e deve, evolvere sulla base dell'esame delle sue singole parti. Ferrari scrive a tale proposito:

> Un approccio funzionalista deve prendere in considerazione non solo singole parole o frasi, ma testi, cioè produzioni orali o scritte di estensione maggiore di una frase. Per analizzare i testi e studiare le funzioni dei linguaggi è necessaria un'analisi dettagliata dei contesti in cui i testi sono prodotti o interpretati. (Ferrari, 2004b, p. 35)

Se un registro linguistico viene interpretato come un gioco linguistico nel senso di Wittgenstein (1953/2003), allora il significato di un elemento linguistico può essere inteso come l'insieme dei suoi usi nei registri linguistici che il soggetto è in grado di attivare. Infatti, secondo Dörfler: "(M)meaning always depends on the respective language game or sign game and also reference of the signs to objects will be controlled by the language game" (Dörfler, 2016, p. 29); se si considera il gioco linguistico come un registro linguistico evoluto, l'uso che un soggetto fa di un segno in un testo formulato in un registro linguistico sarà implicitamente "controllato" da tale registro linguistico come se esso fosse una sorta di gioco linguistico.

Il ruolo del linguaggio è fondamentale anche in riferimento al ragionamento matematico inteso come ragionamento essenzialmente diagrammatico secondo Peirce (1960), come evidenziato nel paragrafo 10.7.

Come sottolinea Dörfler (2016), un diagramma non può essere espresso in parole, ma esso può e deve essere *spiegato* e *compreso* a parole; cioè: se si intendono mettere in evidenza le relazioni che costituiscono un diagramma, questo non può che avvenire nel metalinguaggio, cioè nel "linguaggio naturale", ma tali descrizioni non possono essere considerate come delle sostituzioni del diagramma:

> To be understood and used appropriately, diagrams need to be described in natural language and specific terms relating to the diagram. These descriptions and explanations cannot be substituted for the diagram and its various uses, however. In relation to the diagram and its intended relations and operations, this is a meta-language about the diagrams, which also focuses attention and interest on its relevant aspects and activities. It is similar to the way in which the legend on a map of a city explains how to use that map appropriately. (Dörfler, 2016, p. 26)

I diagrammi sono, in questo senso, secondo Dörfler (2016), segni extra-linguistici, entità irriducibili della matematica, che non devono però essere confusi con degli oggetti matematici:

> Diagrams are extra-linguistic signs. One cannot speak the diagram, but one can speak about the diagram. In this sense, diagrams are irreducible entities of mathematics (there is no mathematics without "formulas"), yet their properties can be named by words and formulated as theorems. Thus, on the other hand (specialized) language (as extension of natural language) is equally indispensable. As a final remark: it would be misleading to consider diagrams as mathematical objects. They are the objects and the means of mathematical activity for which we do not have to view them as designating mathematical objects. This emphasis on activity and concrete operations with signs leads us to Wittgenstein's views. (Dörfler, 2016, p. 27)

Per Dörfler (2005) i diagrammi possono dunque essere intesi come segni su cui è possibile compiere azioni sulla base del gioco lingistico in cui essi si inseriscono. Ma, dato che un diagramma può suggerire anche nuove modalità d'azione, che non si deducono direttamente dalle sue proprietà, ma solo dagli aspetti relazionali che esso mette in evidenza, il lavoro su un diagramma può produrre anche conoscenza completamente nuova, come sottolinea Peirce:

> It has long been a puzzle how it could be that, on the one hand, mathematics is purely deductive in its nature, and draws its conclusions apodictically, while on the other hand, it presents as rich and apparently unending a series of surprising discoveries as any observational science. Various have been the attempts to solve the paradox by breaking down one or other of these assertions, but without success. The truth, however, appears to be that all deductive reasoning, even simple syllogism, involves an element of observation; namely, deduction consists in constructing an icon or diagram the relations of whose parts shall present a complete analogy with those of the parts of the object of reasoning, of experimenting upon this image in the imagination, and of observing the result so as to discover unnoticed and hidden relations among the parts. (Peirce, 1960, CP 3.363)

Dunque il diagramma, come è inteso da Peirce, non è un oggetto matematico, ma è un risultato matematico fondamentale che si presenta sotto forma di segno iconico. Esso può però rivelare la propria forza esplicativa solo attraverso una spiegazione/descrizione in un metalinguaggio. Infatti, la sua iconicità, la sua caratteristica di *Primità*, non consente di ragionare, ma solo di *mostrare*. La spiegazione/descrizione del diagramma nel metalinguaggio non è però in grado di sostituire il diagramma, in quanto non consente di cogliere in un solo sguardo, sotto forma di un unico segno-*representamen* (sia esso una formula, un grafico o l'enunciato di un teorema),[208] le relazioni strutturali e le proprietà del diagramma.

[208] Potrebbe sembrare strano parlare dell'enunciato di un teorema come di un diagramma, ma in realtà un tale enunciato, formulato nella forma "standard", ha una struttura relazionale molto ben evidente: "*se* A *allora* B" o "A *se e solo se* B".

Parlando di ragionamento diagrammatico e di diagrammi in matematica, non possiamo quindi trascurare il ruolo della percezione visiva. Ma *mostrare* implica che ci sia qualcuno che sia in grado di *vedere*, *di osservare*, e questo ci riconduce di nuovo alla questione fenomenologica e alla percezione dei fenomeni come fenomeni nel mondo (*worldly phenomena*) o, il che è equivalente per Rota (1973/1991), di fenomeni in contesto. Ma cosa vuol dire percepire il fenomeno *diagramma* nel mondo dell'attività matematica? È indubbio che, come mette in evidenza Radford (2010), ciò che vede una rana e ciò che vede un essere umano, pur guardando lo stesso oggetto, sono due cose completamente diverse. E questo vale a maggior ragione se "l'oggetto" guardato è un diagramma che esprime relazioni e proprietà matematiche. In questo senso non possiamo non concordare con Radford (2010), quando afferma che "what we see is not the result of direct inputs but of stimuli already filtered by meanings and information about objects and events in the world – meanings conveyed by language and other cultural semiotic systems" (Radford, 2010, p. 2).
Riprendendo il titolo dell'articolo appena citato, "The eye as a Theoretician", possiamo affermare che l'occhio umano è in grado di svolgere compiti di "teorizzazione" a condizione che esso sia educato culturalmente a filtrare e interpretare le informazioni visive in accordo con i significati in specifici sistemi semiotici.[209] Questo aspetto ha importanti implicazioni didattiche, dato che l'occhio del matematico, che "seleziona"[210] la realtà in maniera razionale è, come evidenzia Radford, in realtà il risultato di un "addomesticamento" (*domestication*) (Radford, 2010, p. 4) di un organo che ha avuto un'evoluzione lunghissima. Si potrebbe affermare che si tratta di una delle conquiste culturali che

[209] Non ci soffermiamo qui sul ruolo dell'attenzione che è necessario dirigere su ciò che si osserva nonché su quello della consapevolezza che richiede un "modo di vedere" matematico, dato che ci porterebbe troppo fuori tema, ma rinviamo su questo tema a Mason (2008).

[210] L'espressione "selezionare la realtà" è ispirata alla seguente citazione di Whorf: "Noi selezioniamo la natura secondo le linee tracciate dalle nostre lingue madri, le categorie ed i tipi che isoliamo dal mondo dei fenomeni non li troviamo là perché sono lì, davanti agli occhi di ogni osservatore; al contrario, il mondo è presentato in un caleidoscopico flusso d'impressioni che deve essere organizzato dalla nostra mente. Noi facciamo a pezzi la natura, la organizziamo in concetti, e ciò soprattutto perché partecipiamo ad un accordo di organizzarla in questo modo" (Whorf, 1940, citato in D'Amore, 1999, pp. 185–186). In questa citazione è messo in primo piano il ruolo del linguaggio, più precisamente della lingua madre, ma la lingua madre non è altro che il primo sistema semiotico che incontriamo quando nasciamo in una data cultura. Inoltre, la posizione evidenziata da Whorf può essere vista come speculare rispetto a quella assunta da Rota (1973/1991), nel distinguere il "guardare" (*to view*) dal "vedere" (*to see*) e dal "vedere come" (*to see as*). Infatti, Rota afferma da un lato che "it's because we view, that we see as (Rota, 1973/1994, p. 239) ma dall'altro che "there is no such thing as true seeing. There is only seeing as" (Rota, 1973/1991, p. 239, citato in Arzarello, Ascari, Baldovino e Sabena, 2011, p. 50). Dunque, si potrebbe affermare che noi selezioniamo la realtà secondo le linee tracciate dai modi di vedere che abbiamo appreso nella nostra cultura di riferimento, a cui appartiene indubbiamente la cultura matematica che viene trasmessa e acquisita a scuola; d'altro canto, tali modi di vedere sono determinati dalle nostre lingue madri o dai sistemi semiotici a cui siamo maggiormente e più precocemente esposti.

contraddistinguono fortemente la specie umana. Come sottolineano Arzarello, Ascari, Baldovino e Sabena (2011), dal punto di vista didattico questo significa che lo studente deve essere educato ad attribuire significato attraverso il "vedere" matematicamente:

> Students must be educated by the teacher to make sense of what they perceive/see when exposed to a mathematical situation. Generally a situation may evoke different contexts and so produce a different sense-making, according to the age and the background of the students. (Arzarello, Ascari, Baldovino, & Sabena, 2011, p. 51)

In questo paragrafo ci siamo soffermati sul ruolo del linguaggio primariamente per discutere brevemente la complessa relazione tra linguaggio matematico e linguaggio naturale, ma la considerazione di Peirce, secondo cui il ragionamento matematico è essenzialmente diagrammatico, ci ha portato a considerare il ruolo della percezione.

Il lettore si chiederà probabilmente quale sia il ruolo degli elementi qui discussi nel presente quadro teorico.

Posizionandosi la presente ricerca nell'ambito della didattica della matematica, la scelta del linguaggio in cui essa avrebbe dovuto essere esposta può sembrare scontata: il linguaggio consueto di questa disciplina è un linguaggio discorsivo, in cui rientra una vasta gamma di termini specialistici, il quale viene usato allo scopo di analizzare ed esporre analisi di testi scritti e orali prodotti da soggetti che apprendono la (o riflettono su) la (didattica della) matematica. Dal punto di vista della linguistica funzionale il linguaggio standard della didattica della matematica come disciplina è dunque assimilabile a un registro evoluto, in cui si producono "testi" (in senso ampio) interpretativi (o meglio: ermeneutici) relativi al contesto[211] di insegnamento-apprendimento della matematica o relativi alla metariflessione sulle relazioni tra tali testi.

In ogni caso, nel registro linguistico evoluto della didattica della matematica è sempre presente un nucleo di registro matematico *estremamente* evoluto, nel senso inteso da Ferrari (2004b), il quale ha caratteristiche diverse da quello che potremmo chiamare il "metaregistro" in didattica della matematica.

Il fatto appena evidenziato sottolinea a nostro avviso la necessità di una problematizzazione non solo del ruolo del linguaggio nell'apprendimento in termini di rapporto tra linguaggio matematico e linguaggio "naturale", ma anche del ruolo del linguaggio *nella* (e *della*) didattica della matematica come disciplina. Questa problematica è direttamente legata a quella della definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica, su cui si concentra la presente ricerca.

Il problema che ci siamo posti è il seguente: il linguaggio della didattica della matematica è discorsivo e il ragionamento in tale disciplina non è di tipo

---

[211] Qui il termine *contesto* è inteso nel senso della linguistica funzionale, come coinvolgente tutte e tre le componenti evidenziate in precedenza: la situazione, la relazione con altri testi, cioè il co-testo, nonché il contesto culturale.

diagrammatico, nel senso evidenziato da Peirce; un ragionamento diagrammatico consente invece di cogliere, di osservare, di vedere (nel senso evidenziato nel paragrafo precedente) le relazioni tra gli elementi, suggerendo eventuali azioni sui diagrammi che le rappresentano. Un tipo di ragionamento diagrammatico sarebbe dunque molto importante anche in didattica della matematica nel caso si volessero studiare le relazioni e le strutture che da esse sorgono. Esso sarebbe fortemente indicato anche nel caso in cui si volesse fornire una prospettiva strutturale unificante anche solo alcune parti della disciplina, se per mantenere la generalità è necessario prescindere il più possibile dagli elementi coinvolti, focalizzando l'attenzione invece sulle relazioni tra essi.

## 10. 9. Il ruolo del linguaggio categoriale

Un linguaggio che a nostro avviso può essere inteso come il prototipo di linguaggio per un ragionamento diagrammatico, è il linguaggio della teoria delle categorie.
La teoria delle categorie nasce negli anni '50 del XX secolo attraverso i lavori pionieristici di Eilenberg e Mac Lane (Mac Lane, 1971/1998; Lawvere & Schanuel, 1994), nell'ambito della geometria algebrica.
Oggi la teoria delle categorie è una branca della matematica e le sue nozioni svolgono un ruolo unificante come ponte tra diversi ambiti della matematica pura e applicata.
Una categoria è costituita intuitivamente da una classe di oggetti che in matematica in genere sono delle strutture (algebriche), ma che in realtà possono essere di natura molto diversa, a seconda delle applicazioni, e da mappe tra tali oggetti che soddisfano certe proprietà, sulle quali torneremo più avanti. L'aspetto più importante per il presente quadro teorico risiede nel fatto che alcuni concetti base della teoria delle categorie consentono di trattare in maniera generale le relazioni tra la maggior parte degli elementi in essa coinvolti. Il linguaggio categoriale si è dimostrato infatti, seguendo Zalamea (2021), come quello più idoneo per la formulazione della definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica che rappresenta l'obiettivo primario della presente ricerca. Questo aspetto ci consente di introdurre degli elementi di ragionamento diagrammatico all'interno della didattica della matematica come disciplina, il che può avere dei vantaggi teorici importanti, a causa della "osservabilità" diagrammatica delle relazioni coinvolte.
Inoltre, non è trascurabile il vantaggio che la teoria degli insiemi, a cui fa riferimento di solito la matematica insegnata e appresa a scuola e all'università, in maniera più o meno esplicita e intuitiva, possa essere interpretata come una categoria particolare, la categoria *Set*, i cui elementi sono insiemi e le cui mappe

sono funzioni tra essi.[212] Anche se questo aspetto è di interesse marginale per la presente ricerca, esso non lo è in riferimento al ruolo che il linguaggio categoriale può svolgere come strumento di analisi e sintesi in didattica della matematica.
Tuttavia, come già ripetutamente sottolineato, per Peirce (1960) il *ragionamento* diagrammatico in realtà è un ragionamento in un metalinguaggio, in cui il diagramma deve essere descritto e spiegato, ma tale descrizione/spiegazione non può sostituire il diagramma. Il linguaggio categoriale è un linguaggio matematico, in cui la formalizzazione assume spesso, anche se non sempre, la forma di rappresentazioni grafiche che mettono in rilievo le relazioni tra gli elementi, come mostreremo nel prossimo capitolo.
Il linguaggio categoriale, in quanto *linguaggio matematico*, nel senso evidenziato da Ferrari (2004b), è equiparabile a un registro linguistico evoluto in cui la componente figurale ha un ruolo significativo. D'altro canto, invece, la descrizione/spiegazione dei diagrammi, così come di altri aspetti non diagrammatici, dovrà avvenire nel linguaggio della didattica della matematica, che è un linguaggio discorsivo, cioè un registro evoluto in cui è prevalente la componente verbale. Si rende dunque necessario discutere la modalità con cui intendiamo "tradurre" gli strumenti matematici categoriali nel (meta)linguaggio della didattica della matematica come disciplina.
È indubbio che non si può e non si deve trattare di una traduzione tramite una corrispondenza biunivoca tra unità di significato, come avviene nel caso di una congruenza totale tra rappresentazioni semiotiche (Duval, 1995, 2011/2017). Si tratterà piuttosto di una congruenza parziale, basata sulle esigenze dettate dal contesto d'uso.
Per caratterizzare questo modo di ricorrere agli strumenti matematici, cioè trasponendoli tramite una congruenza non necessariamente totale in un contesto d'uso diverso, Zalamea usa il termine "concettuale", poiché ciò su cui tale uso si basa sono le caratteristiche dei rispettivi oggetti matematici che li rendono strumenti di pensiero e analisi *universali*. Egli usa anche il termine "analogico", mettendo in evidenza l'analogia che viene stabilita tra due contesti diversi d'uso: quello più prettamente matematico e quello relativo alla filosofia della matematica.
Noi parleremo di "uso concettuale" quando intendiamo mettere in evidenza l'universalità dei concetti matematici, indipendentemente dal contesto in cui sono usati; di "uso metaforico" quando ci focalizziamo sulle applicazioni specifiche degli strumenti matematici in didattica della matematica; di "uso analogico" quando vorremo sottolineare la trasposizione di un uso da un ambito (in questo caso la filosofia della matematica) a un altro [in questo caso la (filosofia) della didattica della matematica].

[212] Ricordiamo che anche la logica classica, a cui di solito ci si riferisce nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica, nei casi in cui ci si riferisce a una logica, può essere interpretata come un caso limite della logica dei fasci, che si basa sul linguaggio categoriale (Caicedo, 1995; Zalamea, 2012b).

Il termine "uso metaforico" richiede qualche approfondimento, che esporremo nel prossimo paragrafo e nel capitolo 11.

**10. 10. Metafore e analogie**

Un concetto di metafora che si incontra di frequente in didattica della matematica è quello derivante dalla già citata teoria dell'*embodied cognition* (Lakoff & Núñez, 2000). Questi autori studiano le strutture concettuali implicite su cui si fonda la cognizione in generale, e in matematica in particolare, e individuano le loro radici nelle esperienze senso-motorie dell'essere umano, attribuendo alle *metafore concettuali* il ruolo di strumento di generazione delle idee a partire dalle esperienze corporee. La metafora concettuale è intesa dagli autori come il meccanismo che consente di comprendere i concetti astratti in termini concreti, trasferendo le strutture inferenziali dal dominio sorgente (*source domain*) concreto, al dominio obiettivo (*target domain*) astratto. È importante notare che per gli autori i meccanismi cognitivi della formazione delle idee e del pensiero "ordinario" e delle idee e del pensiero matematico sono gli stessi. In questa impostazione le metafore sono dunque strumenti concettuali universali di pensiero e non elementi linguistici, in quanto precedono l'espressione linguistica. Nell'ambito delle metafore concettuali, Lakoff e Núñez distinguono, come già evidenziato in precedenza, tra metafore fondanti (*grounding metaphors*), sulle quali si fondano le idee matematiche, a partire dalle esperienze senso-motorie nella quotidianità, e metafore di collegamento (*linking metaphors*), sulle quali si basano i trasferimenti tra un ambito e un altro della matematica.
Un'altra concezione di metafora si incontra invece nell'ambito della *Commognition* (Sfard, 2008), ampiamente discussa nel capitolo 8. Secondo l'Autrice, una metafora "is a discursive construct – it is a particular way of making assertions" e più precisamente, le metafore sono "transplants from one discourse to another" (Sfard, 2009, pp. 39–40). In particolare le metafore sono strumenti indispensabili per il passaggio dal fisico al mentale, cioè dall'azione alla sua astrazione, ma anche per il passaggio delle frontiere tra intuitivo e formale, e svolgono una funzione concettuale unificante tra intuizione e formulazione di idee scientifiche e viceversa: "(C)conveyed through language from one domain to another, metaphors enable conceptual osmosis between colloquial and scientific discourses, letting our primary intuition shape scientific ideas and letting the formal conceptions feed back into the intuition" (Sfard, 2009, p. 40).
Una delle metafore più influenti, secondo Sfard, è la "metafora dell'oggetto" (Sfard, 2009, p. 42), sulla base della quale noi discorriamo degli oggetti matematici nello stesso modo in cui discorriamo degli oggetti realmente esistenti. Tale metafora è così "arcaica" da rimanere quasi sempre implicita e da presentarsi come la base di un'ontologia linguisticamente indotta che ha molti vantaggi, come

per esempio l'economicità nella comunicazione, in quanto "si può dire molto di più con molto meno", ma tale "collasso ontologico" (Sfard, 2009, p. 42) può essere causa di diverse problematiche nell'apprendimento della matematica, come evidenzia l'Autrice.

Un termine strettamente legato a quello di metafora è quello di analogia. Dal confronto tra questi due termini, Pimm (1981) risale all'idea di metafora strutturale. Ricorrendo a riferimenti storici, l'Autore evidenzia il fatto che "analogia" è un termine di origine matematica e corrisponde al concetto di proporzione. In questo senso un'analogia collega due relazioni A:B e C:D. Una *metafora strutturale*, invece, è un'analogia condensata, nel senso che a partire dall'analogia che afferma che A:B corrisponde a C:D, si passa poi ad affermare "il C di B" o "A è un C".

Per esempio, dall'analogia che afferma che l'insegnante (A) sta alla mente dello studente (B) come il coltivatore (C) sta al campo da coltivare (D), si passa alla metafora dell'insegnante come "coltivatore di menti". Per comprendere la metafora, sottolinea Pimm, è necessario quindi comprendere l'analogia su cui essa si basa; ma non vi è una corrispondenza biunivoca tra l'analogia e la metafora, dato che diverse analogie possono dare origine alla stessa metafora.

Pimm propone un'interpretazione matematica dei termini del linguaggio comune "simile", "analogia" e "metafora" rispettivamente nei termini matematici "equivalenza", "isomorfismo" e "immersione"; egli suggerisce inoltre che il passaggio dall'analogia alla metafora possa essere interpretato matematicamente come un transfer dall'isomorfismo all'immersione tramite il morfismo (Pimm, 1981, p. 48).

Una metafora strutturale può essere molto importante dal punto di vista cognitivo poiché può suggerire un'estensione di usi consueti in domini nuovi, ma essa non va presa "troppo alla lettera", sottolinea Pimm (1981, p. 50). Un possibile rischio che può derivare da una mancata esplicitazione della natura metaforica strutturale di certi usi in matematica è legato al fatto che la metafora strutturale di solito non è sufficiente per inquadrare tutte le nuove caratteristiche del dominio in cui la metafora viene usata e può dunque portare a una perdita di significato non solo in tale dominio (che mutua il proprio significato dalla metafora strutturale stessa), ma anche nel dominio dal quale essa trae le proprie origini.[213]

[213] L'Autore riporta l'esempio classico secondo cui lo studente interpreta la metafora strutturale dell'inclusione $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Lo studente trasferisce semplicemente le proprietà delle operazioni in $\mathbb{N}$ alle operazioni in $\mathbb{Z}$, il che funziona fino a quando i numeri interi con cui si opera sono positivi e può trovare qualche interpretazione cognitivamente accettabile per le operazioni di addizione e sottrazione tra interi (per esempio attraverso una interpretazione di spostamento a destra o a sinistra sulla retta numerica degli interi), al più tardi nel momento in cui si cerca di attribuire significato a un'operazione come $(-2) \cdot (-3)$ sulla base del significato di moltiplicazione in $\mathbb{N}$, la metafora strutturale fallisce necessariamente. Questo può non solo impedire la corretta comprensione del nuovo contesto, $\mathbb{Z}$, ma può anche indurre a una reinterpretazione errata delle conoscenze relative a $\mathbb{N}$. Notiamo anche che questo aspetto è implicitamente presente nel concetto di ostacolo nell'ambito della teoria delle situazioni didattiche (Brousseau, 1997).

Anche Lolli (2002) evidenzia il fatto che le metafore, pur essendo strumenti fondamentali per la creatività matematica,[214] non sono da trattare come delle analogie. L'Autore mette in evidenza il fatto che la differenza tra analogia e metafora è presente anche dal punto di vista tecnico in quanto non ci sono metafore che riescono a cogliere pienamente un'idea matematica:

> tutte le metafore associate a un'idea matematica sono inadeguate e ci sono punti in cui vengono meno rispetto al concetto matematico; e questo è bene ed è giusto, perché se ci fosse una metafora che va bene per tutto (quello che matematicamente ci serve del concetto) allora basterebbe quella, mentre il concetto matematico apporta qualcosa di più, o sarebbe superfluo; e basterebbe anche una parola del linguaggio comune, invece del simbolo artificiale che per questo è essenziale; è proprio nella natura del concetto matematico quella di non identificarsi con una sola metafora ma nell'essere qualcosa che è comune a una famiglia di metafore concorrenti. (Lolli, 2002b, p. 228)

Notiamo infine che la relazione tra analogia e metafora strutturale può trovare un'interpretazione anche dal punto di vista più prettamente matematico, ricorrendo al linguaggio categoriale.
Infatti, secondo D'Amore (1974) è possibile definire un'analogia come una *categoria analogica*. In tale senso è poi possibile definire una metafora strutturale come un'immersione, come suggerito da Pimm (1981). Non possiamo soffermarci qui dal punto di vista tecnico su questi aspetti poiché essi richiedono l'introduzione dei concetti base della teoria delle categorie, che esporremo nel prossimo capitolo, ma torneremo ancora su esso più avanti, nel paragrafo 11.2.
Ciò che ci sembrava importante sottolineare in questo punto della trattazione è il fatto che un ricorso metaforico agli oggetti matematici può avere una giustificazione non solo intuitiva, ma anche tecnica.
Notiamo infine che, come evidenzia Lolli (2002b), il ricorso a metafore (che egli in questo caso paragona alle intuizioni), è fondamentale nella fase di costruzione di nuova conoscenza in matematica, in cui le metafore e le regole a esse associate devono essere adattate al nuovo contesto:

> La creazione di un concetto matematico è un processo non uniforme e in genere lungo e tortuoso; ma tipicamente, per molti casi fondamentali, come quelli dei sistemi numerici, si realizza introducendo (o incominciando a usare) un simbolo, o un complesso sistema simbolico, associandogli da una parte alcune regole di manipolazione, derivate per analogia formale da altri sistemi, e dall'altra alcune metafore, corrispondenti alle situazioni in cui si pensa che i nuovi concetti siano applicabili. Alcune metafore - i matematici spesso dicono "intuizioni" - possono non andare d'accordo con alcune regole, e occorrono compromessi e modifiche, una negoziazione logica che nel corso del tempo modifica e adatta e le regole e l'insieme di metafore associate. (Lolli, 2002b, p. 228)

[214] Richiamiamo inoltre alla mente la posizione assunta da Zalamea, secondo cui la creatività matematica è sostanzialmente un movimento pendolare tra metafora e tecnica (Zalamea, 2009/2012a, p. 343).

## 10. 11. Considerazioni conclusive

Le definizioni di segno e di semiosi in Peirce, fornite nel paragrafo 10.4.1. del presente capitolo, consentono di tenere conto dei vari aspetti relativi agli oggetti matematici specifici della didattica della matematica che abbiamo evidenziato in precedenza, tramite la definizione di modello ermeneutico.
Infatti, il fatto che secondo Peirce l'attività di pensiero *in generale* sia essenzialmente semiotica poiché "We have no power of thinking without signs" (Peirce, CP 5.265) e che inoltre i ruoli di segno, interpretante e oggetto non sono qualità intrinseche di entità, ma ruoli assunti nel processo semiotico del soggetto, rende la semiosi peirciana un contesto particolarmente adatto per il presente lavoro, dato che in essa sia gli oggetti matematici, sia le loro interpretazioni, sia le interpretazioni delle interpretazioni, possono essere inquadrati in maniera opportuna, in accordo con la nostra definizione di modello ermeneutico. Infatti, il processo semiotico nell'ambito della semiosi peirciana, secondo l'interpretazione da noi fornita, consente di inquadrare la caratteristica degli oggetti matematici e degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica come (quasi-)oggetti dinamici adatti per una caratterizzazione degli oggetti effettivi della pratica matematica nonché della pratica della didattica della matematica.
Tale interpretazione consente però, attraverso il concetto di *oggetto immediato*, di inquadrare allo stesso tempo anche l'oggetto staticizzato o oggettificato. Inoltre, il fatto che nella semiosi peirciana il segno sia considerato come l'elemento primo (Primità) e l'oggetto come l'elemento secondo (Secondità) della semiosi, consente di considerare l'approccio non riduzionista al fenomeno nel mondo (Rota, 1973/1991) nella filosofia sintetica (Zalmea, 2009/2012a).
Infine, nella semiosi peirciana è possibile inquadrare sia l'interpretazione del singolo segno (Steinbring, 2006) sia l'ermeneutica dell'intero testo (Bagni, 2009). Infatti, da un lato l'interpretante appartenente al "nucleo" triadico (segno-*representamen*, oggetto, interpretante) nella semiosi peirciana può essere inteso come l'interpretazione di un singolo segno. D'altra parte, il segno iniziale, inteso in senso generico, può essere inteso come la presupposizione con la quale si entra nel circolo ermeneutico (Bagni, 2009),[215] mentre la relazione tra oggetto immediato e oggetto dinamico può essere intesa come l'andare e venire tra la parte e il tutto nell'approccio ermeneutico ai testi.
Nei paragrafi precedenti ci siamo soffermati sul ruolo del linguaggio sia nelle applicazioni in didattica della matematica sia negli aspetti legati a essa come disciplina teorica. Abbiamo messo anche in evidenza il fatto che in didattica della matematica il linguaggio matematico è in realtà sempre presente come linguaggio oggetto riguardo al quale si ragiona in riferimento ai processi di insegnamento-apprendimento e che di solito, quando ci si riferisce anche in maniera implicita al

[215] Come già evidenziato, secondo Bagni anche l'assenza (p. e. l'assenza di uno strumento concettuale adeguato alla risoluzione di un problema) può essere inteso come il segno "iniziale" della semiosi e come una presupposizione per l'ingresso nel circolo ermeneutico.

linguaggio matematico, cioè senza ricorrere necessariamente a dei formalismi, ciò avviene ricorrendo a un linguaggio di stampo insiemistico.
Per convincersi di questo, è sufficiente a nostro avviso pensare a espressioni del tipo: "2 è l'inverso di $\frac{1}{2}$" oppure "La moltiplicazione è commutativa"; in entrambi i casi è sottinteso che ci si riferisce a opportuni insiemi nei quali, o rispetto ai quali, gli oggetti matematici coinvolti sono definiti. Nel primo caso si intenderà probabilmente non la frazione $\frac{1}{2}$ , ma il numero razionale $+\frac{1}{2}$, dato che di inverso si parla in riferimento a un'operazione rispetto alla quale è definito un elemento neutro e la quale è definita su un insieme ottenuto dopo un passaggio al quoziente che, in questo caso, si compie sull'insieme delle frazioni, identificando tutte le frazioni tra loro equivalenti in un'unica classe di equivalenza; nel secondo caso, invece, è chiaro che la moltiplicazione è considera implicitamente definita su un certo insieme, che per esempio non può essere quello delle matrici.
Il linguaggio insiemistico è dunque sempre presente implicitamente quando si fanno affermazioni in matematica, almeno nel caso in cui il soggetto che ne parla ha una formazione matematica. Si tratta di una delle metafore oggettivanti, nel senso evidenziato da Sfard (2009), più potenti della matematica. Tuttavia, mentre nei discorsi relativi a temi matematici tra matematici la "metafora insiemistica", come potremmo chiamarla, è probabilmente sempre presente e non causa problemi, dato che tutti gli interlocutori vi ricorrono, in una situazione di apprendimento questa simmetria tra gli interlocutori non è presente nella maggior parte dei casi quando gli interlocutori sono il docente e lo studente, ed è probabilmente completamente assente nei discorsi tra studenti. Non vogliamo però soffermarci ulteriormente su questo aspetto, per quanto esso ci sembri importante, dato che in questo contesto esso ci serve soltanto per mettere in evidenza il fatto che anche in didattica della matematica non è possibile prescindere dal linguaggio tecnico della matematica che è di solto quello insiemistico.
All'inizio del capitolo avevamo messo in evidenza il fatto che in filosofia della didattica della matematica, di solito, quando una comunicazione con la filosofia della matematica è tentata, ciò avviene in riferimento alla filosofia analitica, la cui caratteristica distintiva è che la sua base metodologica è la logica del primo ordine che si basa sulla teoria degli insiemi (si vedano a tale proposito van Bendegem, 2018 e Zalamea, 2009/2012a, 2021).
D'altra parte, Dörfler (2016) afferma che se si coniuga la posizione pragmatista di Wittgenstein (la quale, come già evidenziato, è molto spesso assunta come base per il pragmatismo in didattica della matematica) con la teoria degli insiemi, la contrapposizione tra una posizione realista (o platonista) e una pragmatista, può trovare una conciliazione:

> Platonist stance viewing set theory as descriptive of a universe of prefabricated sets. With Wittgenstein, one can interpret set theory as one possible answer to the question of how one could sensibly talk about infinity. That not every such talk is sensible was shown by the well-known paradoxes. The definitions and the propositions of set

> theory then are the rules within a language game that develop the grammar of "infinity," and as is known, different such grammars are possible and sensible. (Dörfler, 2016, p. 29)

Ciò che sfugge tuttavia alla "conciliazione" realista-pragmatista tramite la teoria degli insiemi e il pragmatismo wittgensteiniano nella chiave fornita da Dörfler, la quale ha il vantaggio di fornire alla matematica un'ontologia per così dire "endogena", che non necessita di riferimenti a realtà esterne,[216] è la dimensione dinamica della matematica che risulta indispensabile per poter inquadrare la pratica matematica. Ricorrendo a una metafora potremmo dire che se il linguaggio matematico a cui si riferisce la filosofia della matematica, che poi funge da base alla filosofia della didattica della matematica, è quello insiemistico, è come se si tentasse di trasportare acqua con un setaccio: la pratica, o l'attività matematica (l'acqua) defluirà sempre tra le maglie della rete del setaccio (il linguaggio insiemistico).

Come già evidenziato ripetutamente, un linguaggio matematico adatto a cogliere la dinamicità della pratica matematica è il linguaggio della teoria delle categorie. Peruzzi (2005) mette come segue in evidenza la relazione tra teoria degli insiemi e teoria delle categorie:

> In matematica, i vari ambiti tradizionali (teoria dei numeri, algebra, analisi e geometria) hanno trovato espressione unitaria prima nel linguaggio della teoria degli insiemi e poi nel linguaggio della teoria delle categorie. (…) Il (…) fraintendimento è dovuto all'idea che la teoria degli insiemi fornisca, se non il linguaggio, l'unico quadro teorico in cui formulare, con il rigore richiesto, le nozioni e i principi basilari delle varie branche della matematica. Ora, anche a prescindere dal fatto già ricordato che ci sono più teorie degli insiemi (e, visto il loro sviluppo, si può ormai considerare 'la' teoria degli insiemi come una vera e propria branca fra le altre della matematica), il linguaggio insiemistico e i principi in esso esprimibili rappresentano una scelta tutt'altro che scontata. Il loro impiego corrente nella didattica, a partire dall'insiemistica, oltre a non tener conto delle reali motivazioni che giustificano l'introduzione di questo linguaggio, lascia supporre che non ci sia altro modo di presentare le nozioni fondamentali della matematica. Il che è falso, perché la teoria delle categorie offre appunto un modo diverso e non meno efficace, anche se sul piano didattico l'opportunità di impiegare l'una o l'altra può dipendere dall'argomento trattato. (Peruzzi, 2005, pp. 73–74)

D'altro canto, Ernest (2016) evidenzia che in una prospettiva "standard" sulla filosofia della matematica e sulla didattica della matematica certe domande, come per esempio quella relativa a "what are reliable foundations for the whole of mathematics and is set theory a better or worse candidate than category theory (to name the two, rather unequal, rivals at the present moment)" (Ernest, 2016, p. 16), non possono che sembrare poco o per nulla di competenza della didattica della matematica. Tuttavia, a partire da quello che l'autore chiama "the praxis turn in

---

[216] Si veda a tale proposito la discussione sulle posizioni strutturaliste nell'ambito della prospettiva realista in filosofia della matematica (paragrafo 9.3.3.1.2).

the philosophy of mathematics" (Ernest, 2016, p. 16), e che sta anche alla base della filosofia sintetica della matematica contemporanea (Zalamea, 2009/2012a), anche aspetti come questo possono acquisire una prospettiva diversa se si tiene conto della dimensione diacronica della matematica, cioè del fatto che la pratica matematica è esercitata da esseri umani che ricevono un'istruzione matematica che a sua volta si basa su certe assunzioni relative alla matematica.

È certo che Ernest usa la contrapposizione tra teoria delle categorie e teoria degli insiemi come esempio di questione almeno all'apparenza lontanissima dalla didattica della matematica e non si sofferma ulteriormente su questo argomento; ed è certo che noi non intendiamo estendere la nostra riflessione su argomenti che ci porterebbero fuori dall'argomento della tesi, come quello del rapporto tra matematica, filosofia della matematica e didattica della matematica. Ciò che riteniamo però importante sottolineare qui è che *la questione del linguaggio matematico coinvolge in maniera significativa anche la dimensione del linguaggio della didattica della matematica come disciplina*, la quale richiede risposte specifiche in (e per) tale disciplina.

Non intendiamo affatto affermare che il linguaggio della didattica della matematica debba essere un linguaggio categoriale; questa sarebbe un'affermazione che a nostro avviso non avrebbe senso, dato che il linguaggio della disciplina "didattica della matematica" è discorsivo e non formale e nemmeno diagrammatico. Tuttavia riteniamo che il linguaggio categoriale, usato in termini analogici e metaforici, possa essere uno strumento utile per modellizzare/interpretare molti aspetti legati alla dinamicità della pratica in didattica della matematica. Sul senso in cui usiamo i concetti di analogia, metafora, modellizzazione e interpretazione nonché sull'applicazione concreta degli ultimi due termini torneremo in dettaglio nel prossimo capitolo.

Riteniamo dunque che, nel senso da noi evidenziato, la teoria delle categorie possa rappresentare un utile linguaggio oggetto per certi lavori specifici in didattica della matematica, come cercheremo di mostrare nel prossimo paragrafo, il quale ha un duplice obiettivo: esporre gli strumenti matematici categoriali di cui ci serviremo per fornire la definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica nonché fornire una possibile interpretazione di alcuni elementi categoriali nel linguaggio della didattica della matematica. Il linguaggio discorsivo della didattica della matematica fungerà da metalinguaggio in cui verranno interpretati i processi espressi nel linguaggio categoriale. Nel fare ciò supporremo che esista un'analogia tra un frammento della teoria delle categorie e un frammento della didattica della matematica nel senso evidenziato da Pimm (1981), secondo cui, come già esposto in precedenza, un'analogia è una corrispondenza tra rapporti che ha origine nel concetto di proporzione in matematica. Noi supporremo che certe relazioni espresse nell'ambito della teoria delle categorie corrispondano a relazioni strutturalmente analoghe in didattica della matematica; questo ci consentirà di usare in maniera metaforica le relazioni della teoria delle categorie nell'ambito della didattica della matematica, nel senso in cui ciò è inteso

da Pimm, cioè come "un'immersione" delle relazioni presenti nella teoria delle categorie in didattica della matematica. Anche sul significato tecnico del termine "immersione", che viene nominato solo a livello intuitivo da Pimm (1981), torneremo nel prossimo capitolo, dopo aver esposto gli strumenti matematici che ci consentono di trattarlo in maniera appropriata. Per ora diciamo soltanto che il concetto di immersione serve per descrivere il modo in cui a una struttura (in questo caso un frammento di teoria delle categorie) si attribuiscono proprietà che essa non possiede di per sé, ma che acquisisce attraverso la creazione di una sua "copia" in una struttura più ampia (in questo caso la didattica della matematica).
Nel presente capitolo abbiamo discusso la questione gnoseologica e abbiamo messo in evidenza il fatto che in una prospettiva pragmatista il significato degli oggetti (matematici) è ricondotto all'attivazione delle risorse semiotiche a essi collegate in un dato contesto e che conoscere un fenomeno "nel mondo", cioè in un approccio non riduzionista, secondo la posizione fenomenologica di Rota (1973/1991), equivale a conoscerlo "in contesto".
D'altro canto abbiamo anche evidenziato il fatto che la conoscenza "in contesto", non riduzionista, è quella che Zalamea (2009/2012a) chiama la *conoscenza sintetica*, che si contrappone a quella *analitica*, cioè riduzionista, e che questi due approcci sono collegati a due tipologie diverse di linguaggio: quello categoriale e quello insiemistico. In un'intervista recente, Zalamea ricorre alla seguente immagine metaforica per chiarire il legame tra i due concetti e i due linguaggi:

> Gli insiemi studiano analiticamente un oggetto, decomponendolo mediante i loro elementi; le categorie studiano un oggetto sinteticamente, componendolo tramite le loro frecce. Analiticamente, l'oggetto entra in "acque limpide" e può essere colto attraverso la sua costituzione interiore. Sinteticamente, l'oggetto è immerso "nel fango" e può essere colto solo tramite il suo comportamento esteriore. (Asenova, 2020, p. 64)

Sottolineiamo che non si tratta di una contrapposizione esclusivista e che i due approcci possono essere pensati come complementari, aspetto di cui dovremo tenere conto anche nella definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica. Tuttavia, per Zalamea l'approccio sintetico ha chiaramente la precedenza su quello analitico, e non solo in riferimento agli oggetti della matematica. D'altra parte, come già evidenziato, anche Rota sottolinea il fatto che, dato un fenomeno, l'approccio riduzionista è sempre in concorrenza con un approccio non riduzionista, ma che il secondo non solo è possibile, ma anche in grado di fornire la conoscenza reale dell'oggetto, come si evince dalla citazione già fornita in precedenza e che riportiamo nuovamente qui per comodità del lettore:

> In other words, the central thesis of phenomenology is the following. Given any phenomenon X, there is a non-reductionist attitude toward X, as well as reductionist attitudes. The description of the non reductionist attitude has to precede the reductionist description. Not only that, but it is possible just to describe every

> phenomenon at its own level, without even needing to resort to reduction to other levels. (Rota, 1973/1991, p. 75)

Nel prossimo capitolo forniremo alcune interpretazioni di strumenti matematici categoriali che ci consentiranno di fondare la questione gnoseologica della conoscenza pragmatica o sintetica anche in termini matematici. Questo fatto servirà per garantire dal punto di vista gnoseologico la definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica.
Il nostro obiettivo è quello di esporre gli strumenti matematici appartenenti alla teoria delle categorie che possono costituire una sorta di modello matematico generale per il quadro teorico finora delineato, mettendo in evidenza in prima linea la questione inerente alla problematica gnoseologica in un approccio sintetico alla conoscenza degli oggetti.

# 11. Strumenti matematici categoriali per il quadro teorico e loro possibili interpretazioni

In questo capitolo esporremo un modello matematico generale per il quadro teorico del presente lavoro, fornendo al contempo delle interpretazioni di tale modello in didattica della matematica. Il modello e la sua interpretazione rappresentano dei risultati di ricerca teorici ottenuti tramite il ricorso agli strumenti propri della teoria delle categorie. La costruzione del modello matematico consisterà semplicemente nella scelta ed esposizione di un insieme di definizioni e proposizioni che formano un frammento teorico appartenente alla teoria delle categorie. A questo farà seguito un'interpretazione del modello matematico (o di parti di esso) nel linguaggio della didattica della matematica.
In un caso invece, nel momento in cui parleremo di analogia e metafora, percorreremo la strada inversa, cioè partiremo da un argomento non matematizzato, in uso in didattica della matematica, e forniremo di esso un modello nell'ambito della teoria delle categorie.
Diventa chiaro che la metodologia a cui ci riferiremo è una metodologia di carattere più tecnico di quanto non lo sia di solito nei lavori in didattica della matematica. Ci sembra dunque importante esplicitare in dettaglio le sue assunzioni di base e il modo di procedere in essa.

## 11. 1. Questioni metodologiche

Nel caso del presente capitolo, la metodologia consiste fondamentalmente nel ricorso agli strumenti matematici categoriali come modelli in didattica della matematica. Questo modo di procedere può essere visto come un'applicazione della strategia *combinare* nell'ambito del networking di teorie (si veda il paragrafo 4.3.), in quanto il suo obiettivo è quello di fornire un modello matematico coerente che funga da strumento tecnico per il quadro teorico esposto nel capitolo precedente. In questo senso si tratta di individuare e combinare strumenti matematici categoriali utili a tale scopo.
Dal punto di vista metodologico il presente capitolo ha anche un'altra particolarità: non esporremo tutto il modello matematico relativo al quadro teorico, per poi far seguire la sua interpretazione, ma procederemo gradualmente, cioè esponendo una parte del modello e facendola seguire da un'interpretazione, per proseguire poi con l'esposizione di un'altra parte del modello, facendola seguire da un'interpretazione e così via, alternando le due tipologie di esposizione.
Questo modo di procedere ci sembra appropriato sia per facilitare la comprensione dell'argomento trattato sia perché consente di mostrare come i due linguaggi, quello categoriale, che funge da linguaggio oggetto, e quello discorsivo della didattica della matematica, che funge da metalinguaggio, dialogano e si

influenzano a vicenda formando idealmente un intreccio simile a quello del DNA a doppia elica (Figura 38).

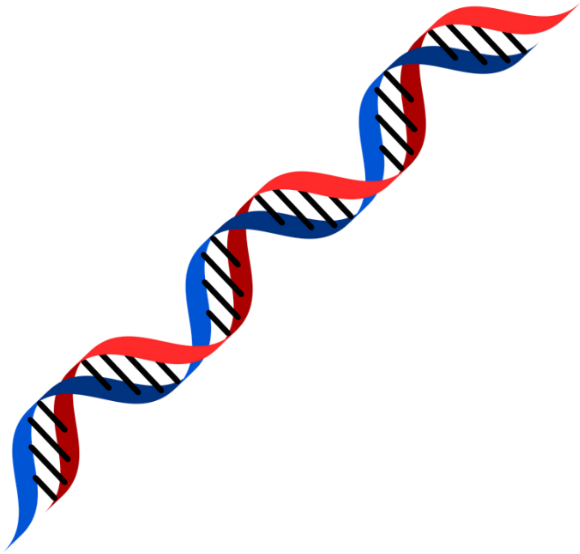


Figura 38. Struttura del DNA a doppia elica come metafora dell'interazione nel presente lavoro di tesi tra il linguaggio categoriale, rappresentato da una delle due eliche, e il linguaggio della didattica della matematica, rappresentato dall'altra.

Nell'immagine i tratti che collegano i due filamenti del DNA sono i legami a idrogeno che si instaurano tra le basi azotate che sono presenti sui filamenti; nel nostro caso essi corrispondono alle interpretazioni/modellizzazioni.
Parlando di modellizzazione/interpretazione in riferimento alla metodologia qui adottata riteniamo che sia importante esplicitare in dettaglio che cosa intendiamo con tali termini, dato che il loro significato è lasciato spesso solo a livello intuitivo. Per fare ciò esporremo prima due modalità differenti di intendere tali termini e poi spiegheremo, sulla base di un esempio classico della storia della matematica, il problema dei ponti di Königsberg, in che cosa consiste il nostro ricorso a questa terminologia.

### 11. 1. 1. Modelli e interpretazioni

Del termine "modello" esistono due significati in un certo senso opposti nelle scienze in generale e in logica matematica. Infatti, per esprimere il significato generale di questo termine nelle scienze possiamo citare la seguente caratterizzazione tratta dall'enciclopedia Treccani: "un modello matematico è un insieme di enti e relazioni matematiche che consente di descrivere in forma semplificata e controllabile i fenomeni che caratterizzano un sistema in genere complesso"[217] (Treccani, n. d.). Si tratta dunque di costruire una "controparte" matematica, di solito semplificata, di un fenomeno che appartiene a un altro ambito della scienza (si pensi p. e. ai modelli matematici in fisica, in biologia, in economia etc.). In questo ambito l'*interpretazione* riguarda l'interpretazione dei risultati astratti, ottenuti tramite il modello matematico, nell'ambito della rispettiva scienza. In tale modo di procedere è dunque fondamentale l'individuazione delle variabili in gioco e delle relazioni che intercorrono tra esse, in maniera tale che il risultato matematico ottenuto consenta poi un'interpretazione appropriata di tali risultati nel contesto, attraverso una loro decodifica nel linguaggio dell'ambito scientifico specifico.

D'altro canto, in logica matematica si intende per "modello" (di una teoria o anche solo di una formula ben formata, *fbf*)[218] un linguaggio in cui essa è interpretabile. Si tratta dunque in un certo senso di trovare un "contesto" in cui una teoria (o una *fbf*) può "vivere", in quanto un modello consente di fornire alla teoria, intesa come sistema formale,[219] una semantica. Fornire una semantica a un sistema formale significa interpretare le formule della teoria attraverso una funzione di interpretazione che associa a ciascuna delle sue *fbf* un valore di verità appartenete a un insieme di tali valori la cui cardinalità è maggiore o uguale a 2. L'*interpretazione* in questo caso consiste dunque nello stabilire la modalità di assegnazione di valori di verità.

Nel corso del presente lavoro noi useremo i termini "modellizzazione" e "interpretazione" in un senso che non coincide pienamente né con l'uno né con l'altro modo di intenderli esposti in precedenza, pur attingendo a entrambi.

Da un lato noi diremo che *interpretiamo* un *modello* matematico nel momento in cui proponiamo un frammento di teoria matematica (in questo caso un frammento della teoria delle categorie), che chiamiamo appunto "modello", associando alle relazioni in tale modello, espresse in un linguaggio astratto diagrammatico, un significato nel linguaggio discorsivo della didattica della matematica.

Questo modo di procedere assomiglia a quello in cui si procede in logica matematica, ma nel nostro caso il frammento di teoria non è un sistema formale e quindi l'interpretazione non può consistere in un'assegnazione di valori di verità agli enunciati. L'interpretazione nel nostro caso consiste nella messa in corrispondenza di elementi del linguaggio astratto categoriale con elementi del linguaggio della didattica della matematica come disciplina. In questo modo le

[217] Si noti che il termine "complesso" non significa che si sta parlando di un sistema complesso per come esso viene inteso in fisica, ma che tale termine si riferisce al grado di complessità delle relazioni che lo definiscono. Questo non significa che un modello matematico non possa essere il modello matematico di un sistema complesso in senso fisico.

[218] Sul significato del termine "formula ben formata" si veda il paragrafo 9.3.2.2.

[219] Sul significato del termine "sistema formale" si veda ancora il paragrafo 9.3.2.2.

relazioni che valgono in teoria delle categorie potranno ottenere un'interpretazione nell'ambito della didattica della matematica.
D'altro canto, il nostro modo di procedere assomiglia a quello con cui si prosegue nell'elaborazione dei modelli matematici nelle scienze, in quanto noi stiamo in un certo senso re-interpretando un modello matematico che è stato costruito da noi (nel senso che sono stati scelti alcuni elementi di una teoria matematica in termini di definizioni e proposizioni) nel linguaggio della disciplina specifica a cui tale modello si riferisce. Ma in questo caso mancherebbe l'esplicitazione delle variabili prese in considerazione e delle relazioni tra esse, fase che dovrebbe precedere l'elaborazione del modello matematico, e non succederle. Tuttavia, possiamo affermare che "l'esplicitazione delle variabili in gioco" è avvenuta tramite la scelta degli elementi inseriti nel quadro teorico e che le relazioni tra essi sono stati discussi nel corso dell'esposizione di tale quadro.
Di seguito esemplificheremo il nostro ricorso ai termini *modello* e *interpretazione*, ricorrendo al famoso problema dei ponti di Königsberg[220] che riassumiamo brevemente.
Il fiume Pregel attraversa la città di Königsberg creando due isole, collegate tra di loro e con il resto della città da sette ponti. Si tratta di stabilire se è possibile compiere un percorso che attraversi ogni ponte una ed una sola volta.
Nell'immagine sottostante (Figura 39) riportiamo una mappa della città di Königsberg risalente all'anno 1652.


Figura 39. Mappa della città di Königsberg risalente all'anno 1652.

Come è ben noto Euler risolse il problema nell'anno 1636, dimostrando che non era possibile compiere un percorso come quello descritto nel testo del problema. Egli mostrò che le condizioni necessarie e sufficienti per la sua esistenza sono: (1)

[220] Oggi Königsberg si chiama Kaliningrad.

che su ciascuna delle parti in cui è suddivisa la città dal percorso del fiume si affacci un numero pari di ponti, se non è richiesto che il punto di partenza coincida con quello di arrivo oppure, se si vuole che il percorso parta e termini nello stesso punto; (2) che su due sole delle parti della città si affacci un numero dispari di ponti, mentre sulle altre tale numero sia pari.
Nel caso dei ponti di Königsberg nessuna delle due condizioni è soddisfatta, dato che il numero di ponti che si affacciano su ciascuna delle parti in cui è suddivisa la città dal percorso del fiume è dispari.
Ora, guardando la mappa della città (Figura 39) risulta piuttosto difficile anche solo individuare il numero di parti in cui il fiume suddivide la città. Nell'immagine sottostante (Figura 40) tali aree sono indicate con *A, B, C, D*.

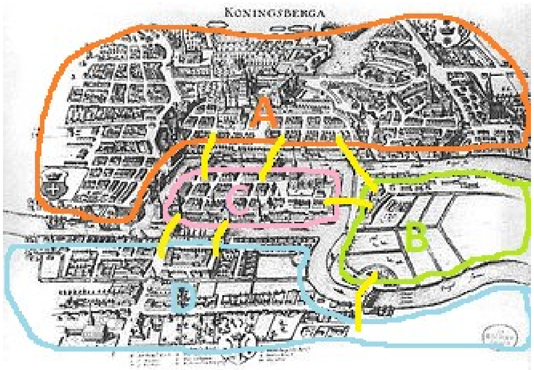



Figura 40. Le quattro parti in cui è suddivisa la città di Königsberg (A, B, C, D, rispettivamente in arancio, verde, rosa e azzurro) dal percorso del fiume Pregel e i sette ponti sul fiume (in giallo).

Individuare le quattro parti in cui è suddivisa la città dal fiume diventa più facile se si astrae da tutti gli elementi presenti nella mappa che sono ininfluenti per il problema (case, parchi, strade etc.), lasciando quindi in evidenza solo il percorso del fiume che suddivide la città e i ponti su esso (Figura 41).

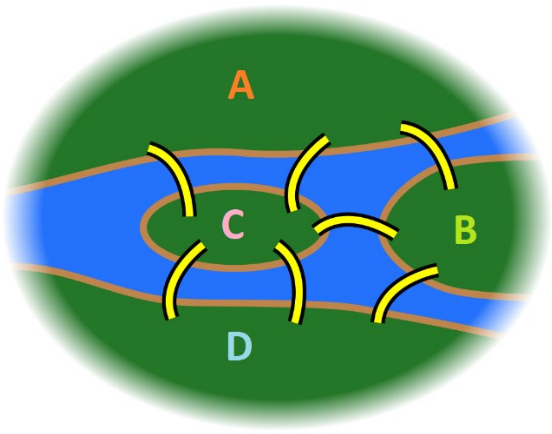



Figura 41. Schematizzazione del problema dei ponti di Königsberg: in blu il fiume, in verde le quattro parti in cui è suddivisa la città attraverso il percorso del fiume (A, B, C, D); in giallo i ponti.

La schematizzazione rappresentata nella Figura 41 può essere fornita astraendo ulteriormente dalla disposizione dei singoli elementi sulla mappa, tenendo conto solo degli aspetti topologici, cioè solo dei collegamenti tra essi. In questo modo si ottiene un grafo con quattro nodi (*A, B, C, D*) e sette archi, in cui i nodi *A, B* e *D* hanno grado 3, mentre il nodo *C* ha grado 5 (Figura 42).[221]

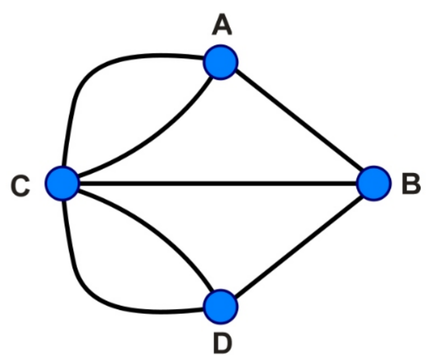



Figura 42. Grafo che modellizza il problema dei ponti di Königsberg.

[221] Ricordiamo che un grafo è una struttura costituita da un insieme di nodi (o vertici) e un insieme di collegamenti tra essi, detti archi (o spigoli). Il numero di archi che si connettono a un nodo si chiama grado del nodo. Se gli archi sono orientati, cioè se viene distinto tra nodo di partenza e nodo di arrivo di un arco, allora il grafo si dice orientato, in caso contrario il grafo si dice non orientato.

I grafi sono gli oggetti di studio della teoria dei grafi, una branca della matematica che affonda le proprie radici proprio nella risoluzione del problema dei ponti di Königsberg da parte di Euler.
Il grafo rappresentato nella Figura 42 è il modello del problema risolto da Euler, che trattò per primo la questione da un punto di vista formale. Oggi un percorso in un qualsiasi grafo si chiama *circuito euleriano* se consente di percorrere ogni nodo una e una sola volta, partendo da un nodo e tornando in esso. Partendo dal problema concreto, astraendo sempre di più, Euler giunse al modello matematico del problema che gli consentì di dimostrare il seguente teorema:
*Un grafo ha un percorso euleriano se e solo se ogni suo vertice è di grado pari.*
Se si lascia cadere la condizione che il percorso deve iniziare e terminare nello stesso nodo allora condizione necessaria e sufficiente affinché un qualsiasi grafo abbia un percorso che attraversi ogni nodo una e una sola volta è che in esso ci siano esattamente due nodi di grado dispari (che saranno i nodi iniziale e finale), mentre tutti gli altri devono essere di grado pari.
Quello che abbiamo descritto è un esempio di modellizzazione nel senso in cui ciò avviene nelle scienze. Ma, come abbiamo visto, oltre a modellizzare e risolvere il problema, Euler ha anche posto le basi per una teoria matematica astratta. Infatti, da allora in poi, il risultato astratto ottenuto da Euler e altri che da esso discendono o a esso si collegano, sono applicati nella modellizzazione di fenomeni in tantissimi ambiti: nelle neuroscienze, in economia, in informatica etc. Essi vengono usati sia come modelli sulla base dei quali costruire degli ambienti artificiali (per esempio i codici sorgente di reti internet) sia come modelli che consentono, attraverso la semplificazione che impongono, la spiegazione di fenomeni complessi reali (per esempio nel caso in cui si modellizzano i circuiti neuronali per poter studiare il loro funzionamento).
Noi ricorreremo agli strumenti categoriali nello stesso modo in cui oggi si usano gli strumenti appartenenti alla teoria dei grafi per modellizzare dei fenomeni complessi reali, con l'obiettivo di rendere evidenti le relazioni generali tra gli elementi coinvolti. Abbiamo mostrato attraverso l'esempio del problema dei ponti di Königsberg come il modello di un problema (il grafo) consente di individuare le relazioni che sono invarianti per un gruppo di problemi, i quali non sono immediatamente individuabili nella rappresentazione del problema nel suo contesto "naturale" (la mappa della città).
Nel nostro caso noi stiamo cercando di individuare le caratteristiche del modello matematico del quadro teorico nel quale possono essere soddisfatti i criteri evidenziati nella prima parte della tesi, al fine di verificare se è possibile fornire in esso una definizione generale di oggetto matematico specifico della didattica della matematica; questo è dunque il nostro "problema dei ponti di Königsberg". La teoria delle categorie è per noi ciò che la teoria dei grafi è per il problema dei ponti di Königsberg. Il nostro modo di procedere nel presente capitolo corrisponde alla prima schematizzazione del problema dei ponti, un risultato intermedio, non

finale, che però consente di individuare gli elementi e le relazioni che sono determinanti per il problema, cioè le “variabili in gioco”.
D’altra parte, così come il teorema dimostrato da Euler non parla di ponti, aree della città e di numero di ponti che si affacciano su esse, ma di oggetti astratti (nodi, archi e gradi di nodi) e per essere considerato una soluzione del problema dei ponti di Königsberg deve essere interpretato nel contesto, così la nostra trattazione necessita di un’interpretazione nel linguaggio della didattica della matematica con la sua terminologia e le sue relazioni specifiche.
Come già anticipato, noi non intendiamo però fornire *prima* tutti gli strumenti matematici e solo *dopo* interpretare tutto nel linguaggio della didattica della matematica, ma vogliamo procedere per gradi, mostrando passo dopo passo, mentre esponiamo il modello matematico, le sue interpretazioni. Nella maggior parte dei casi queste interpretazioni sono funzionali all’obiettivo di fornire la definizione cercata, ma in alcuni casi ci sono anche interpretazioni che non sono strettamente connesse a tale obiettivo. Si potrebbe dire che queste interpretazioni sono dei “prodotti di scarto” della presente tesi che abbiamo comunque ritenuto importante riportare, anche come possibili spunti per successive ricerche.

### 11. 1. 2. Convenzioni metodologiche

Per maggiore chiarezza contraddistingueremo nel testo il passaggio all’interpretazione nel metalinguaggio con “►**Interpretazione**” e la sua fine con “◄”, mentre l’inizio della modellizzazione verrà contraddistinta con “►**Modellizzazione**” e la sua fine con “◄”.
Degli strumenti matematici discussi di seguito forniremo caratterizzazioni discorsive, la cui finalità sarà quella di consentire di cogliere la possibilità di un loro uso metaforico concettuale, in analogia con quello mostrato da Zalamea nella filosofia sintetica della matematica, ma anche delle definizioni tecniche nel linguaggio matematico.
Nella presentazione di ogni concetto trattato, proporremo dunque sia una descrizione concettuale, intuitiva (o sintetica) sia una definizione più tecnica (o analitica).

## 11. 2. Modelli e interpretazioni categoriali in didattica della matematica

Intuitivamente, in matematica una *categoria* è costituita da una classe di oggetti (che possono essere insiemi o altre strutture matematiche, come per esempio gruppi etc.) e una classe di morfismi[222] tra tali oggetti, che soddisfano alcuni assiomi di base: (1) esiste un morfismo identità per ciascun oggetto; (2) è definita un'operazione di composizione tra morfismi, la quale è associativa.

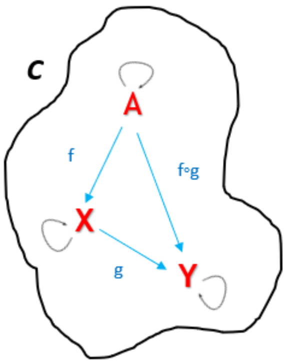



Figura 43. Rappresentazione di una categoria C composta da tre oggetti: A, X e Y.

Per esempio, nella categoria ***C*** rappresentata nell'immagine (Figura 43), $A$, $X$ e $Y$ sono gli oggetti, mentre $f$: $A \rightarrow X$ e $g$: $X \rightarrow Y$ sono rispettivamente il morfismo che ha come dominio l'oggetto $A$ e come codominio l'oggetto $X$ e il morfismo che ha come dominio l'oggetto $X$ e come codominio l'oggetto $Y$. In questo caso, dato che il codominio del morfismo $f$ coincide con il dominio del morfismo $g$, è possibile comporre i morfismi: $f \circ g$: $A \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$. Inoltre, per ogni oggetto è definito un morfismo identità, indicato nell'immagine dalle frecce che partono dall'oggetto e ritornano in esso.
Un aspetto interessante delle categorie risiede nel fatto che, dato che i morfismi sono mappe biunivoche, essi sono invertibili, cioè se esiste il morfismo $f$: $X \rightarrow Y$, allora esiste anche un morfismo $f^{1}$: $Y \rightarrow X$.
In matematica le categorie hanno importanza soprattutto in termini di interpretazione di relazioni tra strutture; infatti, se gli oggetti della categoria si pensano come delle strutture algebriche (p.e. gruppi, anelli etc.) e i morfismi tra tali oggetti si pensano come degli isomorfismi, una categoria si presenta come un oggetto matematico che può mettere in evidenza proprietà molto astratte in vari ambiti della matematica, visto che pone l'accento sulle relazioni piuttosto che sugli oggetti, come invece avviene nella teoria degli insiemi. Per questo motivo la teoria

[222] Notiamo che, se si considera il termine "morfismo" riferito al concetto di categoria in generale e non necessariamente al contesto matematico, esso non denota una qualche specifica relazione matematica, ma sta semplicemente per "relazione". In base al contesto in cui si applica il linguaggio categoriale, tali morfismi possono assumere caratteristiche diverse; la stessa cosa vale anche per gli oggetti della categoria.

delle categorie è stata vista spesso come una teoria che può fornire un linguaggio unificante per la matematica, nel quale la teoria degli insiemi rappresenta una particolare categoria anche se, come sottolinea Peruzzi (2005), alcune applicazioni (per esempio quelle in ambito informatico) non sono neutre rispetto al linguaggio matematico adottato per la definizione degli oggetti coinvolti.
Una definizione più formale di categoria è la seguente, che traiamo da Zalamea (2021, p. 166):

> **Definizione 1.** Una *categoria* $C$ si definisce mediante i seguenti dati e assiomi. *Dati*: (i) una classe di oggetti $Ob(C)$ (che può essere una classe propria, nel senso della teoria delle categorie NBG, von Neumann-Bernays-Gödel; se è un insieme, la categoria si dice *piccola*); (ii) per ogni $X$, $Y \in Ob(C)$, un insieme di morfismi $C(X,Y)$; (iii) per ogni $X \in Ob(C)$, un morfismo $id_x \in C(X,X)$; (iv) una operazione di composizione $\circ_C (= \circ)$ che agisce sui morfismi, $C(X, Y) \times C(Y, Z) \to C(X, Z)$: $(f, g) \mapsto g \circ f$. *Assiomi*: (v) gli insiemi dei morfismi sono disgiunti a due a due; (vi) $id_x$ agisce come identità per $\circ$ (cioè $f \circ id_x = id_x \circ f = f$); (vii) l'operazione di composizione è associativa (cioè, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.[223]

Data una categoria $\boldsymbol{C}$, possiamo definire il concetto di sottocategoria di $\boldsymbol{C}$.

> **Definizione 2.** Una categoria $K$ è *sottocategoria* di $C$ se $Ob(K) \subset Ob(C)$ e se $K(X,Y) \subset C(X,Y)$ $\forall$ $X,Y \in Ob(K)$. Inoltre, se si ha che $K(X,Y) = C(X,Y)$ allora $K$ è detta *sottocategoria piena* di $C$.

Data una categoria $\boldsymbol{C}$, la categoria che ha gli stessi oggetti, ma nella quale i morfismi sono invertiti, si chiama categoria duale di $\boldsymbol{C}$ e si indica con $\boldsymbol{C}^{op}$.
Più formalmente:

> **Definizione 3.** Data una categoria $C$, la sua *categoria duale* $C^{op}$ si definisce mediante una preservazione di oggetti (i) $Ob(C^{op}) = Ob(C)$ e di identità (ii) $(id_x)C^{op} = (id_x)C$, e mediante una inversione di morfismi (iii) $C^{op}(X,Y) = C(Y,X)$ (…), (iv) $g \circ_{C^{op}} f = f \circ_C g$. (Zalamea, 2021, p. 166)

Nella teoria delle categorie vale il cosiddetto *principio di dualità*, secondo cui una affermazione (proposizione) formulata in una categoria $\boldsymbol{C}$ dà luogo a un'affermazione (proposizione) duale nella categoria duale di $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}^{op}$.
La teoria degli insiemi può essere vista come una particolare categoria: la categoria degli insiemi *Set*, i cui oggetti sono insiemi e i cui morfismi sono funzioni tra essi. Come già evidenziato (Definizione 1) una categoria i cui oggetti costituiscono un insieme è detta *piccola*.
Introduciamo di seguito il concetto di *categoria prodotto* che ci servirà nella definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica.

> **Definizione 4.** Date due categorie $C$ e $D$, è possibile definire la *categoria prodotto* $C \times D$, i cui oggetti sono coppie ordinate di oggetti $(c, d)$ con $c \in Ob(C)$ e $d \in Ob(D)$,

---

[223] Possiamo notare come la teoria delle categorie si basa su pochissimi assiomi a differenza della teoria degli insiemi, il che rende la seconda più versatile e meno rigida della prima.

e i cui morfismi sono coppie ordinate di morfismi ($f_i$, $g_i$) con $f_i \in C(X_i,Y_i)$ e $g_i \in D(X_i,Y_i)$, con $i \in \mathbb{N}$ e in cui l'operazione di composizione è definita componente per componente, cioè: $(f_1,g_1) \circ (f_2,g_2) = (f_1 \circ' f_2, g_1 \circ'' g_2)$, con $\circ'$ e $\circ''$ operazioni di composizione in $C$ e in $D$, rispettivamente.

Date due categorie, è possibile pensare a una mappa che mandi una di esse nell'altra. Una tale mappa prende il nome di *funtore*. Un funtore $F$ è dunque una mappa tra due categorie che manda oggetti in oggetti e morfismi in morfismi.
In particolare, è possibile distinguere tra *funtori covarianti* [che preservano i morfismi identità e l'operazione di composizione di morfismi (Figura 44)] e *funtori contravarianti* [che preservano i morfismi identità, ma invertono i morfismi e di conseguenza la loro composizione (Figura 45)].

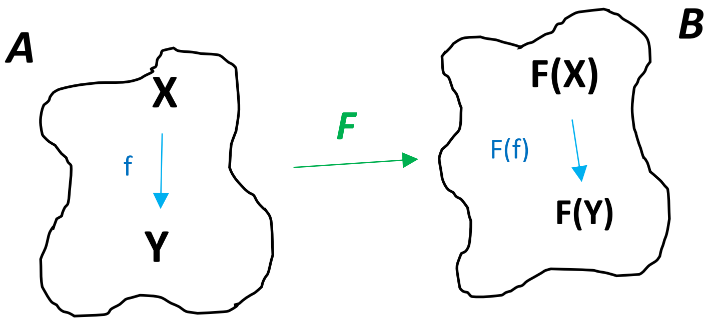



Figura 44. Schema che rappresenta il concetto di funtore covariante (F) tra due categorie A e B: il morfismo f: X → Y viene mappato da F nel morfismo F(f): F(X) → F(Y).

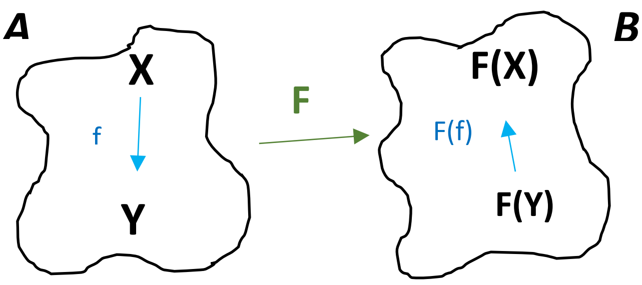



Figura 45. Schema che rappresenta il concetto di funtore contravariante (F) tra due categorie A e B: il morfismo f: X → Y viene mappato da F nel morfismo inverso F(f): F(Y) → F(X).

Più formalmente:

**Definizione 5.** Se $A$ e $B$ sono due categorie, un *funtore* $F$: $A \to B$ *covariante* tra $A$ e $B$ è una mappa da $Ob(A)$ a $Ob(B)$ tale che, per ogni $X$, $Y \in Ob(A)$, è definita l'applicazione $F_{X;Y}$: $A(X,Y) \to B(F(X), F(Y))$ , che manda ogni morfismo $f$: $X \to Y$ di $A$ in un morfismo $F(f)$: $F(X) \to F(Y)$ di $B$ e per la quale vale: $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ e $F(id_X) = id_{F(X)}$.
Se $A$ e $B$ sono due categorie, un *funtore* $F$: $A \to B$ *contravariante* tra $A$ e $B$ è una funzione da $Ob(A)$ a $Ob(B)$ tale che, per ogni $X$, $Y \in Ob(A)$ è definita l'applicazione $F_{X;Y}$: $A(X,Y) \to B(F(Y), F(X))$ , che manda ogni morfismo $f$: $X \to Y$ di $A$ in un morfismo $F(f)$: $F(Y) \to F(X)$ di $B$ e per la quale vale: $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ e $F(id_X) = id_{F(X)}$.

Un funtore particolare è il *funtore immersione*, la cui caratteristica consiste nel fatto che esso introduce le caratteristiche di una categoria all'interno di un'altra, creando in quest'ultima una sottocategoria che è una copia di quella di partenza, ma che acquisisce le caratteristiche della categoria di arrivo del funtore. Ricordiamo che un esempio classico di immersione di una struttura in un'altra è quello dell'immersione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$, dove la struttura di $\mathbb{N}$ è riprodotta in $\mathbb{Z}_0^+$.[224]

**Definizione 6.** Un funtore $F$: $C \to D$ è detto *immersione* se, dati $f_1, f_2 \in C(X,Y)$, da $F(f_1) = F(f_2)$ segue $f_1 = f_2$.

Per ora abbiamo visto due diverse tipologie di relazioni che vengono definite nella teoria delle categorie: i *morfismi*, che sono relazioni (dette anche "frecce") tra oggetti di una categoria, e i *funtori*, che sono mappe tra categorie.
Sorge spontanea la domanda se sia possibile definire delle relazioni tra funtori, cioè se è possibile pensare a una "traduzione" tra il modo in cui un funtore mappa gli oggetti e le frecce (morfismi) tra due categorie e il modo in cui un altro funtore compie tale mappatura. La risposta è affermativa: l'oggetto matematico che compie una tale "traduzione" è chiamato *trasformazione naturale* (Figura 46).

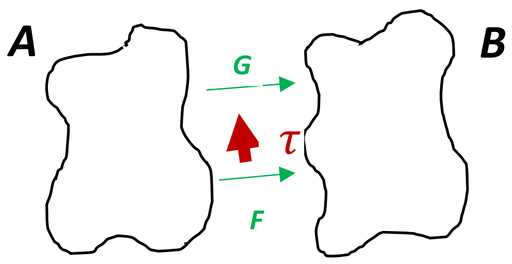



Figura 46. Schema che rappresenta il concetto di trasformazione naturale (τ), intesa come "traduzione" tra funtori (covarianti) tra le stesse categorie.

[224] Notiamo che spesso tale immersione viene impropriamente formulata in termini di inclusione tra insiemi numerici fornendo, anche in alcuni libri di testo, la scrittura errata $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Di seguito forniamo una definizione più formale di *trasformazione naturale*.

**Definizione 7.** Dati due funtori $F$, $G$: $C \to D$, una *trasformazione naturale* $\tau$: $F \Rightarrow G$ è una classe $N \subseteq D(X;Y)$ tale che $N=\{\tau_X: F(X) \to G(X) \mid X \in Ob(C)\}$. $\tau$ è "naturale" nel senso che induce un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\tau_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

secondo cui vale la seguente uguaglianza: $\tau_X \circ G(f) = F(f) \circ \tau_Y$.
Se $\forall X \in Ob(C)$ $\tau_X$ è un isomorfismo in $D$ allora $\tau$ è un *isomorfismo naturale*. Notiamo inoltre che si ha $id_\tau$: $F \Rightarrow F$.[225]

### ►Modellizzazione (1)

Nel paragrafo 10.10. abbiamo discusso il concetto di metafora, mettendo in evidenza il fatto che il nostro ricorso agli strumenti matematici è metaforico. Abbiamo anche anticipato il concetto di metafora strutturale (Pimm, 1981; Lolli, 2002b). Inoltre abbiamo messo in evidenza l'importanza del concetto di analogia in riferimento al concetto di metafora. Di seguito vogliamo caratterizzare il concetto di analogia in termini categoriali (D'Amore, 1974b). Sulla base di questa caratterizzazione illustreremo poi il concetto di metafora strutturale come immersione.
In questo caso, partiamo dunque da un concetto a cui si ricorre di frequente in didattica della matematica e cerchiamo di fornire un suo modello nel linguaggio categoriale.
Senza scendere nei dettagli tecnici, per i quali rimandiamo a D'Amore (1974b), possiamo affermare che la classe dei funtori covarianti $F_i(\boldsymbol{C};\boldsymbol{D})$ da una categoria $\boldsymbol{C}$ a una categoria $\boldsymbol{D}$ e dei funtori covarianti $F_j(\boldsymbol{D};\boldsymbol{C})$ dalla categoria $\boldsymbol{D}$ alla categoria $\boldsymbol{C}$, con $i, j \in \mathbb{N}$, costituisce, insieme alle trasformazioni naturali $A_{i;j}$ tra $F_i(\boldsymbol{C};\boldsymbol{D})$ e $F_j(\boldsymbol{D};\boldsymbol{C})$ come morfismi, una categoria.[226] Infatti, essendo le trasformazioni naturali biunivoche, è possibile definire un'operazione di composizione su di esse che è associativa; inoltre, per ogni trasformazione naturale è possibile definire una trasformazione naturale identità $id_{A_{i;j}}$ che manda il suo funtore dominio in sé stesso.

[225] L'ultima frase della definizione afferma in sostanza che un isomorfismo naturale è una trasformazione naturale invertibile.
[226] Ricordiamo che le trasformazioni naturali sono relazioni biunivoche e che quindi nell'insieme $\{A_{i;j}\}$ sono comprese tutte le trasformazioni biunivoche tra $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$.

L'insieme $\{A_{i;j}\}$ delle trasformazioni naturali così caratterizzate è un'analogia tra i morfismi delle categorie ***C*** e ***D***. Essa corrisponde a un isomorfismo strutturale tra le categorie ***C*** e ***D***, come mostrato da D'Amore (1974b), il che coincide con quanto messo in evidenza da Pimm (1981), cioè con il fatto che un'analogia è una corrispondenza (nel nostro caso espressa tramite il concetto di trasformazione naturale) tra due rapporti (nel nostro caso ogni morfismo al quale viene applicata la trasformazione naturale può essere inteso come rapporto tra due oggetti, eventualmente coincidenti, della stessa categoria).

> **Definizione 8**. Date due categorie $C$ e $D$, un'*analogia* è una categoria che ha come oggetti i funtori covarianti $F_i(C;D)$ e $F_j(D;C)$, con $i, j \in \mathbb{N}$, e come morfismi l'insieme delle trasformazioni naturali $A_{i;j}$ che mappano tra $F_i(C;D)$ e $F_j(D;C)$.

Quanto appena esposto vale nel caso in cui le classi dei morfismi delle categorie ***C*** e ***D*** sono equipotenti. Nel caso in cui questo non avviene, si può però pensare a un'analogia tra una sottocategoria di ***C*** e ***D***, se $|\boldsymbol{C}(X;Y)|>|\boldsymbol{D}(X;Y)|$ (o tra una sottocategoria di ***D*** e ***C***, se $|\boldsymbol{D}(X;Y)|>|\boldsymbol{C}(X;Y)|$). In tale caso si avrebbe dunque un'analogia che è parziale poiché un funtore tra ***C*** e ***D*** non trasforma *tutti* i morfismi di ***C*** in morfismi di ***D*** (o viceversa). Tuttavia, dato che una sottocategoria ***K*** di ***C*** è comunque una categoria, i funtori covarianti tra ***K*** e ***D*** costituiscono comunque una categoria, insieme alle rispettive trasformazioni naturali intese come morfismi.
Consideriamo il caso $|\boldsymbol{D}(\mathrm{X;Y})|>|\boldsymbol{C}(\mathrm{X;Y})|$ e un funtore immersione $F$: $\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{D}$. Tale funtore immerge la struttura della categoria ***C*** nella categoria ***D*** creando in essa una sottocategoria ***K*** che ha la struttura di ***C*** ma che acquisisce tutte le caratteristiche di ***D*** in quanto sua sottocategoria. Tramite il funtore $F$ ogni relazione tra due morfismi in ***K***, $F(f_1)=F(f_2)$ corrisponde a una relazione tra i rispettivi morfismi in $\boldsymbol{C}, f_1, f_2 \in \boldsymbol{C}(X,Y)$.

> **Definizione 9**. Siano $C$ e $D$ due categorie e sia $F$: $C\to D$ un funtore covariante tra $C$ e $D$. Se esiste $K$ sottocategoria di $D$ tale che per ogni $F(*_1)$, $F(*_2) \in K(X,Y)$ per i quali vale $F(*_1) = F(*_2)$ vale $*_1=f_1$ e $*_2=f_2$, con $f_1, f_2 \in C(X,Y)$, allora $F$ è un'immersione e prende il nome di *metafora strutturale* di $C$ in $D$.

Una metafora strutturale è quindi un funtore immersione tra due categorie, di cui la prima è una sottocategoria di una categoria più ampia, mentre la seconda categoria è una copia di tale sottocategoria che si costruisce tramite l'applicazione del funtore immersione.
Il concetto di metafora strutturale ci serve per mettere in evidenza il senso in cui verranno usati gli strumenti matematici nel presente lavoro.
Supponiamo che sia possibile stabilire un'analogia tra due contesti che possono essere visti come delle categorie.[227] Nel presente capitolo tali categorie sono da un

[227] Ricordiamo che una categoria è una struttura "aperta", nel senso che non esiste una proprietà caratteristica che determini a priori quali oggetti vi appartengono e che possono entrare a far parte della classe di oggetti della categoria anche elementi che non ne facevano parte in precedenza.

lato un frammento della teoria delle categorie, dall'altro un frammento della didattica della matematica.
Questo caso è rappresentato nel diagramma in figura (Figura 47), dove la categoria ***C*** è un frammento di teoria delle categorie (***CT***) e ***D*** è un frammento della didattica della matematica (***Ddm***), per esempio in termini di un quadro teorico tratto da essa. Nell'individuare l'analogia tra ***C*** e ***D***, il fatto che esse siano sottocategorie di ***CT*** e ***Ddm***, rispettivamente, non è rilevante; questo fatto è rappresentato in figura attraverso il tratteggio dei contorni che rappresentano ***CT*** e ***Ddm***.
L'analogia si stabilisce supponendo che ci sia la possibilità di mettere in corrispondenza biunivoca gli oggetti e i morfismi delle rispettive categorie, in modo tale che l'insieme dei funtori tra esse formi, con le trasformazioni naturali tra quest'ultimi, una categoria, la categoria analogica. Questo aspetto verrà assunto senza ulteriori specificazioni, in quanto esso si realizza nel momento in cui si scelgono i frammenti delle categorie in maniera opportuna, in modo tale che vi sia una tale corrispondenza. In questo senso la composizione dell'insieme degli oggetti delle rispettive categorie rimarrà implicito, in quanto può variare secondo le esigenze, supponendo che l'analogia venga sempre mantenuta.

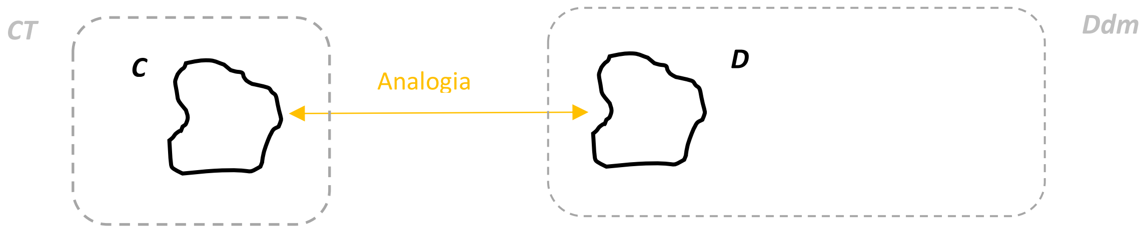



Figura 47. Analogia tra due categorie, C e D, che sono dei frammenti di due categorie differenti (per esempio teoria delle categorie: CT e didattica della matematica: Ddm).

Chiamiamo la categoria ***C***, quella relativa al frammento della teoria delle categorie, *categoria dominio* e chiamiamo la categoria ***Ddm***, cioè quella di cui il frammento della didattica della matematica *D* è una sottocategoria, *categoria codominio*.
Supposta l'esistenza dell'analogia strutturale tra le due categorie ***C*** e ***D*** (Figura 47), è possibile pensare un funtore immersione che immerga la categoria dominio ***C*** nella categoria codominio (***Ddm***) creando in essa una copia ***K*** di ***D*** che è una sottocategoria di ***Ddm*** (Figura 48).

---

Dunque, una categoria può includere un insieme di oggetti scelti secondo le esigenze, sia in riferimento al loro numero sia in riferimento alle loro caratteristiche.

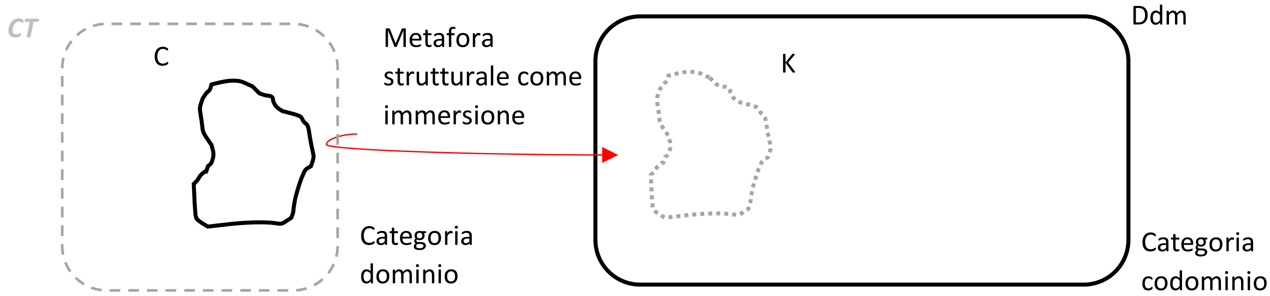



Figura 48. Uso metaforico di C in Ddm come risultato di un'immersione di C in Ddm, dove K (sottocategoria di Ddm) corrisponde a D.

Tale immersione è una metafora strutturale che consente di usare gli elementi della categoria dominio ***C*** reinterpretandoli nella categoria codominio ***Ddm***, in cui sono stati immersi. In questo caso, cioè quando si tratta non di un'analogia, ma di una metafora strutturale, l'appartenenza di ***K*** a ***Ddm*** è rilevante e questo fatto è rappresentato (Figura 48) tramite il tratto continuo del riquadro che raffigura ***Ddm***, mentre non è rilevante l'appartenenza di ***C*** a ***CT*** (riquadro tratteggiato).
Consideriamo per esempio una categoria generica come categoria dominio. Le sue caratteristiche concettuali, sulla base della Definizione 1, sono le seguenti: (1) essa consente di esprimere relazioni tra oggetti tramite i morfismi; (2) in essa è possibile comporre in maniera associativa le relazioni espresse dai morfismi. Dunque, ogni volta che in un contesto applicativo si presenta una situazione simile: (1') è possibile esprimere relazioni tra oggetti intesi in senso generale; (2') è possibile comporre tali relazioni in maniera associativa[228] sarà possibile stabilire un'analogia tra il frammento di teoria delle categorie coinvolto (categoria, funtore etc.) e un frammento corrispondente in didattica della matematica (o in filosofia della didattica della matematica).
Tale analogia garantirà la possibilità di immergere il frammento di teoria delle categorie coinvolto, che prenderà il nome di *categoria dominio*, nella categoria di cui il frammento di didattica della matematica (o di filosofia della didattica della matematica) rappresenta una sottocategoria; tale categoria più ampia sarà la categoria della didattica della matematica in generale e prenderà il nome di *categoria codominio*.[229]
Di conseguenza nella categoria della didattica della matematica (la categoria codominio) sarà possibile "lavorare" con i concetti categoriali interpretandoli

[228] Come è possibile notare, si tratta di condizioni molto generali che sono soddsfatte in numerosi e diversi contesti.
[229] Notiamo che la categoria più ampia sarà nel nostro caso, salvo altre specificazioni esplicite, la didattica della matematica in generale, in quanto la filosofia della didattica della matematica è in realtà una branca di quest'ultima.

nell'ambito della didattica della matematica attraverso il ricorso a una metafora strutturale, rappresentata dal funtore immersione.
Questo modo di usare gli strumenti matematici verrà chiamato *metaforico*.
◄

**►Interpretazione (1)**

Una trasformazione naturale consente una "traduzione" tra "modi di tradurre" espressi tramite due funtori. Un esempio relativo a un impiego del concetto di funtore e di trasformazione naturale in didattica della matematica potrebbe essere il seguente.
Se le diverse teorie in didattica della matematica si pensano come delle categorie, le varie strategie di *networking* di teorie (le coppie di strategie simili *comprendere e rendere comprensibile*, *comparare e contrastare*, *combinare e coordinare*, *integrare localmente e sintetizzare*)[230] (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008) possono essere viste come dei funtori tra tali categorie. Accanto alle strategie di networking di teorie si possono mettere in evidenza dei *criteri generali* di networking.
In questo senso una prospettiva (che potremmo chiamare *epistemologica*) è quella di natura strutturale, cioè basata su criteri relativi alla compatibilità tra i principi primi delle teorie (Radford, 2008b), nella quale tale compatibilità o comparabilità può essere anche solo parziale, dovuta al fatto che i domini delle teorie non sono completamente scollegati (si veda a titolo di esempio il confronto tra la teoria delle situazioni didattiche e la teoria dell'oggettivazione in Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori e Santi (2020a).
Un'altra prospettiva invece, che potremmo chiamare *ermeneutica*, potrebbe fare riferimento a criteri pragmatici di possibilità di "comunicazione"; si veda a tale proposito l'esempio di possibile networking tra teoria delle situazioni didattiche e teoria dell'oggettivazione in Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori e Santi (2020b), in cui si mette in evidenza la possibilità di convergenza delle attività legate ai concetti di una teoria (teoria delle situazioni didattiche) verso i principi dell'altra (teoria dell'oggettivazione).
Le trasformazioni naturali possano essere viste come modalità più generali di *classificazione delle strategie di networking* proposte in Prediger, Bikner-Ahsbahs e Arzarello (2008), sulla base della tipologia di "traduzione" a cui ricorrono.
◄

Un tipo di funtore fondamentale per la presente trattazione è il *funtore rappresentabile*. Per illustrare questo concetto ci serviamo di nuovo di una rappresentazione diagrammatica (Figura 49).

---

[230] Per maggiori dettagli su tali strategie di networking si veda il paragrafo 4.3.

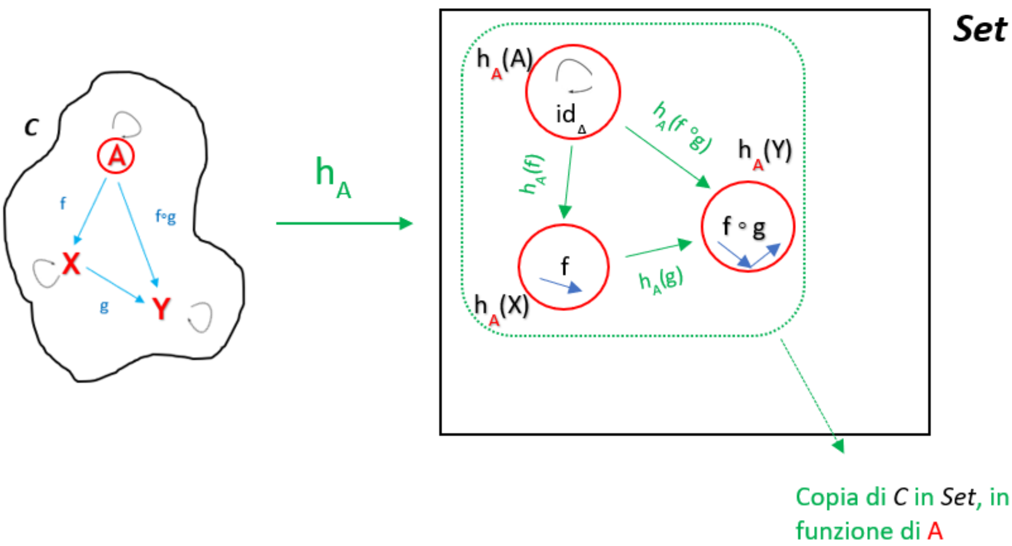



Figura 49. Rappresentazione del concetto di funtore rappresentabile: il funtore $h_A$ è rappresentato in Set tramite le frecce (cioè i morfismi) che “escono” dall’oggetto A.

Consideriamo una categoria piccola ***C*** (sulla sinistra nell’immagine) i cui oggetti sono $A$, $X$ e $Y$ e i cui morfismi sono $f$, $g$ e il morfismo composto $f\circ g$; consideriamo ora la categoria *Set* (rappresentata tramite il rettangolo sulla destra nell’immagine), i cui oggetti sono degli insiemi. Consideriamo infine un funtore covariante da ***C*** a *Set* che chiameremo $h_A$. Tale funtore mappa ogni oggetto della categoria ***C*** nell’insieme dei morfismi che “partono” da $A$ e “arrivano” nell’oggetto stesso. Per esempio: l’oggetto $A$ viene mappato nell’insieme $h_A(A)$, il cui unico elemento è il morfismo identità di $A$; l’oggetto $X$ viene mappato nell’insieme $h_A(X)$ il cui unico elemento è il morfismo $f$; infine, l’oggetto $Y$ viene mappato nell’insieme $h_A(Y)$, il cui unico elemento è il morfismo $f\circ g$. I morfismi di ***C*** vengono mappati da $h_A$ nei corrispondenti morfismi tra gli insiemi corrispondenti: il morfismo $f$ viene mappato nel morfismo $h_A(f)$: $h_A(A) \rightarrow h_A(X)$; il morfismo $g$ viene mappato nel morfismo $h_A(g)$: $h_A(X) \rightarrow h_A(Y)$; il morfismo $f\circ g$ viene mappato nel morfismo $h_A(f\circ g)$: $h_A(A) \rightarrow h_A(Y)$.
Se nel diagramma (Figura 49) si osserva la parte racchiusa dalla linea tratteggiata all’interno di *Set*, si può notare che essa ha la stessa struttura della categoria ***C***, ma che in essa gli oggetti di ***C*** non sono più presenti come tali, ma solo in termini di morfismi che esprimono le relazioni di un oggetto “prescelto” (in questo caso $A$) con tutti gli altri oggetti della categoria. In questo senso si dice che il funtore $h$ è rappresentato dall’oggetto $A$, scrivendo $h_A$. Lo stesso discorso potrebbe essere fatto anche partendo da un altro oggetto di ***C***, per esempio da $X$ o da $Y$. In questo

caso si otterrebbero i funtori rappresentabili $h_X$ e $h_Y$.[231] Essi forniscono un'immagine di ***C*** in *Set* in termini di relazioni tra *X* e tutti gli altri oggetti di ***C*** o in termini di relazioni tra *Y* e tutti gli altri oggetti di ***C***, rispettivamente.

**►Interpretazione (2)**

Dal punto di vista concettuale, il funtore rappresentabile coglie in termini matematici un concetto espresso di frequente sia in filosofia della matematica sia in didattica della matematica: il fatto che, almeno in una prospettiva pragmatica (D'Amore, 2001), il significato di un oggetto matematico non può essere limitato alla sua definizione [si vedano, a puro titolo di esempio, le posizioni di Lakatos (1976/1979), Peirce (1960), Rota (1973/1991), Thurston (1994), Zalamea (2009/2012a, 2021), per quanto riguarda la filosofia della matematica, e quelle di Balacheff (1995), Balacheff e Gaudin (2009), D'Amore (2001), D'Amore, Fandiño Pinilla e Sbaragli (2017), Ernest (1991/2004, 2012), Godino e Batanero (1998), Godino, Batanero e Font (2007), Sfard (2008), Lavie Steiner e Sfard, 2019; Scheiner (2016), Simon (2017), Tall (2013), Vergnaud (1990), per quanto riguarda la didattica della matematica o la filosofia della didattica della matematica].
*Il concetto di funtore rappresentabile consente di esprimere il fatto che un oggetto (matematico) può essere interpretato attraverso (o sostituito da) le sue relazioni con il contesto, dove il contesto è costituito dalle relazioni con gli oggetti di una categoria a cui l'oggetto appartiene.*
*Detto diversamente: la conoscenza pragmatica dell'oggetto, che si esprime attraverso la sua conoscenza in contesto, è una conoscenza potenzialmente completa dell'oggetto.*
Questa posizione è espressa chiaramente in due posizioni pragmatiste di frequente adottate in didattica della matematica e più volte evidenziate nel corso della trattazione: quella di Wittgenstein (1953/2003), secondo cui il significato di un oggetto è dato dall'uso del termine che lo designa nel linguaggio dei giochi linguistici propri di un dato contesto; quella di Peirce (1960), secondo la cui massima pragmatica è l'insieme degli effetti pratici che il concetto (di un dato oggetto) produce realmente o anche potenzialmente, a costituire il suo significato. Pur con le necessarie distinzioni (Wittgenstein si posiziona in una prospettiva puramente linguistica, in cui la matematica è vista come un gioco linguistico, mentre Peirce si posiziona in una prospettiva semiotica generale, in cui il linguaggio non ha il ruolo centrale che ha in Wittgenstein), si tratta di due posizioni

[231] Naturalmente non è detto che ogni oggetto di una categoria sia adatto per rappresentare un funtore nel modo descritto; infatti, in un caso pratico si tratterebbe di scegliere un'opportuna categoria che permetta di studiare un dato oggetto, che sarà dunque "l'oggetto prescelto" per rappresentare il funtore. In senso metaforico, questo è ciò che avviene quando si costruisce una certa situazione (didattica, ma ancora di più a-didattica) nell'ambito della teoria delle situazioni didattiche (Brousseau, 1997) o quando si progetta un campo di esperienza (Boero, Dapueto, Ferrari, Ferrero, Garuti, Lemut, Parenti, & Scali, 1995).

chiaramente pragmatiche (o pragmatiste) del significato ed entrambe mettono l'accento sull'interpretazione del significato in termini di uso in contesto (reale o potenziale). L'uso di un oggetto (o gli effetti pratici che esso può produrre) sono pensabili solo attraverso le sue relazioni con altri oggetti ed è proprio questo aspetto che può essere interpretato in termini di *funtore rappresentabile*.
*Il resto del capitolo consente di fornire la prova, attraverso il ricorso agli strumenti matematici categoriali, della fondatezza gnoseologica della tesi pragmatista sul significato, secondo cui la conoscenza in contesto è una conoscenza potenzialmente completa dell'oggetto.*

◀

Nella prospettiva fin qui delineata, l'oggetto non è più un oggetto "in sé", ma diventa un oggetto "nell'altro" (Zalamea, 2009/2012a, p. 181), cioè esso diventa un riflesso di relazioni con altri oggetti, espresse da un insieme di morfismi. L'insieme di tali morfismi, cioè l'insieme delle relazioni dell'oggetto con il contesto, costituisce quella che Zalamea chiama "l'aura" dell'oggetto (Zalamea, 2021, p. 164).
Ricordiamo che Zalamea (2009/2012a) chiama il modo di conoscere un oggetto studiando la sua composizione, *analitico* (l'oggetto viene studiato come oggetto in sé, cioè tramite l'analisi delle sue componenti) e il modo di conoscerlo studiandolo in contesto, *sintetico* (l'oggetto viene studiato attraverso le sue interazioni con l'ambiente).

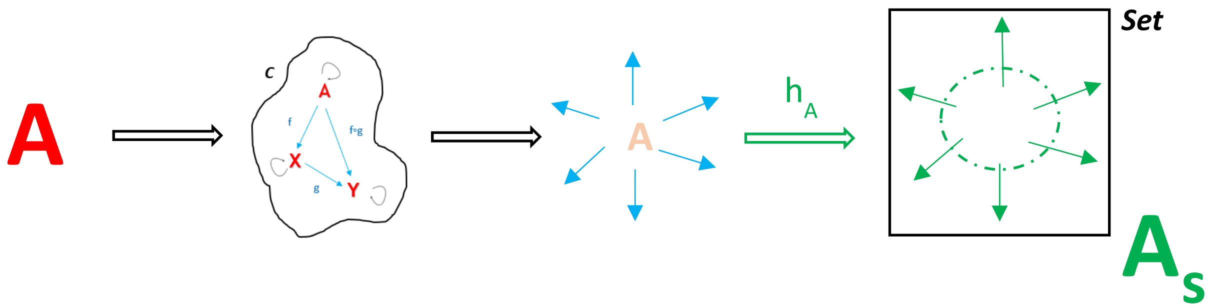



Figura 50. Rappresentazione del concetto di funtore rappresentabile: il funtore $h_A$ è rappresentato in Set tramite le frecce (cioè i morfismi) che "escono" dall'oggetto A.

Nell'immagine in figura (Figura 50) abbiamo rappresentato schematicamente il concetto di *aura* di un oggetto: l'oggetto **A**, inteso in senso analitico, come oggetto in sé, viene considerato come facente parte di una categoria insieme ad altri oggetti che rappresentano il suo contesto (***C***); esprimendo le relazioni in ***C*** in funzione di

$A$ attraverso un funtore rappresentabile ($h_A$) tra $\boldsymbol{C}$ e *Set*, l'oggetto inteso in senso analitico "scompare" come oggetto di conoscenza ($A$), lasciando posto ai morfismi che esprimono le sue relazioni con l'ambiente ( ). L'insieme di tali morfismi è l'oggetto di conoscenza inteso in senso sintetico (**$A_S$**). Le frecce azzurre rappresentano i morfismi in $\boldsymbol{C}$, mentre le frecce verdi rappresentano la copia di **C** in *Set*, dove anche gli oggetti sono dei morfismi.
Per fornire una definizione più formale di funtore rappresentabile, è necessario premettere il concetto di *hom-funtore covariante*.

> **Definizione 10.** Sia $C$ una categoria. Un *hom-funtore covariante* rappresentato da un oggetto $A \in Ob(C)$ è il funtore: $C(A, -)$: $C \to Set$, definito come segue: $C(A, -)(X) = C(A, X)$ per ogni $X \in Ob(C)$; se $f \in C(X, Y)$ si pone $C(A, f) = C(A,-)(f) = C(A, X) \to C(A, Y)$ l'applicazione $C(A, f)\ (g\colon A \to X) = f \circ g\colon A \to Y$.
> In maniera analoga si definisce il concetto di *hom-funtore contravariante* $C(- , A)$: $C^{op} \to Set$.[232] La categoria i cui oggetti sono gli hom-funtori contravarianti da $C^{op}$ a *Set* è detta *categoria di prefasci su* $C^{op}$ *a valori in Set* e tali funtori sono detti *prefasci*.

> **Definzione 11.** Un *funtore* $F$: $C \to Set$ si dice *rappresentabile* se esiste un oggetto $A \in Ob(C)$ e un isomorfismo naturale $\tau$: $F \Rightarrow C(A, -)$. La coppia $(A, \tau)$ si dice *rappresentazione di F*.
> Se $h_A$ è un funtore (covariante) rappresentabile da un oggetto $A$, allora il funtore contravariante rappresentabile da $A$ è il funtore $h^A$: $C^{op} \to Set$.

Dunque, un funtore $F$ è rappresentabile da un oggetto $A$ e da una trasformazione naturale $\tau$ da tale funtore verso l'insieme dei hom-funtori covarianti $\boldsymbol{C}(A, -)$, se la trasformazione naturale è invertibile. Si potrebbe dire che $h_A$ esiste se è possibile "tradurre" in maniera univoca il modo con cui un funtore mappa da $\boldsymbol{C}$ a *Set* nell'immagine che esso dà di un oggetto particolare di $\boldsymbol{C}$ in Set e viceversa.

## ►Interpretazione (3)

Tornando alle considerazioni fatte in precedenza riguardo alle due modalità, *analitica* e *sintetica*, di studiare un oggetto, esse possono essere intese come due modalità diverse di attribuire significato all'oggetto: la prima di stampo realista, la seconda di stampo pragmatico (D'Amore, 2001); oppure la prima di stampo realista, la seconda di stampo idealista (Zalamea, 2009/2012a).
*In questo contesto noi assumiamo che un funtore modellizza l'attribuzione di significato all'oggetto in senso pragmatista.*
*Questa è la prima assunzione interpretativa di base. Diventa dunque possibile prendere in considerazione anche una modellizzazione dell'acquisizione di conoscenza attraverso gli strumenti matematici che stiamo esponendo qui.*

---

[232] Facciamo notare che la categoria *Set* può variare sia su $\boldsymbol{C}$ sia su $\boldsymbol{C}^{op}$ e che se non espressamente specificato, il significato di *Set* come $Set^C$ o come $Set^{C^{op}}$ si intenderà determinato dal contesto, sulla base delle esigenze di componibilità dei morfismi.

*Introduciamo una seconda ipotesi interpretativa di base, cioè che "attribuire significato" coincide con "conoscere" e che "avere la possibilità di accedere al significato" coincide con "avere la possibilità di conoscere".*
Il concetto di funtore rappresentabile coglie la modalità di attribuzione di significato pragmatico e, sotto la seconda assunzione di base, anche l'acquisizione di conoscenza tramite l'attribuzione di significato, ma non fornisce di per sé garanzie sull'effettiva conoscibilità dell'oggetto per via sintetica. Quest'ultimo aspetto è assicurato da un importante risultato della teoria delle categorie: il Lemma di Yoneda, nonché dalla cosiddetta *immersione di Yoneda*.

◄

Facendo riferimento all'esempio di categoria su cui abbiamo ragionato finora, il Lemma di Yoneda afferma che vi è una corrispondenza biunivoca tra (i) l'insieme delle trasformazioni naturali tra un qualsiasi funtore $F$ e il funtore rappresentabile $h_A$ e (ii) le immagini dell'oggetto $A$ secondo il funtore $F$.

**►Interpretazione (4)**

Detto diversamente, supposto che l'azione del funtore venga identificata con l'attribuzione di significato (prima assunzione di base), è possibile dimostrare, attraverso il Lemma di Yoneda, che le modalità di passaggio tra l'attribuzione di significato a un oggetto $A$ in contesto (trasformazioni naturali tra $h_A$ e un funtore $F$) e le modalità di attribuzione di significato ad $A$ (azione di $F$) stanno in rapporto uno a uno (corrispondenza biunivoca tra le trasformazioni naturali da $h_A$ a $F$ da un lato, e $F(A)$ dall'altro).[233]
*Possiamo dunque affermare che, per il Lemma di Yoneda, sotto la prima assunzione interpretativa di base, l'insieme delle relazioni in contesto di un oggetto corrispondono al suo significato.*
Inoltre, se si tiene presente che il contesto rappresentato dalla categoria ***C*** può variare (una categoria non è, come già evidenziato, una struttura chiusa rispetto a una proprietà caratteristica, come invece è un insieme), diventa possibile considerare la generazione di nuove relazioni che sorgono e attraverso le quali si manifestano nuovi significati legati all'oggetto.
*Per mostrare che la modalità pragmatica di attribuzione di significato consente di conoscere effettivamente l'oggetto, nel senso che garantisce (in senso gnoseologico, non necessariamente effettivo) la possibilità di accesso a tutte le possibili attribuzioni di significato, dobbiamo fare riferimento all'immersione di Yoneda.*

◄

[233] Torneremo in seguito con maggiori dettagli tecnici sia sul Lemma di Yoneda sia sull'immersione di Yoneda, che qui anticipiamo solo per rendere più fluido il ragionamento interpretativo.

La cosiddetta *immersione di Yoneda* è un funtore rappresentabile contravariante da $\boldsymbol{C}^{op}$ a *Set* il cui ruolo fondamentale per noi risiede nel fatto che esso è in grado di far emergere dei prefasci (funtori covarianti da $\boldsymbol{C}^{op}$ a *Set*) che rendono la categoria *Set* completa, in quanto contiene tutti i limiti di ogni categoria piccola, come verrà mostrato in seguito.

## ►Interpretazione (5)

Dunque, se l'insieme dei prefasci è interpretato come l'insieme delle possibili modalità di attribuzione di significato all'oggetto $A$, allora l'immersione dell'oggetto nel contesto è in grado di far emergere *tutte le possibili* attribuzioni di significato, in maniera tale da rendere "completa" la conoscenza di $A$.
*Attraverso l'immersione di Yoneda è quindi possibile dimostrare, sotto le due assunzioni interpretative di base, che tramite l'attribuzione pragmatica di significato all'oggetto, cioè attraverso la sua conoscenza in contesto, è possibile accedere a tutti i significati dell'oggetto e quindi conoscerlo completamente.*
◄

Prima di procedere con la dimostrazione del Lemma di Yoneda, premettiamo la definizione di funtore pieno (e fedele), nonché un risultato relativo alle condizioni necessarie e sufficienti affinché un funtore di inclusione di una sottocategoria nella rispettiva (meta-) categoria sia pienamente fedele.

**Definizione 12.** Un *funtore* $F$: $C \rightarrow D$ si dice *pieno* (*fedele*) se le funzioni $F_{X,Y}$: $C(X,Y) \rightarrow D(F(X), F(Y))$ sono suriettive (iniettive). Un *funtore* che è sia pieno sia fedele è detto *pienamente fedele*.

**Proposizione 1.** Se $K$ è sottocategoria di $C$, il *funtore* di inclusione $F_I$: $K \rightarrow C$ è *pieno e fedele* se e solo se $K$ è sottocategoria piena di $C$.

**Dimostrazione.** □ Se $K$ è sottocategoria piena di $C$ allora si ha $K(X,Y) = C(X,Y)$ per definizione e quindi le funzioni $F_{X,Y}$: $K(X,Y) \rightarrow C(F(X), F(Y))$ sono biiettive e di conseguenza suriettive, il che significa che $F_I$ è pieno, nonché iniettive, il che significa che $F_I$ è fedele; quindi $F_I$ è pienamente fedele. Viceversa, se $F_I$ è pieno e fedele allora è pienamente fedele e quindi le funzioni $F_{X,Y}$: $K(X,Y) \rightarrow C(F(X), F(Y))$ sono sia suriettive sia iniettive e dunque biiettive. Inoltre, $K$ è sottocategoria di $C$ per ipotesi. Essendo $K$ sottocategoria di $C$ e il funtore di inclusione di $K$ in $C$ una biiezione, $K$ è sottocategoria piena di C. ■

Enunciamo dunque il Lemma di Yoneda (covariante).[234]

**Proposizione 2.** (Lemma di Yoneda). Sia $F$: $C \to Set$ un funtore (covariante) e sia $A \in Ob(C)$. Vi è una corrispondenza biunivoca $y$: $Nat(h_A, F) \to F(A)$ tra l'insieme delle trasformazioni naturali $h_A \Rightarrow F$ e l'insieme $F(A)$.

**Dimostrazione.** □ Se $\tau$: $h_A \to F$, poniamo $x = \tau_A(id_A)$ e definiamo $y(\tau) = x$.
Dal diagramma commutativo si ha che per ogni $f \in C(A, X)$ si ha $\tau_X(f) = F(f)(x)$

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{h}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) \arrow[r, "\sigma_X"] \arrow[d, "\boldsymbol{h}_{\mathrm{A}}(g)"'] & F(\mathrm{X}) \arrow[d, "F(\mathrm{g})"] \\ \boldsymbol{h}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Y}) \arrow[r, "\sigma_Y"'] & F(\mathrm{Y}) \end{tikzcd}$$

Fissato un elemento $x \in F(A)$ si può costruire la funzione:

$\sigma_X$: $h_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) \to F(\mathrm{X})$, $\sigma_Y(f) = F(f)(x)$.

$(\sigma_X)_{X \in C}$ è una trasformazione naturale $h_A \Rightarrow F$, poiché per $g \in C(X,Y)$ si ha che il diagramma

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{h}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "\boldsymbol{h}_{\mathrm{A}}(f)"'] & F(\mathrm{A}) \arrow[d, "F(f)"] \\ \boldsymbol{h}_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}) \arrow[r, "\tau_X"'] & F(\mathrm{X}) \end{tikzcd}$$

è commutativo, dato che
$(F(g) \circ \sigma_Y)(f) = (F(g) \circ F(f))(x)$, mentre $(\sigma_Y(f) \circ h_A(g))(x) = F(g \circ f)(x)$. ■

[234] Notiamo che, data l'invertibilità dei morfismi in una categoria, è possibile prendere in considerazione la versione duale del Lemma di Yoneda e la rispettiva versione duale dell'immersione di Yoneda, uno con la varianza opposta rispetto all'altro.

Ora, se $\boldsymbol{C}$ è una categoria arbitraria e *Set* è la categoria[235] i cui oggetti sono i funtori contravarianti $\boldsymbol{C}^{op} \rightarrow Set$ (detti prefasci) e i cui morfismi sono le trasformazioni naturali $Set(F, G) = Nat(F,G)$, dove $F$ e $G$ sono due funtori contravarianti da $\boldsymbol{C}^{op}$ a *Set*, il funtore contravariante $z$: $\boldsymbol{C}^{op} \rightarrow Set$, con la caratteristica che per ogni $X \in Ob(\boldsymbol{C})$ e per ogni $f \in \boldsymbol{C}(X,Y)$ si ha: $z(X) = \boldsymbol{C}(X,-)$ e $z(f) = f'$ prende il nome di *immersione di Yoneda* (contravariante). Per quanto dimostrato in precedenza tale funtore è iniettivo sugli oggetti e pienamente fedele.

L'immersione di Yoneda è quindi un'immersione della categoria duale di una categoria piccola $\boldsymbol{C}$ nella categoria *Set* dei funtori contravarianti (prefasci) da $\boldsymbol{C}^{op}$ a *Set*, tramite un funtore rappresentabile contravariante $h^A$ che crea una copia di $\boldsymbol{C}^{op}$ in *Set* (il funtore è pienamente fedele), esprimendo $\boldsymbol{C}^{op}$ in funzione di un oggetto $A$.

Al fine di rendere più facilmente comprensibile il significato dell'immersione di Yoneda, proponiamo una sua rappresentazione diagrammatica (*Figure 51-54*).

Immaginiamo di voler studiare un dato oggetto $A$ e di aver scelto un'opportuna categoria ($\boldsymbol{C}$) come il contesto di $A$ (Figura 51).

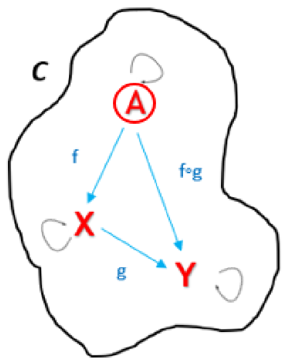



Figura 51. Categoria C con oggetto A che si intende studiare.

[235] In realtà *Set* non è una categoria in senso classico, cioè nel senso della definizione qui fornita (Definizione 1), dato che i suoi oggetti non sono classi proprie. Per ovviare a questo problema si può tuttavia considerare un'estensione del sistema di assiomi NBG al sistema di assiomi di Tarski-Grothendieck, il quale contiene il cosiddetto "Assioma dell'Universo", secondo cui una classe propria in un universo può essere considerata come insieme rispetto a un "meta-universo" del suo universo di riferimento. In testi classici come Mac Lane (1971/1998) per questo tipo di oggetto viene usato il termine "meta categoria".

Consideriamo ora la categoria duale di ***C***, cioè ***C****$^{op}$* (Figura 52).

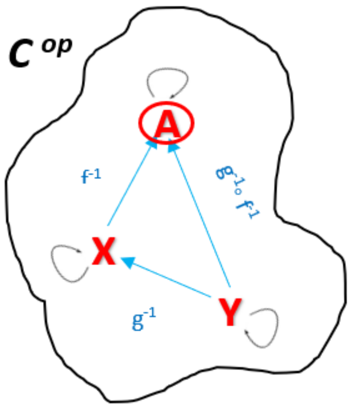



Figura 52. Categoria duale di C, $C^{op}$.

Consideriamo ora il funtore contravariante rappresentabile da *A* che mappa da ***C****$^{op}$* a *Set*, cioè $h^A$: ***C****$^{op}$*→*Set*. Tale funtore produce una copia di ***C****$^{op}$* in *Set*, in funzione di *A* (Figura 53).

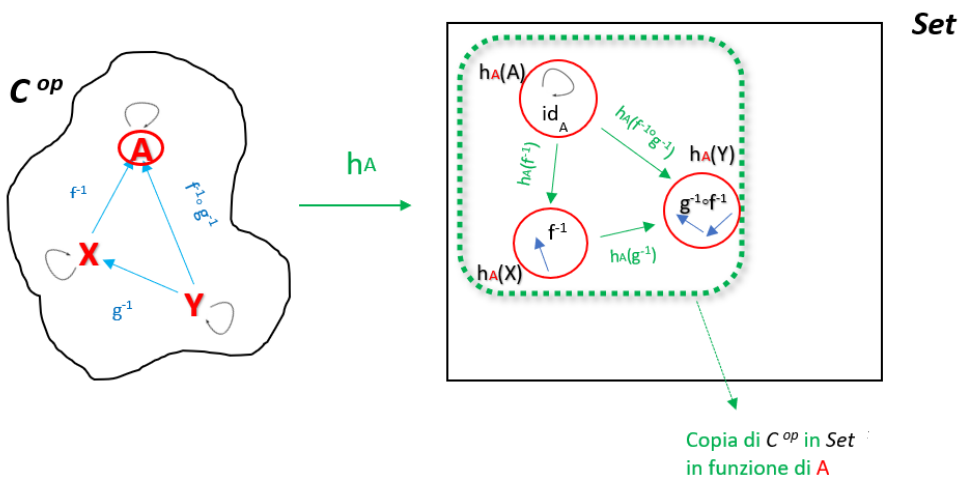



Figura 53. L'azione del funtore contravariante (o prefascio) rappresentabile $h^A$: $C^{op}$→Set.

Dato che $Set^C$ è la categoria dei prefasci da $\boldsymbol{C}$ a *Set*, cioè dei funtori contravarianti da $\boldsymbol{C}^{op}$ a *Set*, in *Set* lo stesso funtore $h^A$ è un oggetto di *Set*. Oltre a esso, in *Set* ci sono anche altri funtori contravarianti rappresentabili (p. e. $h^X$ e $h^Y$), ma anche dei funtori contravarianti (cioè prefasci) non rappresentabili da $\boldsymbol{C}^{op}$ a *Set*, che indichiamo nell'immagine con $F_1$, $F_2$, $F_3$, … (Figura 54), e che emergono grazie all'azione di $h^A$.

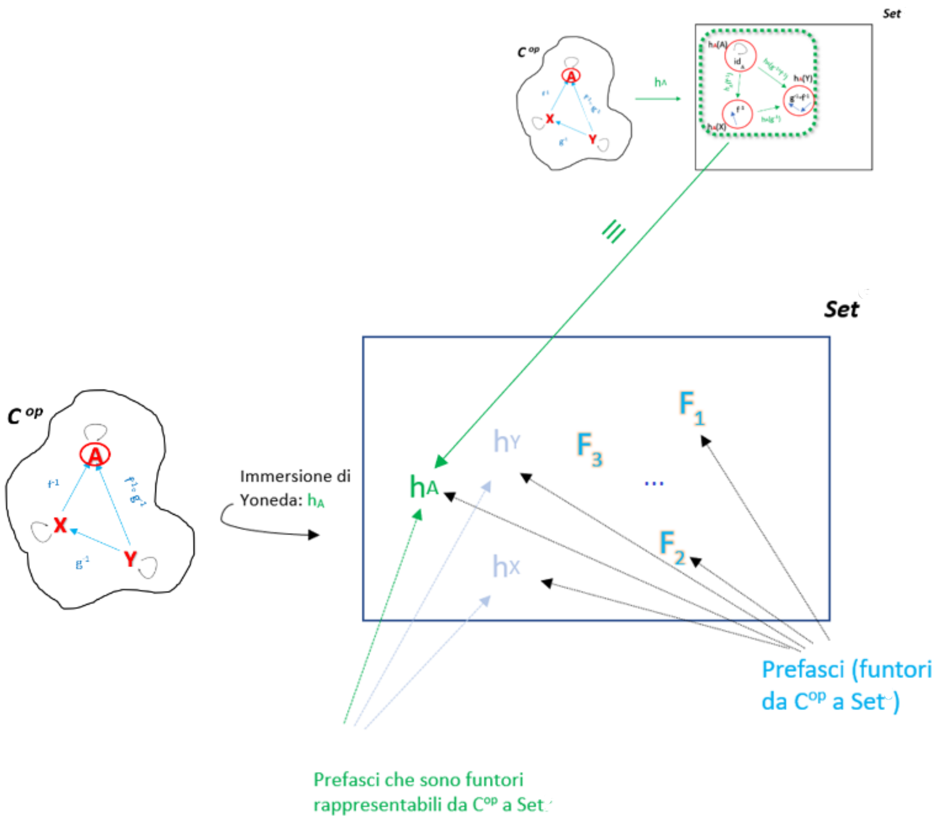



Figura 54. L'immersione di Yoneda di $C^{op}$ in Set, cioè $h^A$: $C^{op} \rightarrow$Set.

Il funtore $h^A$ prende il nome di *immersione di Yoneda*. Nel diagramma (Figura 54) esso è rappresentato sotto due aspetti diversi: una volta in termini di processo, cioè attraverso l'azione che compie su $\boldsymbol{C}^{op}$, immergendola in *Set* (azione simboleggiata dalla freccia ricurva posta tra le due categorie), e un'altra volta come oggetto della categoria *Set* (oggetto simboleggiato con $h_A$ all'interno del riquadro di *Set*). La categoria *Set* ha come oggetti i prefasci, cioè i funtori contravarianti da $\boldsymbol{C}^{op}$ a *Set*, e come morfismi le trasformazioni naturali tra essi.

Nel diagramma (Figura 55) le trasformazioni naturali sono rappresentate con le frecce colore bordeaux. Le frecce continue rappresentano le trasformazioni naturali tra i funtori rappresentabili, mentre le frecce tratteggiate rappresentano trasformazioni naturali tra prefasci che emergono tramite l'immersione di $\boldsymbol{C}^{op}$ in *Set*.

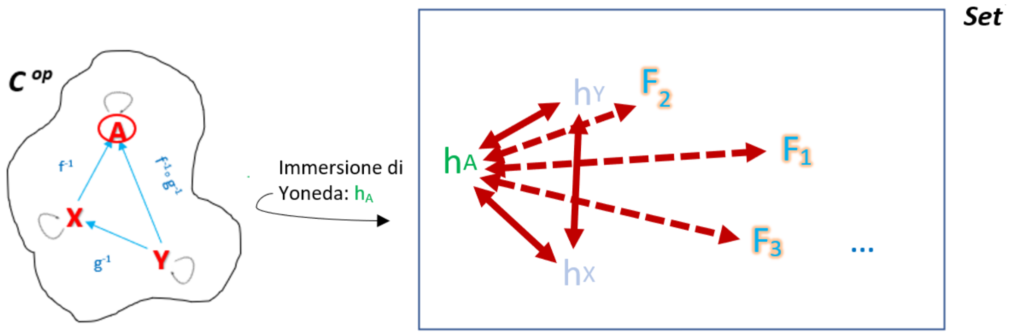



Figura 55. La categoria Set come categoria i cui oggetti sono i funtori contravarianti da $C^{op}$ a Set rappresentabili ($h^A$, $h^X$, $h^Y$) e i funtori non rappresentabili ($F_1$, $F_2$, $F_3$), e i cui morfismi sono le trasformazioni naturali tra essi (frecce bordeaux).

**►Interpretazione (6)**

*Sotto la prima assunzione di base, l'immersione di Yoneda può essere interpretata come una modalità per affermare che l'immagine che il contesto rimanda dell'oggetto A è un'immagine "affidabile" di A. Nella nostra interpretazione legata al significato, l'immersione di Yoneda garantisce quindi che le modalità di attribuzione di significato all'oggetto A per via sintetica sono modalità che derivano da un'immagine fedele e piena dell'oggetto A, cioè che sono modalità di attribuzione di significato affidabili.*

◄

Per rendere più facilmente comprensibile il discorso relativo alla completezza di *Set*, dobbiamo tornare al Lemma di Yoneda. Come già evidenziato, esso afferma che per ciascuna trasformazione naturale $\tau$: $h_A \Rightarrow F$, dove $F$ è un funtore qualsiasi tra $\boldsymbol{C}$ e *Set*, vi è un'unica immagine di $A$ secondo un funtore covariante da $C$ a *Set* e viceversa; cioè che vi è una corrispondenza biunivoca tra tali trasformazioni naturali e le immagini di $A$ secondo ciascuno dei funtori covarianti che sono gli oggetti di *Set*.

Dunque, data l'invertibilità della corrispondenza biunivoca, è possibile affermare che a ogni trasformazione naturale $\tau$: $h^A \Rightarrow F_i$ tra un funtore rappresentabile da $A$ e un qualsiasi altro funtore contravariante in *Set* corrisponde una e una sola immagine di $A$ secondo $F_i$ (si vedano le frecce bordeaux bidirezionali in Figura 56). In particolare, i funtori rappresentabili ($h^A$, $h^X$ e $h^Y$ nell'immagine nella Figura 56) e le trasformazioni naturali tra essi (frecce bordeaux continue) formano una sottocategoria di *Set* e tale sottocategoria è piena. Quanto esposto corrisponde al contenuto della Proposizione 1, secondo cui il funtore $h^A$ (chiamato "immersione di Yoneda") è pienamente fedele.

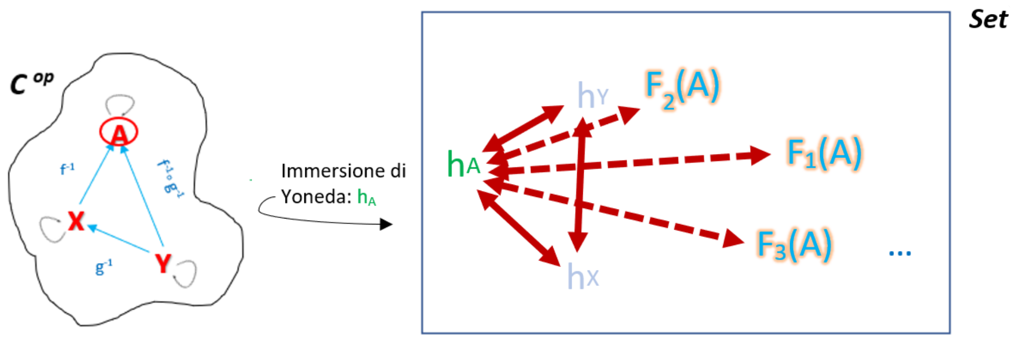



Figura 56. Il Lemma di Yoneda come corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle trasformazioni naturali Nat($h^A$, $F_i$) e l'insieme delle immagini di A secondo $F_i$.

**►Interpretazione (7)**

Per la prima assunzione di base, *l'attribuzione pragmatica di significato* agli oggetti ha un fondamento gnoseologico esprimibile in termini matematici, tramite il lemma di Yoneda.
Per la seconda assunzione di base il lemma di Yoneda esprime in termini matematici anche la *conoscenza* di un oggetto attraverso il suo contesto.
*È però ancora necessario dimostrare che la modalità pragmatica di attribuzione di significato consente effettivamente di conoscere completamente l'oggetto, nel senso che garantisce* (in *senso gnoseologico, non necessariamente effettivo) la possibilità di accesso a tutte le possibili attribuzioni di significato.*
◄

Per mostrare che questo concetto è altrettanto esprimibile in termini matematici, è necessario introdurre alcune definizioni, come quella di *diagramma*, di *limite di un diagramma* nonché di *categoria completa*.

**Definizione 13.** Un funtore $F$: $C \rightarrow S$, dove $C$ è una categoria piccola, i cui oggetti sono individuati con $i, j, \ldots$[236] e $S$ è una categoria qualsiasi, è detto *diagramma* di tipo $C$ in $S$. In particolare, un diagramma $K_B$:$C \rightarrow S$, che mappa ogni oggetto di $C$ in un unico oggetto fissato $B \in Ob(S)$ e ogni morfismo di $C$ nel morfismo identità di $B$ ($id_B$), è detto *diagramma costante*. Dato un morfismo $f$: $B \rightarrow D$, dove $B$, $D \in Ob(S)$, esso corrisponde a una trasformazione naturale tra i corrispondenti diagrammi costanti $K_B \Rightarrow K_D$.

**Definizione 14.** Un *cono naturale (di vertice B)* è una trasformazione naturale $\beta$: $K_B \Rightarrow F$, ovvero una famiglia di morfismi $\{\beta_i: B \rightarrow F(i), \forall\, i \in C\}$ tale che $\forall\, i \in C(i,j)$ sia commutativo il rispettivo diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & F(i) \arrow[dd, "F(u)"] \\
B \arrow[ur, "\beta_i"] \arrow[dr, "\beta_j"'] & \\
 & F(j)
\end{tikzcd}$$

,

cioè cha valga $F(u)°\beta_i = \beta_j$.

**Definizione 15.** Dato un diagramma $F$: $C \rightarrow S$, il *limite* di $F$ è una coppia $(L,l)$, dove $L \in Ob(S)$ e $l$: $K_L \Rightarrow F$ è il cono limite che soddisfa la seguente proprietà: se $M \in Ob(C)$ e $m$: $K_M \Rightarrow F$ è un qualsiasi altro cono di vertice $M$, esiste un unico morfismo $t$: $M \rightarrow L$ tale che $\forall\, u \in C(i,j)$ sia commutativo il rispettivo diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & & F(i) \arrow[dd, "F(u)"] \\
M \arrow[r, "t"] \arrow[urr, "m_i"] \arrow[drr, "m_j"'] & L \arrow[ur, "l_i"] \arrow[dr, "l_j"'] & \\
 & & F(j)
\end{tikzcd}$$

,

cioè che valga $F(u) \circ l_i = l_j$, $F(u) \circ m_i = m_j$, $l_i \circ t = m_i$, $\forall\, u \in C(i,j)$.

È possibile dimostrare che dati due limiti $(L,l)$ e $(L,l')$ per un diagramma $F$, l'isomorfismo $t$: $L \rightarrow L'$, con $l'° K_T = l$, è unico a meno di isomorfismi. Dunque, se il limite di un diagramma esiste, esso è unico a meno di isomorfismi.

[236] Qui intendiamo che l'insieme dei morfismi $C(i,j)$ è visto come una famiglia di indici, cioè $(\beta_i)_{i\in C}$.

**Definizione 16.** Una *categoria S* è *completa* (finitamente completa) se esiste il limite di ogni diagramma $F$: $C \rightarrow S$ per ogni categoria piccola (finita) $C$.[237]

**►Interpretazione (8)**

Dal punto di vista dell'interpretazione da noi fornita finora dei concetti matematici coinvolti, e in particolare dei funtori come modalità di attribuzione di significato, la questione relativa alla possibilità gnoseologica di conoscenza di un oggetto per via sintetica si riduce alla completezza delle modalità di attribuzione di significato. *Dal punto di vista matematico la completezza delle modalità di attribuzione di significato corrisponde alla completezza della categoria in cui si immerge la categoria* ***C*** *a cui appartiene l'oggetto. Nella nostra interpretazione ciò significa che la conoscenza in contesto garantisce la possibilità di una conoscenza completa dell'oggetto tramite la possibilità di accesso a tutte le possibili attribuzioni di significato, intesi non solo come funtori rappresentabili, ma anche in termini di prefasci in generale.*

◄

Tornando all'immersione di Yoneda, la categoria in cui viene immersa la categoria $\boldsymbol{C}$ è $Set^C$, mentre la categoria in cui viene immersa $\boldsymbol{C}^{op}$ è la categoria $Set^{C^{op}}$. $Set^C$ ha la struttura di $Set^{C^{op}}$ (con la differenza che in $Set^C$ la varianza dei funtori è contraria a quella dei funtori in $Set^C$) e quindi la completezza (finita) di $Set^C$ comporta anche la completezza (finita) di $Set^{C^{op}}$. Se $Set^C$ è completa, in essa ogni diagramma (prefescio o funtore contravariante) ha limite finito. Per mostrare che $Set^{C^{op}}$ è (finitamente) completa è sufficiente mostrare che lo è *Set*.
Di seguito accenneremo solo alla linea generale di una dimostrazione di quanto appena affermato.
Una particolare relazione tra oggetti di una categoria è quella di *pullback* (letteralmente "tirare indietro"). Si tratta di un concetto al quale faremo riferimento in vari punti dell'esposizione successiva. Premettiamo dunque la sua definizione.

**Definizione 17.** Dati due morfismi $f$, $g \in C(X,Y)$, tali che $f$: $X \rightarrow Z$ e $g$: $Y \rightarrow Z$, con $X$, $Y$, $Z \in Ob(C)$, il loro *pullback* è una tripla costituita da un oggetto $P \in Ob(C)$ e due morfismi $p_1$: $P \rightarrow X$ e $p_2$: $P \rightarrow Y$, in maniera tale che valga $f \circ p_1 = g \circ p_2$ e che sia soddisfatta la seguente proprietà universale: se $M$ è un altro oggetto che è dominio di due morfismi $m_1$ e $m_2$, con $m_1$: $M \rightarrow X$ e $m_2$: $M \rightarrow Y$, allora esiste un unico morfismo $t$: $M \rightarrow P$ tale che $t \circ p_1 = m_1$ e $t \circ p_2 = m_2$:

[237] Notiamo che il concetto di categoria completa è più forte di quello di categoria finitamente completa, dato che in una categoria completa rispetto a tutti i limiti dei diagrammi tra due oggetti della categoria deve esserci un unico morfismo, garantendo così la commutatività di tutti i diagrammi in essa. Il concetto di categoria completa, troppo rigido per avere utilità pratiche, è spesso sostituito da quello di categoria finitamente completa. Una tale categoria è completa rispetto a tutti i limiti finiti, cioè in essa la famiglia di morfismi che formano il cono naturale è indicizzabile in un insieme finito di indici possibili.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, "m_2"] \arrow[ddr, "m_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Un esempio elementare di pullback è quello riportato qui sotto.

**Esempio**
Siano $Z = \{1; 4; 5; 7; 10\}$, $X = \{1; 5; 7\}$ e $Y = \{4; 5; 7; 10\}$ tre oggetti di una categoria e siano i morfismi tra essi i morfismi di inclusione tra insiemi: il morfismo $f$: $X \to Z$ è dato in questo caso dalla relazione di inclusione $X \subset Z$, mentre il morfismo $g$: $Y \to Z$ è dato dalla relazione di inclusione $Y \subset Z$. Se esistono un quarto oggetto $P$ e due morfismi $p_1$: $P \to X$ e $p_2$: $P \to Y$, allora $P$, $p_1$ e $p_2$ costituiscono un pullback per $X$, $Y$, $Z$, $f$ e $g$. Possiamo considerare $P = \{5; 7\}$, $p_1$: $P \subset X$ e $p_2$: $P \subset Y$. Il pullback ($P$, $p_1$, $p_2$) deve soddisfare la proprietà generale che, dato un insieme $M$ con due morfismi $m_1$: $M \to X$ e $m_2$: $M \to Y$, esista un unico morfismo $t$: $M \to P$ tale che valga $t \circ p_1 = m_1$ e $t \circ p_2 = m_2$. Possiamo considerare $M = \{5\}$, $m_1$: $M \subset X$, $m_2$: $M \subset Y$, $t$: $M \subset P$. Dato $M$, per via della transitività della relazione di inclusione da $\{5\} \subset \{5; 7\} \subset \{1; 4; 5; 7; 10\}$ segue che $\{5\} \subset \{1; 4; 5; 7; 10\}$, quindi $t \circ p_1 = m_1$ e da $\{5\} \subset \{1; 5; 7\} \subset \{1; 4; 5; 7; 10\}$ segue che $\{5\} \subset \{1; 4; 5; 7; 10\}$, quindi $t \circ p_2 = m_2$. Mostrare che *Set* è (finitamente) completa significa mostrare che in essa esiste il limite (finto) per ogni diagramma (cioè funtore da $\boldsymbol{C}$ a *Set*). È possibile dimostrare che questo equivale al mostrare che $\boldsymbol{C}$ ha pullback e oggetti terminali (Mac Lane, 1998). Forniamo la definizione di oggetto terminale di una categoria.

> **Definizione 18.** Data una categoria $C$, un oggetto $X \in Ob(C)$ si dice *oggetto terminale* di $C$ se per ogni oggetto $Y \in Ob(C)$ esiste ed è unico il morfismo $f$: $Y \to X$. Viceversa, un oggetto $X \in Ob(C)$ si dice *oggetto iniziale* di $C$ se per ogni oggetto $Y \in Ob(C)$ esiste ed è unico il morfismo $f$: $X \to Y$.

In *Set* ogni singleton è oggetto terminale della categoria, mentre l'insieme vuoto è l'unico oggetto iniziale della categoria, nel senso che il singleton è in relazione di inclusione con ogni insieme, mentre non ci sono morfismi che "partono" da un singleton, in quanto non vi sono altri insiemi che possono essere inclusi in esso. Inoltre, dati due insiemi, entrambi inclusi in un terzo insieme, è sempre possibile individuare due relazioni di inclusione tra un quarto insieme e i primi due insiemi, in modo tale che, se un quinto insieme ha le relazioni di inclusione con i primi due, sia unica la relazione di inclusione del quinto rispetto al quarto insieme, in maniera tale che il diagramma della definizione di *pullback* sia commutativo.

Dato che in *Set* è definibile il concetto di *pullback* e *Set* possiede un oggetto terminale, *Set* è (finitamente) completa. Se lo è $Set^C$ allora lo è anche $Set^{C^{op}}$ e quindi in essa ogni diagramma ha il proprio limite. Per via dell'isomorfismo tra le strutture di $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{C}^{op}$, se un diagramma ha il proprio limite in $Set^C$, il rispettivo diagramma inverso ha il proprio limite in $Set^{C^{op}}$. Infatti, è sufficiente che la mappatura degli oggetti di $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{C}^{op}$ avvenga in maniera tale che venga mantenuta la relazione di inclusione tra insiemi.

**►Interpretazione (9)**

Venendo di nuovo all'interpretazione in termini di attribuzione di significato all'oggetto e della sua conoscenza, *il fatto che la categoria dei prefasci sia completa significa che l'insieme delle immagini che il contesto rimanda di un oggetto corrisponde biunivocamente all'insieme dei significati dell'oggetto nel contesto. Dato che per la seconda assunzione di base "poter conoscere" coincide con "avere la possibilità di accedere al significato", la possibilità di accesso a tutte le immagini che il contesto rimanda, garantisce la possibilità della conoscenza completa dell'oggetto, dal punto di vista gnoseologico.*

◄

Ma vi è un'ulteriore interpretazione sulla quale vogliamo soffermarci ora; essa concerne la relazione tra il concetto di registro semiotico (Duval, 2006) e *semiotic bundle* (Arzarello, 2006). Nell'interpretazione che segue faremo dunque riferimento al concetto di sistema semiotico secondo Ernest (2006), al concetto di registro semiotico secondo Duval (2006) e alla sua interpretazione in termini di sistema semiotico particolare secondo D'Amore e Santi (2018), nonché al costrutto di *semiotic bundle* secondo Arzarello (2006) (si veda il paragrafo 10.4.).

**Discussione preliminare**

Ricordiamo innanzi tutto le due caratteristiche fondamentali che distinguono il *semiotic bundle* dal registro semiotico di Duval, come esso viene presentato da D'Amore e Santi (2018), cioè adattato alla definizione di sistema semiotico di Ernest (2006): (1) il concetto di *semiotic bundle* non richiede regole di produzione e trasformazione di segni prestabilite; tali regole non devono, anche se possono, essere degli algoritmi; questo contribuisce ad ampliare notevolmente le tipologie di segni che possono essere presi in considerazione; (2) il concetto di *semiotic bundle* prende in considerazione l'evoluzione temporale del sistema semiotico, attraverso l'idea di insieme semiotico dinamico, cioè di un insieme che evolve nel tempo, molto più simile al concetto di specie nella matematica intuizionista (si veda il paragrafo 9.3.2.4.) che non al concetto di insieme nella teoria degli insiemi. D'altra parte, il concetto di registro semiotico coglie una caratteristica dei registri semiotici evoluti in matematica che sfugge al concetto di *semiotic bundle*: il fatto

che il significato dei segni in tali registri non si basa su una relazione di referenza con l'oggetto matematico, ma su relazioni di giustapposizione ad altri segni; questa caratteristica non è legata al concetto di algoritmo (anche se gli algoritmi si basano di solito su registri semiotici) ma alle caratteristiche degli specifici segni nei registri semiotici. Anche se si dovesse supporre che nell'insieme semiotico del *semiotic bundle* si possano considerare come caso particolare i segni appartenenti ai registri semiotici, ciò che rimane diverso, a nostro avviso, è comunque la natura della funzione di significazione, sulla quale si basa l'attribuzione di significato. Dunque, è la questione della *modalità di attribuzione di significato* che rende problematica la considerazione del *semiotic bundle* come una generalizzazione del concetto di sistema semiotico che comprende quello di registro semiotico. Essa richiede a nostro avviso ulteriori riflessioni.
Notiamo che in entrambi i casi, sia per quanto riguarda il registo semiotico, sia per quanto riguarda il *semiotic bundle*, l'attribuzione di significato emerge da un'interpretazione legata a una struttura di significato sottostante, basata sulle relazioni tra i segni. Nel caso del registro semiotico, tale struttura sottostante è fornita da un particolare sistema semiotico, quello del linguaggio naturale, il quale ha uno status di mezzo meta-semiotico di oggettivazione e coordinazione nell'attività matematica (D'Amore & Santi, 2018), mentre nel caso del *semiotic bundle* tale struttura di significato sottostante emerge da una prospettiva legata all'*embodied cognition* (Lakoff & Núñez, 2000) e al concetto di sistema semiotico di significazione, legato alla teoria dell'oggettivazione (Radford, 2008a), secondo la quale il linguaggio è solo uno dei possibili mezzi semiotici di oggettivazione.
Non ci soffermiamo ulteriormente su questo aspetto e teniamo presente solo il fatto che in entrambi i casi la concettualizzazione si basa sull'attribuzione di significato ai segni e che in tale attribuzione di significato sono fondamentali le relazioni tra i segni e la struttura di significato sottostante, cioè la loro interpretazione.
Come già evidenziato, secondo la teoria dei registri semiotici di Duval (1995), è possibile ottenere solo un accesso indiretto, mediato dalle rappresentazioni, all'oggetto matematico. Tale accesso indiretto è assicurato dalle trasformazioni semiotiche di rappresentazioni appartenenti allo stesso registro semiotico, dette *trattamenti*, e dalle trasformazioni semiotiche tra diversi registri semiotici, dette *conversioni*. Se consideriamo la funzione di significazione (attribuzione di significato) come la relazione tra il segno e l'oggetto, indipendentemente dal fatto che essa si basi su una relazione di somiglianza (di tipo iconico, in senso peirciano), di causa-effetto (di tipo indicale, in senso peirciano), di rappresentanza (di tipo simbolico, nel senso peirciano) o di riferimento (tramite un'operazione discorsiva di designazione, irriducibile alle prime due) (Iori, 2015), allora entrambe le posizioni, sia quella duvaliana, di stampo semio-cognitivo (che prende in considerazione solo l'ultima delle quattro relazioni), sia quella arzarelliana, che potremmo chiamare "semio-fenomenologica" (che prende in considerazione tutti i tipi di relazioni) sono accomunate dalla centralità di questa funzione di

significazione (o attribuzione di significato) e riconoscono in essa il punto cruciale per la concettualizzazione.
Secondo Duval, il pensiero matematico si fonda sulle trasformazioni semiotiche e soprattutto le conversioni sono indispensabili per la concettualizzazione (Duval, 1993, 2011/2017). Allo stesso tempo esse sono anche le più problematiche per gli studenti, anche se non si deve trascurare l'importanza della perdita di significato nei trattamenti (D'Amore, 2008). Nel caso del *semiotic bundle*, le trasformazioni semiotiche non sono messe in evidenza come regole prestabilite o univocamente determinabili, dato che i segni in esso contemplati non fanno necessariamente parte di registri semiotici, ma esse sono evidenziate nella definizione di *semiotic bundle* (si veda il paragrafo 10.4.4. nel punto (1)-ii, dove si parla di *un insieme di modi per produrre segni e possibilmente trasformarli* nonché nel punto (2), in cui si parla di *insieme di relazioni tra gli insiemi semiotici*).
I trattamenti possono essere intesi come relazioni interne a un insieme semiotico [punto (1)-ii della definizione],[238] mentre le conversioni possono essere intese come le relazioni *tra* gli insiemi semiotici [punto (2) della definizione]. Le regole di trasformazione a cui si ricorre nel trasformare i segni appartenenti a un insieme semiotico in segni appartenenti a un insieme semiotico che si configura come appartenente a un istante temporale successivo, sono dunque assimilabili alle conversioni. È sulla base delle relazioni tra insiemi semiotici, quindi sulla base delle conversioni, che gli insiemi semiotici evolvono, assicurando al *semiotic bundle* la sua dinamicità, che rappresenta l'evoluzione del pensiero matematico e della concettualizzazione nel tempo.
Possiamo concludere che in entrambi i casi da noi esaminati (registro semiotico e *semiotic bundle*) la funzione di significazione non è sufficiente di per sé per la concettualizzazione; serve un'evoluzione di tale significazione, sia essa intesa come operazione di conversioni secondo regole prestabilite, sia essa intesa come un'evoluzione di insiemi semiotici secondo relazioni generiche.
Torniamo ora al modello matematico da noi proposto del Lemma di Yoneda e dell'immersione di Yoneda e vediamo come si possono interpretare in esso queste ultime riflessioni.

### ►Interpretazione (10)

Secondo la nostra interpretazione proposta finora, i funtori rappresentano delle modalità di attribuzione di significato e quindi assumono su di sé la funzione di significazione. Le trasformazioni semiotiche di trattamento e conversione o, in senso generico, le trasformazioni tra i segni degli insiemi semiotici, possono essere

---

[238] Notiamo che nella definizione di *semiotic bundle* si parla di insieme di modi per *produrre* segni e *possibilmente* trasformarli, il che significa che i segni contemplati in esso possono "entrare" e anche "uscire" dal flusso semiotico, ma soprattutto che i segni contemplati non devono *necessariamente* essere trasformabili in altri segni.

interpretate come dei funtori, mentre le trasformazioni naturali tra i funtori possono essere interpretate come delle traduzioni tra attribuzioni di significato. Nel caso dei trattamenti, tali traduzioni tra attribuzioni di significato sono assicurate dagli algoritmi o dalle regole stabilite nel registro semiotico; nel caso delle conversioni esse sono stabilite da quella che Duval chiama la "corrispondenza biunivoca tra i tratti distintivi dell'oggetto" (Duval, 2011/2017, p. 31) nei due diversi registri semiotici. Nel caso delle trasformazioni semiotiche generiche tra gli insiemi semiotici tali traduzioni di significato non sono assicurate, dato che le relazioni tra gli insiemi semiotici non sono codificate. D'altra parte è anche vero che, anche nel caso dei registri semiotici, se non vi è congruenza tra le rappresentazioni semiotiche, la traduzione non può essere biunivoca, ma in ogni caso in tale contesto esistono delle regole che stabiliscono quando una tale trasformazione è possibile in maniera biunivoca e quando ciò non è possibile.
La corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle trasformazioni naturali tra $h^A$ e un prefascio $F_i$ da un lato, e l'insieme delle immagini di $A$ secondo $F_i$ (si veda la Figura 56), che rappresenta il contenuto del Lemma di Yoneda, esprime, nella nostra interpretazione, la corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle trasformazioni semiotiche tra le rappresentazioni di un oggetto matematico e l'insieme delle possibili significazioni dell'oggetto. In questo senso, la conoscenza pragmatica dell'oggetto è assicurata nella sua completezza solo se le trasformazioni semiotiche tra i segni che rappresentano l'attribuzione di significato all'oggetto in un dato contesto (i funtori) sono traducibili tra loro, cioè se il soggetto è in grado di eseguire trattamenti e conversioni nei registri semiotici.
*Il registro semiotico può dunque essere considerato il caso limite di un semiotic bundle, in cui le trasformazioni semiotiche sono codificate. Infatti, nel nostro modello matematico tali trasformazioni semiotiche sono le trasformazioni (a volte naturali, altre no) tra i funtori, che esistono necessariamente nel caso si tratti di registri semiotici, mentre non esistono necessariamente nel caso si tratti di sistemi semiotici in senso più generico. In ultima analisi, la conoscenza per via sintetica di un oggetto matematico non può prescindere dalla sua conoscenza nei contesti codificati dei registri semiotici, anche se le trasformazioni semiotiche in essi sono da considerarsi come il caso limite al quale tendono le trasformazioni semiotiche nel semiotic bundle.*
Torneremo ancora su questo aspetto dopo aver fornito la definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica.
Concludiamo la nostra interpretazione, sottolineando il fatto che la completezza della categoria *Set* rappresenta, nella nostra interpretazione, l'assicurazione del fatto che la (potenziale) acquisizione di tutte le possibili significazioni derivanti dalle trasformazioni semiotiche effettuabili in riferimento a un oggetto matematico in un dato contesto, rende possibile (potenzialmente) la sua piena conoscenza. Tale completezza è garantita dal fatto che la categoria *Set* è aperta e che quindi il contesto iniziale dell'oggetto $A$, espresso tramite la categoria $\boldsymbol{C}$, può essere (in via di principio) ampliato fino a completare l'insieme delle significazioni.

Il significato ultimo di questa nostra interpretazione è dunque la seguente: *la conoscenza di un oggetto matematico per via sintetica (cioè, pragmatica) è una conoscenza potenzialmente completa dell'oggetto*. Inoltre, tale interpretazione può essere inserita in un quadro dialogico tra la teoria dei registri semiotici e il *semiotic bundle*.

◄

## 11. 3. Conclusioni

Nel presente capitolo abbiamo esposto gli strumenti matematici categoriali che costituiscono il contesto teorico nel quale collocheremo la definizione cercata di oggetto matematico specifico della didattica della matematica.
Tali strumenti hanno consentito di organizzare il quadro teorico in maniera coerente anche dal punto di vista matematico, fornendo una base tecnica che consente di cogliere relazioni epistemiche importanti.
L'insieme costituito dalle 18 definizioni e dalle 2 proposizioni introdotte nel paragrafo 11.2. fornisce un quadro teorico tecnico pressoché completo per tale definizione (nel capitolo 12 si aggiungeranno alcuni ulteriori elementi), sulla base dei criteri evidenziati nel paragrafo 10.2., ma esso rappresenta anche, attraverso le interpretazioni fornite, la fondazione gnoseologica della definizione stessa [Interpretazioni da (2) a (9)].
Infatti, se si considerano le parti evidenziate in corsivo nelle interpretazioni da (2) a (9) del paragrafo 11.2., si ottiene un percorso che descrive la dimostrazione del fatto che è possibile conoscere completamente (e fedelmente) un oggetto (matematico) per via sintetica.
Riportiamo di seguito per comodità del lettore le parti evidenziate in corsivo nelle varie interpretazioni, inserendo tra parentesi il numero dell'interpretazione dalla quale sono tratte, in modo tale che sia possibile ripercorrere la linea generale della dimostrazione fornita.

*(1) Il concetto di funtore rappresentabile consente di esprime il fatto che un oggetto (matematico) può essere interpretato attraverso (o sostituito da) le sue relazioni con il contesto, dove il contesto è costituito dalle relazioni con gli oggetti di una categoria a cui l'oggetto appartiene. Detto diversamente: la conoscenza pragmatica dell'oggetto, che si esprime attraverso la sua conoscenza in contesto, è una conoscenza completa dell'oggetto.*
*(2) Il resto del capitolo consente di fornire la prova, attraverso il ricorso agli strumenti matematici categoriali, della fondatezza gnoseologica della tesi pragmatista sul significato, secondo cui la conoscenza in contesto è una conoscenza potenzialmente completa dell'oggetto.*
*(3) In questo contesto noi assumiamo che un funtore modellizza l'attribuzione di significato all'oggetto in senso pragmatista. Questa è la prima assunzione*

*interpretativa di base. Diventa dunque possibile prendere in considerazione anche una modellizzazione dell'acquisizione di conoscenza attraverso gli strumenti matematici che stiamo esponendo qui. Introduciamo una seconda ipotesi interpretativa di base, cioè che "attribuire significato" coincide con "conoscere" e che "avere la possibilità di accedere al significato" coincide con "avere la possibilità di conoscere".*

*(4) Possiamo dunque affermare che per il Lemma di Yoneda, sotto la prima assunzione interpretativa di base, l'insieme delle relazioni in contesto di un oggetto corrispondono al suo significato. Per mostrare che la modalità pragmatica di attribuzione di significato consente di conoscere effettivamente l'oggetto, nel senso che garantisce (in senso gnoseologico, non necessariamente effettivo) la possibilità di accesso a tutte le possibili attribuzioni di significato, dobbiamo fare riferimento all'immersione di Yoneda.*

*(5) Attraverso l'immersione di Yoneda è (...) possibile dimostrare, sotto le due assunzioni interpretative di base, che tramite l'attribuzione di significato pragmatica all'oggetto, cioè attraverso la sua conoscenza in contesto, è possibile accedere a tutti i significati dell'oggetto e quindi conoscerlo completamente.*

*(6) [Infatti,] (S)sotto la prima assunzione di base, l'immersione di Yoneda può essere interpretata come una modalità per affermare che l'immagine che il contesto rimanda dell'oggetto A è un'immagine "affidabile" di A. Nella nostra interpretazione legata al significato, l'immersione di Yoneda garantisce quindi che le modalità di attribuzione di significato all'oggetto per via sintetica sono modalità che derivano da un'immagine fedele e piena dell'oggetto A, cioè che sono modalità di attribuzione di significato affidabili.*

*(7) È però ancora necessario dimostrare che la modalità pragmatica di attribuzione di significato consente effettivamente di conoscere completamente l'oggetto, nel senso che garantisce* (in *senso gnoseologico, non necessariamente effettivo) la possibilità di accesso a* ***tutte*** *le possibili attribuzioni di significato.*

*(8) Dal punto di vista matematico la completezza delle modalità di attribuzione di significato corrisponde alla completezza della categoria in cui si immerge la categoria* ***C*** *a cui appartiene l'oggetto. Nella nostra interpretazione ciò significa che la conoscenza in contesto garantisce la possibilità di una conoscenza completa dell'oggetto tramite la possibilità di accesso a tutte le possibili attribuzioni di significato, intesi come i prefasci che emergono in seguito all'immersione.*

*(9) Il fatto che la categoria dei prefasci sia completa significa che l'insieme delle immagini che il contesto rimanda di un oggetto corrisponde biunivocamente all'insieme dei significati dell'oggetto nel contesto. Dato che per la seconda assunzione di base "poter conoscere" coincide con "avere la possibilità di accedere al significato", la possibilità di accesso a tutte le immagini che il contesto rimanda, garantisce la possibilità della conoscenza completa dell'oggetto, dal punto di vista gnoseologico.*

Notiamo che la dimostrazione in questione vale non solo per gli oggetti matematici, ma è una dimostrazione della validità gnoseologica della conoscenza sintetica in generale e quindi anche in riferimento alla conoscenza in didattica della matematica come disciplina e in filosofia della didattica della matematica.
Sottolineiamo inoltre che la dimostrazione riportata deve essere intesa come una *dimostrazione in didattica della matematica* e non come una dimostrazione in matematica.
Infatti, se osserviamo la Figura 47, che mostra l'analogia sulla quale si basa il ricorso alla teoria delle categorie in didattica della matematica, possiamo notare che essa è stabilita tra un frammento della teoria delle categorie e un frammento di didattica della matematica e che la metafora strutturale che consente di usare i concetti categoriali in didattica della matematica in senso metaforico (Figura 48) si basa su una copia ($K$) di frammento di teoria delle categorie che è immersa nella categoria codominio rappresentata della didattica della matematica e non della matematica.
Notiamo che un aspetto che non emerge di per sé dal contesto del quadro teorico qui caratterizzato è quello relativo alla relazione tra oggetto matematico e oggetto matematico specifico della didattica della matematica, ma si tratta di un criterio che concerne più la definizione cercata che non il quadro teorico nel quale essa si colloca.

**Risposta alla domanda di ricerca D2**

Nel corso dell'esposizione dei capitoli 10 e 11 abbiamo seguito un percorso che ha consentito di mettere in evidenza in vari punti della trattazione il procedere nell'indagine relativa alla risposta alla seconda domanda di ricerca, cioè:

*D2. Quali sono gli elementi teorici che possono consentire di costruire un contesto teorico (quadro teorico di riferimento) che possa accogliere i criteri individuati in risposta alla domanda D1?*

Gli elementi che possono consentire di costruire un contesto teorico che possa accogliere i criteri individuati in risposta alla domanda *D1* sono:

- un approccio *primariamente* pragmatico agli oggetti matematici (paragrafi 10.3.2.1. e 10.6.);
- la filosofia sintetica della matematica contemporanea, estesa alla didattica della matematica, che contempla un'ontologia transitoria, un'epistemologia che alterna posizioni pragmatiche e realiste, pur posizionandosi in una prospettiva pragmatista fenomenologica (paragrafo 10.3.2.2.);
- un quadro semiotico di riferimento che possa accogliere un'interpretazione funzionale del concetto di segno e una prospettiva sia dinamica che statica, sia in matematica sia in didattica della matematica (paragrafo 10.4.);
- una prospettiva ermeneutica che possa consentire di inquadrare il costante andare e venire tra il locale e il globale nelle interpretazioni (paragrafo 10.5.);
- un approccio al linguaggio che dovrebbe consentire di combinare tra loro il linguaggio matematico categoriale e il linguaggio discorsivo, evidenziando il ruolo del ragionamento diagrammatico (paragrafi 10.7., 10.8., 10.9.);
- una modalità di inquadrare l'uso del linguaggio categoriale in senso metaforico in didattica della matematica (paragrafo 10.10.);
- un modello matematico categoriale che rispecchi il quadro teorico costruito, che giustifichi tecnicamente il ricorso agli strumenti matematici categoriali [Modellizzazione (1) del paragrafo 11.2.] e che sia in grado di fondare gnoseologicamente l'approccio sintetico agli oggetti.

Di seguito riassumiamo brevemente le modalità con cui gli strumenti matematici per il quadro teorico trovano una corrispondenza in quest'ultimo e se e in che modo il quadro teorico nel suo insieme corrisponde ai criteri individuati nella prima parte della tesi, che qui riportiamo per comodità del lettore:

(1'') dinamicità/staticità e transitorietà degli oggetti matematici e della didattica della matematica;
(2'') distinzione tra oggetti matematici e oggetti matematici specifici della didattica della matematica nonché esplicitazione della relazione degli oggetti

matematici specifici della didattica della matematica con la versione istituzionale formale degli oggetti matematici;

(3’’) distinzione tra i due livelli interpretativi degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica come modelli ermeneutici del primo o del secondo ordine;
(4’’) assoluta generalità, cioè indipendenza da una specifica teoria dell’apprendimento o da assunzioni relative a singoli approcci o teorie in didattica della matematica;
(5’’) necessità di tenere conto del fatto che gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica sono dei complessi concettuali che si costituiscono in reti che evolvono nel tempo sulla base di certe relazioni semantiche che rappresentano una sorta di sintassi;
(6’’) necessità di tenere conto della dimensione semiotica;
(7’’) necessità di tenere conto di un approccio pragmatico agli oggetti matematici, considerando il contesto.

Nel corso del capitolo 10 le interpretazioni e la modellizzazione fornite hanno consentito di mostrare come i due linguaggi, quello matematico categoriale e quello discorsivo della didattica della matematica, possono essere coordinati sulla base dei concetti di categoria analogica (D’Amore, 1974b) e di metafora strutturale intesa come immersione (Pimm, 1981) [Modellizzazione (1)]. In particolare, il linguaggio categoriale consente di esprimere caratteristiche generali, riferibili a diversi contesti della didattica della matematica, uscendo all’occorrenza dalla semantica delle singole teorie per interpretare poi gli eventuali risultati in esse. In questo senso i risultati ottenuti tramite il linguaggio categoriale sono assolutamente generali. Dunque, una definizione fornita in questo quadro teorico avrebbe la caratteristica di essere assolutamente generale [criterio (4’’)] poiché il linguaggio in cui è formulata trascende gli approcci epistemologici specifici.
Le interpretazioni fornite nel paragrafo 11.2. consentono di fondare tecnicamente, coordinandoli sulla base del modello matematico sottostante, gli elementi del quadro teorico esposto nel capitolo 10.
Vediamo in quale modo ciò avviene, articolando maggiormente l’interpretazione del modello matematico.
L’interpretazione (10) del paragrafo 11.2. non rientra nella dimostrazione della fondatezza gnoseologica della conoscenza sintetica, ma è un risultato strettamente legato alla parte del quadro teorico esposta nel capitolo 10 (si veda il paragrafo 10.4.) e al criterio (6’’). Come evidenziato, tale interpretazione consente di inquadrare in maniera dialogica la teoria dei registri semiotici (Duval, 1993) e il costrutto di *semiotic bundle* (Arzarello, 2006), mostrando che un registro semiotico può essere considerato il caso limite di un *semiotic bundle*, in cui le trasformazioni semiotiche sono codificate. Infatti, nel nostro modello matematico tali trasformazioni semiotiche sono le trasformazioni (a volte naturali, altre no) tra funtori, che esistono necessariamente nel caso si tratti di registri semiotici, mentre

non esistono necessariamente nel caso si tratti di sistemi semiotici in senso più generico. In ultima analisi, la conoscenza per via sintetica di un oggetto matematico non può prescindere dalla sua conoscenza nei contesti codificati dei registri semiotici, anche se le trasformazioni semiotiche in essi sono da considerarsi come il caso limite al quale tendono le trasformazioni semiotiche nel *semiotic bundle.*

Inoltre, il fatto che una categoria, a differenza di un insieme, sia una struttura aperta, non caratterizzabile tramite una proprietà caratteristica, consente di ancorare l'idea dell'inesauribilità dell'essenza (*eidos*) in senso husserliano (si veda il paragrafo 9.3.3.1.7) al modello matematico qui esposto. Infatti, l'estensione della categoria attraverso la costituzione di nuove relazioni corrisponde alla possibilità di generare un numero sempre crescente di nuove *visioni* dell'oggetto, in una successione di visioni concordanti il cui limite è l'oggetto stesso. D'altra parte, la generazione di visioni sempre nuove che non esauriscono mai l'*eidos* husserliano, corrisponde a un processo di "schiusura" (disclosure) progressiva e mai definitiva del mondo costituito dal contesto del (quasi-)oggetto inteso come *worldly phenomenon* nel senso di Rota (1973/1991, si veda il paragrafo 10.3.2.3. del quadro teorico). L'approccio sintetico agli oggetti soddisfa inoltre il criterio (7''), in cui si chiede che sia preso in considerazione un approccio pragmatico agli oggetti.

Il processo rappresentato dalla successione di visioni concordanti è inoltre perfettamente conciliabile con la semiosi peirciana (si veda il paragrafo 10.4.1. del quadro teorico), la quale descrive un analogo processo interpretativo potenzialmente infinito, esprimibile in termini funzionali. In questo senso la dimostrazione dell'"affidabilità gnoseologica" della conoscenza sintetica è una dimostrazione categoriale della massima pragmatica peirciana,[239] alla quale abbiamo ricondotto il concetto di significato nella parte del quadro teorico esposto nel capitolo 10. Inoltre, l'idea del significato inteso come conoscenza in contesto è compatibile con il significato nel senso di Wittgenstein (1953/2003), cioè con il significato inteso come uso nel linguaggio. Infatti, è sufficiente interpretare il processo della semiosi infinita peirciana come un discorso e il contesto come un particolare gioco linguistico. Vediamo dunque come qui vengono intrecciati nuovamente gli elementi del quadro teorico, del suo modello matematico e del criterio (7'').

Il fatto che nella prospettiva fenomenologica non vi sia in realtà mai una conoscenza completa dell'oggetto non deve essere visto come un fatto in contraddizione con la dimostrazione da noi prodotta riguardo alla possibilità di conoscenza completa di un oggetto per via sintetica. Infatti, ciò che noi abbiamo mostrato è che vi è una tale completezza *potenziale*, nel senso che la categoria in cui avviene l'immersione tramite il funtore rappresentabile è in grado di accogliere in sé qualsiasi prefascio che dovesse emergere dalla messa in relazione di oggetti

---

[239] Per una dimostrazione logica, tramite il ricorso ai grafi esistenziali peirciani, della massima pragmatica peirciana, si veda Zalamea (2012b).

appartenenti alla categoria o che entrano *ex novo* a far parte di essa. Notiamo infatti che gli oggetti della categoria $Set^C$ sono insiemi di funtori, i quali sono elementi relazionali e non degli oggetti in senso classico. In questo senso il processo semiotico è rappresentabile come una concatenazione di relazioni, in cui le caratteristiche di *oggetto*, segno-*representamen* e *interpretante* in senso peirciano non sono caratteristiche logiche o sostanziali ma contestuali (si veda il paragrafo 10.4.1.). Dunque, la possibilità di una conoscenza completa dell'oggetto è data in termini potenziali, cioè essa è garantita dal punto di vista gnoseologico, mentre dal punto di vista epistemologico la conoscenza tende verso un limite ideale. Notiamo però che nella semiosi peirciana è presente il concetto di interpretante logico finale che consente di considerare un "arresto" della semiosi nel momento in cui gli interpretanti si stabilizzano, cioè quando il loro significato "converge" a un significato che si stabilizza nel tempo.
Questo aspetto mostra come il modello in questione consente di tenere conto sia della dinamicità sia della staticità degli oggetti e inoltre consente di inquadrare tramite la semiosi peirciana la loro transitorietà [criterio (1'')]. Infatti, la funzione ricorsiva peirciana (si veda il paragrafo 10.4.1.) è un modello adatto a rappresentare proprio la transitorietà degli oggetti, fornendo una risposta all'esigenza di inquadrare tecnicamente l'idea di un'ontologia transitoria anche in termini semiotici.
Per quanto riguarda i modelli ermeneutici [criterio (3'')], i prefasci che emergono attraverso l'immersione del funtore rappresentabile possono essere interpretati come delle attribuzioni di significato all'oggetto sintetico nel contesto che costituisce il "testo" in cui esso è inserito: la comprensione dell'oggetto non è data di per sé, ma si manifesta sulla base dei pre-concetti (nel senso evidenziato nel paragrafo 10.5.), mediante i quali l'interpretante entra nel contesto costituito dalle relazioni tra gli oggetti che appartengono alla categoria di riferimento dell'oggetto; d'altro lato la progressiva conoscenza dell'oggetto modifica il modo di vedere lo stesso contesto. Il quadro teorico non possiede strumenti tecnici esplicitamente pensati per distinguere tra modelli ermeneutici del primo e del secondo ordine, i quali rimangono per ora a un livello intuitivo.
Abbiamo già messo in evidenza che il ricorso al linguaggio categoriale garantisce la generalità del quadro teorico e tale generalità consente anche molteplici interpretazioni dello stesso modello. Così possiamo per esempio stabilire un collegamento con la linguistica funzionale (si veda il paragrafo 10.8.). Infatti, i registri linguistici possono essere visti come funtori rappresentabili diversi, riferiti a uno stesso oggetto matematico, i quali danno luogo a contesti diversi. Una funzione linguistica può essere intesa come l'immersione del funtore rappresentabile. Le trasformazioni naturali tra i diversi funtori rappresentabili rappresentano in questo contesto la capacità di riconoscere l'esistenza di diversi registri linguistici e di passare da un registro linguistico a un altro.
Il linguaggio categoriale e la categoria come struttura "aperta", che consente di inglobare nuove relazioni (morfismi) e quindi nuovi oggetti, sono in accordo con

la necessità di considerare la natura relazionale dei complessi concettuali che costituiscono gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica (criterio 5''). Le relazioni semantiche che formano i complessi concettuali possono essere interpretate come morfismi di una categoria, mentre i funtori possono essere interpretati come le relazioni semantiche che collegano i morfismi tra loro, creando delle reti semantiche più ampie, nel senso delle "teorie informali" di Lakatos (1976/1979).
Evidenziamo inoltre il fatto che il ricorso al linguaggio categoriale ha permesso di mostrare le potenzialità del ragionamento diagrammatico (paragrafo 10.7. del quadro teorico) in didattica della matematica.
Il criterio (2'') non trova una soddisfazione diretta nel quadro teorico, ma ne trova una indiretta, attraverso l'Interpretazione (10) del paragrafo 11.2. Infatti, se si considerano i registri semiotici come il contesto degli oggetti matematici formalmente riconosciuti e il *semiotic bundle* come il contesto in cui possono "vivere" idee e intuizioni non necessariamente traducibili in un linguaggio formale, allora questa interpretazione fornisce un possibile collegamento tra oggetti matematici e oggetti matematici specifici della didattica della matematica.

Possiamo dunque concludere che la domanda di ricerca *D2* ha ottenuto una risposta positiva, nel senso che sono stati delineati, descritti e discussi gli elementi teorici che costituiscono un quadro teorico adatto a soddisfare i criteri evidenziati nella risposta alla domanda di ricerca *D1*, compresa la formulazione di un modello matematico che evidenzia la sua coerenza e lo fonda dal punto di vista gnoseologico.

# TERZA PARTE

# 12. Definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica

## 12. 1. Introduzione

Nella prima parte della tesi abbiamo determinato le caratteristiche che una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica dovrebbe soddisfare. Tali criteri sono stati individuati, circoscritti e precisati nel corso della ricerca, giungendo alla formulazione esposta nel paragrafo 10.1., che per comodità del lettore riportiamo in forma sintetica qui sotto:

(1'') dinamicità/staticità e transitorietà degli oggetti matematici e della didattica della matematica;
(2'') distinzione tra oggetti matematici e oggetti matematici specifici della didattica della matematica nonché chiarificazione della relazione degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica con la versione istituzionale formale degli oggetti matematici;
(3'') distinzione tra i due livelli interpretativi degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica come modelli ermeneutici del primo e/o del secondo ordine;
(4'') assoluta generalità, cioè indipendenza da una specifica teoria dell'apprendimento o da assunzioni relative a singoli approcci o teorie in didattica della matematica;
(5'') necessità di tenere conto del fatto che gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica sono dei complessi concettuali che si costituiscono in reti che evolvono nel tempo sulla base di certe relazioni semantiche che rappresentano una sorta di sintassi;
(6'') necessità di tenere conto della dimensione semiotica;
(7'') necessità di tenere conto di un approccio pragmatico agli oggetti matematici, considerando il contesto, ma senza trascurare il fatto che gli oggetti della matematica sono formulati in un linguaggio astratto insiemistico che fa acquisire loro una dimensione "reale" e oggettiva.

Nel capitolo 10 abbiamo caratterizzato il quadro teorico che dovrebbe accogliere la definizione, interpretando i criteri della filosofia sintetica della matematica contemporanea in filosofia della didattica della matematica e individuando gli elementi specifici del quadro teorico nel linguaggio discorsivo della didattica della matematica come disciplina. Infine, nel capitolo 11 abbiamo fornito un modello matematico categoriale per tale quadro teorico.
Nel presente capitolo forniremo la definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica nel linguaggio categoriale, all'interno del modello categoriale esposto nel capitolo 11.

Successivamente discuteremo brevemente la definizione in riferimento ai criteri riportati in questo paragrafo.

## 12. 2. La definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica nel linguaggio categoriale

In questo paragrafo completeremo prima il modello matematico esposto nel paragrafo 11.2. con alcune definizioni e poi presenteremo la definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica e la definizione di oggetto matematico a essa collegata in un linguaggio diagrammatico.
Le due definizioni che completano il modello matematico sono quella di oggetto sintetico, concetto già ampiamente discusso nel paragrafo 11.2., e quella di categoria prodotto, che serve per collegare le due componenti ontologiche degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica: la componente matematica e la componente didattica.

**Definizione 19.** Sia C una categoria piccola, con $A \in Ob(C)$. L'insieme dei funtori covarianti $F: C^{op} \to Set$ che emergono grazie all'immersione di Yoneda $h^A: C^{op} \to Set$ prende il nome di *oggetto sintetico A*. L'oggetto sintetico $A$ verrà indicato con $A_S$.

**Definizione 20.** Siano $C$ e $D$ due categorie con $A \in Ob(C)$, $B \in Ob(D)$ e $f_1 \in C(A_1,A_2)$, $g_1 \in D(B_1,B_2)$. Definiamo la *categoria prodotto* $C\times D$ come la categoria i cui oggetti sono coppie ordinate $(A, B)$, i cui morfismi sono coppie di morfismi $(f_1,g_1) \in C\times D$ $[(A_1; B_1), (A_2; B_2)]$ e in cui la legge di composizione di morfismi è definita componente per componente, cioè, $(A_1,B_1) \circ_{C\times D}(A_2; B_2) :=(A_1 \circ_C A_2), (B_1 \circ_D B_2)$ e in cui $id_{C\times D} \in C\times D$ $[(A, B), (A, B)]$.

Per le ragioni discusse nel capitolo 11, introducendo la definizione che stiamo proponendo preferiamo parlare di "modello di definizione" piuttosto che di "definizione", come abbiamo fatto finora, in quanto si tratta di una formulazione strutturale molto astratta che richiede un'interpretazione, la quale non è necessariamente unica.[240]
Premettiamo inoltre che si tratta di una definizione costruttiva, nella quale vengono presentati i passaggi che consentono di arrivare all'oggetto che si intende costruire.
Il modello di definizione è composto da due parti: una parte generale e una in cui si presentano due casi particolari.
Nella parte generale si distinguono due casi: uno in cui si mette in evidenza la relazione tra l'oggetto matematico e l'oggetto matematico della didattica della

[240] Facciamo notare che, come discusso nel capitolo 11, i concetti di modello e interpretazione non sono usati qui in senso logico, ma nel senso in cui il termine "modello" si intende nelle scienze applicate, dove il modello è un modello matematico, mentre l'interpretazione è il suo significato nel contesto dello specifico contesto scientifico.

matematica e uno in cui si mettono in evidenza i modelli ermeneutici del primo e del secondo ordine.
Nella seconda parte, i due casi particolari mostrano come

I. si presenta il modello di definizione nel caso in cui l'oggetto matematico è visto solo dal punto di vista analitico;
II. come si può introdurre una dimensione dinamica nel modello.

### 12. 2. 1. Modello generale di definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica

Il seguente diagramma (Figura 57), che si basa sul linguaggio diagrammatico usato nel paragrafo 11.2., rappresenta il modello di definizione generale di oggetto matematico specifico della didattica della matematica.[241]
In esso è fornito anche un riassunto dell'interpretazione che verrà discussa e spiegata in seguito.

[241] Ringraziamo il prof. Fernando Zalamea per i preziosi suggerimenti tecnici all'esordio dei nostri studi circa la formulazione della presente definizione.

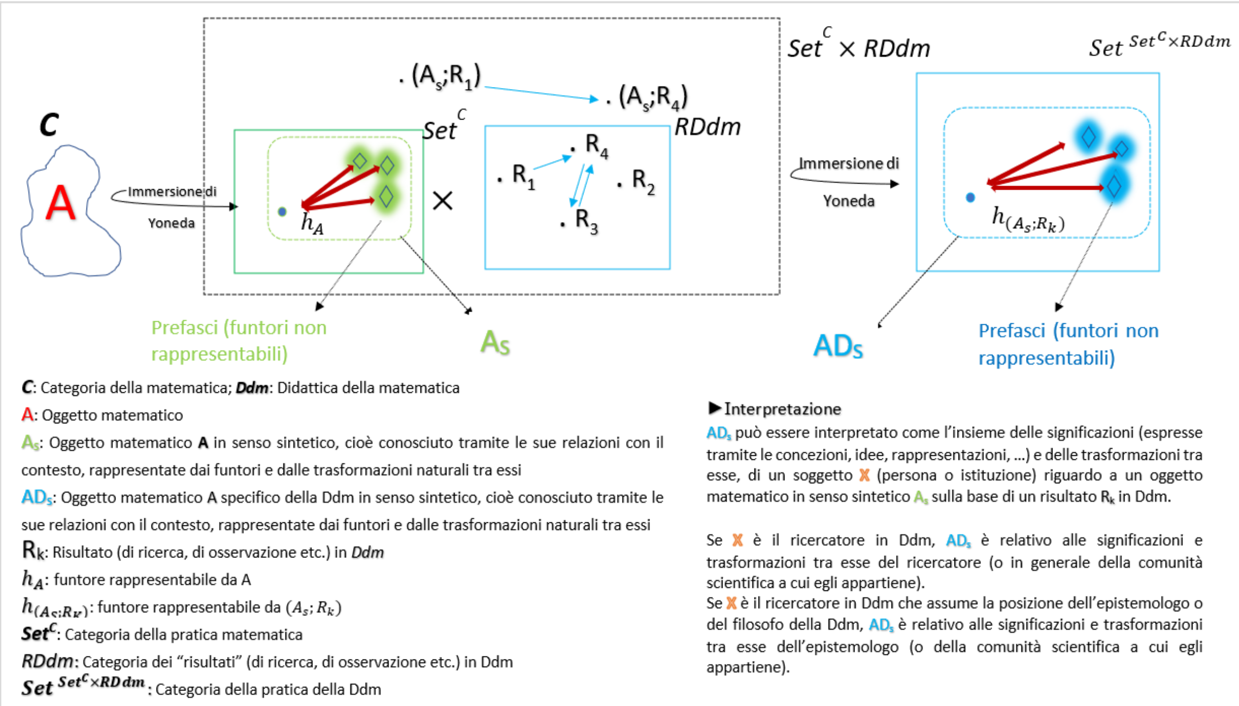



Figura 57. Modello di definizione generale di oggetto matematico specifico della didattica della matematica.[242]

## ►Interpretazione (11)

Interpretiamo ora il modello di definizione, basandoci sul diagramma che lo definisce e sulla legenda sottostante.
Sulla sinistra del diagramma è rappresentata la categoria ***C*** a cui si suppone che appartenga l'oggetto ***A*** che si intende conoscere. Supponiamo che ***C*** sia qui la categoria della matematica come disciplina e che ***A*** sia un oggetto matematico appartenente a tale categoria.
Supponiamo che ***C*** sia scelta in maniera tale che sia una categoria piccola, cioè che la collezione dei suoi oggetti sia un insieme.[243]
Supponiamo di voler conoscere l'oggetto ***A*** per via *sintetica,* cioè attraverso le sue relazioni con il contesto.

---

[242] Nel diagramma del modello di definizione è presente in realtà un'ambiguità di notazione, imposta dall'esigenza di rappresentare contemporaneamente sia l'azione dell'immersione di ***C*** in $Set^C$, sia l'effetto che questa produce considerando la categoria duale di ***C***, cioè $C^{op}$. In questo senso la categoria iniziale ***C*** sta sia per sé stessa sia per la sua categoria duale, $C^{op}$, a seconda che si considera l'immersione di Yoneda covariante o contravariante.
[243] Notiamo che questa condizione è soddisfatta se ci si restringe a infiniti non "tropo grandi", ma per il contesto in cui stiamo lavorando la cardinalità $\aleph_1$ è più che sufficiente.

Immaginiamo che la categoria ***C*** venga immersa tramite un funtore rappresentabile $h_A$ nella categoria della pratica matematica, rappresentata nel diagramma dalla categoria *Set*.
Il funtore rappresentabile $h_A$ crea dunque una copia della categoria della matematica (***C***) nella categoria della pratica matematica (***Set***), dove gli oggetti di ***C*** sono usati secondo le consuetudini del contesto.
Attraverso $h_A$ tutta la categoria ***C*** è espressa in funzione dell'oggetto ***A***; cioè: nella categoria della pratica matematica ogni oggetto della categoria ***C*** che sta in relazione con ***A*** è espresso attraverso la sua relazione con ***A***, mentre ***A*** stesso è espresso dalla relazione con sé stesso. In questo contesto l'oggetto ***A***, come esso è concepito nella categoria C, non esiste; esso è sostituito dall'insieme di tutte le sue relazioni con il contesto. Tali relazioni sono date, nel modello, dall'insieme di tutti i funtori rappresentabili $F$: $\boldsymbol{C} \rightarrow \boldsymbol{Set}$. Allo stesso tempo, l'immersione fa emergere anche le controimmagini che l'ambiente rimanda dell'oggetto, che sono rappresentate nel modello dai prefasci $F$: $\boldsymbol{C}^{op} \rightarrow \boldsymbol{Set}$. Sulla base della Definizione 19 questo insieme di funtori (prefasci) è dunque l'oggetto matematico sintetico ***As***.
Secondo la prima assunzione di base del paragrafo 11.2., i prefasci sono identificati con delle attribuzioni di significato; quindi l'oggetto matematico sintetico ***As*** è l'insieme delle attribuzioni di significato che derivano dalle relazioni di ***A*** con altri oggetti matematici in ***C*** (funtori rappresentabili), ma anche da attribuzioni di significato che si basano sulle sue relazioni con altri oggetti, non necessariamente derivanti dalle relazioni presenti nella categoria ***C*** (prefasci).
Facciamo un esempio. Supponiamo che un matematico che non sappia che cosa asserisce il lemma di Yoneda, non ne conosca l'enunciato e non ne abbia mai sentito parlare, ma che osservi in che modo altri matematici ne parlano o ne scrivono, che veda come esso viene usato in alcuni contesti nella pratica matematica. Egli conoscerebbe l'oggetto "Lemma di Yoneda" per via sintetica, cioè attraverso le sue relazioni con il contesto, dove tale oggetto *è* l'insieme delle immagini che di esso rimanda il contesto. Questo oggetto, che nel diagramma (Figura 57) è indicato con ***As***, è rappresentato quindi dall'insieme dei prefasci che emergono in seguito all'immersione di Yoneda.
L'oggetto ***As*** è dunque l'oggetto matematico nel contesto della pratica matematica.
Vediamo ora come si inserisce la dimensione didattica in tutto ciò.
L'oggetto ***As*** si "trasforma" in oggetto della didattica della matematica nel momento in cui viene considerato in riferimento a un qualche risultato in didattica della matematica, cioè se vi sono delle ricerche riguardo a esso in tale ambito disciplinare. Questo aspetto è espresso attraverso il fatto che la categoria della pratica matematica viene "arricchita" creando la categoria prodotto (Definizione 20) tra essa e la categoria dei risultati della didattica della matematica (***RDdm***). Gli oggetti di tale categoria sono delle coppie ordinate di oggetti (***As; Rk***), dove ***As*** è l'oggetto matematico sintetico e $\boldsymbol{R_k}$ è un elemento della categoria ***RDdm***. I morfismi nella categoria prodotto sono coppie di morfismi tra tali coppie, che agiscono componente per componente. Per esempio, se ***As*** è l'oggetto "derivata",

ogni ricerca in didattica della matematica che si è occupata di ***As*** rappresenta, insieme ad ***As***, una coppia **(*As; Rk*)** che è un oggetto della categoria prodotto $\boldsymbol{Set^C} \times \boldsymbol{RDdm}$. In questo senso ciascuna coppia rappresenta un oggetto "derivata" nella categoria dei risultati della didattica della matematica. Tra tali oggetti ci sono delle relazioni e tali relazioni sono i morfismi della categoria.
Si pensi ora a una nuova immersione di Yoneda di tutta la categoria prodotto i cui oggetti sono degli oggetti della didattica della matematica in termini di risultati di ricerca riguardo a uno specifico oggetto matematico, nella categoria della pratica della didattica della matematica ($\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{Set}^{C}\times \boldsymbol{RDdm}}$). In tale contesto l'oggetto **(*As; Rk*)** "scompare" in maniera del tutto analoga a quanto già mostrato per l'oggetto ***A*** in ***Set***, grazie all'azione del funtore immersione di Yoneda. Anche qui, esso viene sostituito dalle sue relazioni con il contesto. In questo senso l'oggetto sintetico della didattica della matematica è, sulla base della Definizione 19, l'insieme dei prefasci che emergono dall'immersione della categoria prodotto precedentemente caratterizzata nella categoria che rappresenta la pratica della didattica della matematica. L'oggetto in questione è quindi sostituito dalle controimmagini che di esso rimanda il contesto (ricordiamo che l'immersione di Yoneda è in realtà un funtore rappresentabile contravariante da $\boldsymbol{C}^{op}$ a ***Set***), in termini di relazioni con esso, ed è indicato nel diagramma con ***ADs***.
Per esempio, l'oggetto matematico specifico della didattica della matematica "derivata" sarà dato da tutte le immagini che di esso rimanda l'ambiente della pratica della didattica della matematica, in termini di usi in contesto: l'oggetto "derivata" specifico della didattica della matematica è usato per esempio per analizzare e interpretare, in termini prasseologici, le attività in aula o per progettare attività in aula oppure per la formazione degli insegnanti oppure è studiato in riferimento ad altri oggetti matematici specifici della didattica della matematica, come per esempio quello di limite etc. L'insieme di tutti questi usi è l'oggetto didattico sintetico "derivata".
Dato che i funtori sono stati interpretati come attribuzioni di significato tramite la prima assunzione di base (paragrafo 11.2.), l'insieme dei prefasci che costituiscono l'oggetto sintetico, comprese le trasformazioni naturali tra essi, rappresenta un modello interpretativo, poiché in un contesto pragmatico l'attribuzione di significato richiede necessariamente un'interpretazione, non essendo il significato un fattore assoluto. Inoltre, dato che tale azione interpretativa si realizza in un movimento costante tra il significato generale attribuito al contesto e la singola interpretazione e che queste due dimensioni, locale e globale, si influenzano a vicenda, possiamo parlare di modello ermeneutico nel senso evidenziato nel paragrafo 10.5.1.
Nel senso qui esposto possiamo quindi dare ad $AD_s$ l'interpretazione riportata sotto il diagramma (Figura 57):

> $AD_s$ può essere interpretato come l'insieme delle significazioni (espresse tramite le concezioni, idee, rappresentazioni, …) e delle trasformazioni tra esse, di un soggetto

X (persona o istituzione) riguardo a un oggetto matematico in senso sintetico $A_s$ sulla base di un risultato $R_k$ in Ddm.
Se X è il ricercatore in Ddm, $AD_s$ è relativo alle significazioni e trasformazioni tra esse del ricercatore (o in generale della comunità scientifica a cui egli appartiene).
Se X è il ricercatore in Ddm che assume la posizione dell'epistemologo o del filosofo della Ddm, $AD_s$ è relativo alle significazioni e trasformazioni tra esse dell'epistemologo (o della comunità scientifica a cui egli appartiene).

◀

Possiamo notare che nella definizione costruttiva che abbiamo fornito non vi è una distinzione tra i diversi ordini di modello ermeneutico (del primo o del secondo ordine) e quindi manca la distinzione tra le dimensioni ontologiche interne alla didattica della matematica evidenziate nel paragrafo 8.2.
Per far emergere la distinzione tra modelli ermeneutici del primo e del secondo grado è necessario infatti pensare a un'ulteriore immersione di Yoneda (Figura 58).

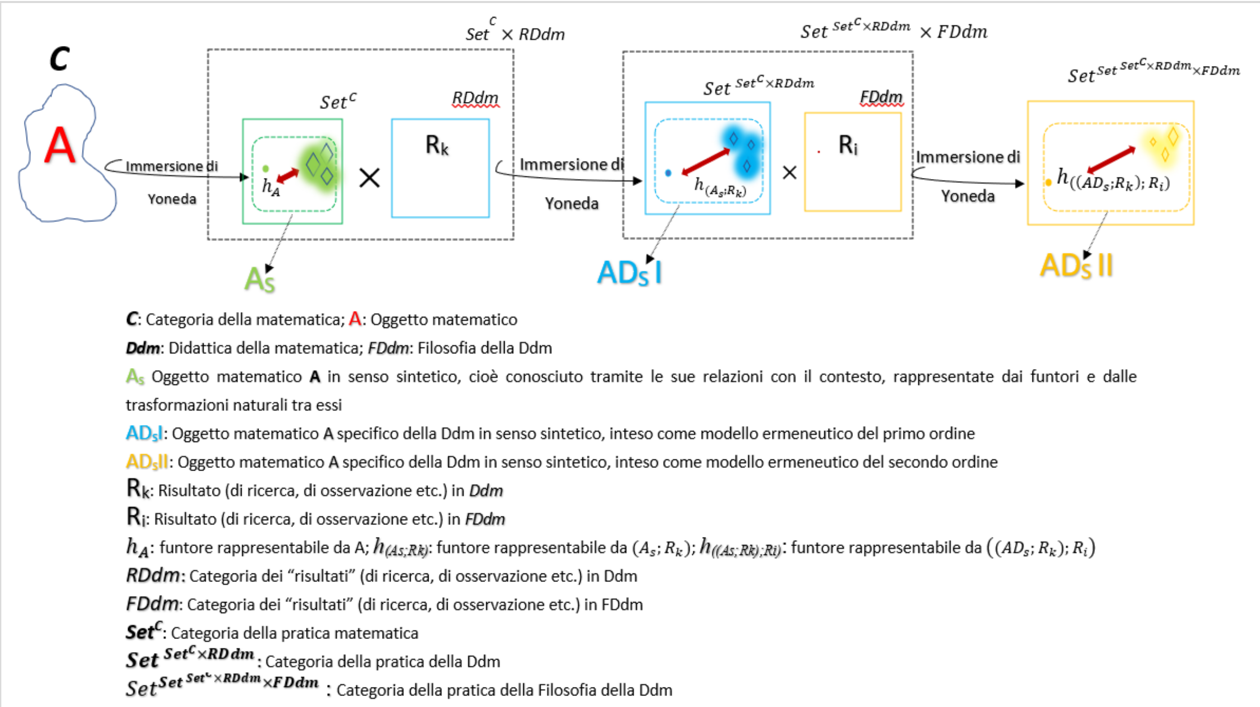



Figura 58. Modello di definizione generale di oggetto matematico specifico della didattica della matematica con messa in evidenza dei modelli ermeneutici del primo e del secondo ordine.[244]

[244] Riguardo al ruolo di $C$ e $C^{op}$ nel diagramma del modello di definizione, si veda la nota a piè di pagina nr. 242, a pagina 438.

**►Interpretazione (12)**

Immaginiamo di costruire ora un'altra categoria prodotto, in questo caso tra la categoria della pratica della didattica della matematica ($\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{Set}^{C}\times \boldsymbol{RDdm}}$) e la categoria dei risultati in filosofia della matematica (***FDdm***), e di immergere questa nella categoria della pratica della filosofia della didattica della matematica ($\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{Set}^{C}\times \boldsymbol{RDdm}}\times \boldsymbol{FDdm}}$).
Anche in questo caso gli oggetti della categoria prodotto sono delle coppie ordinate nelle quali il primo elemento è l'oggetto $\boldsymbol{AD_S}$ e il secondo elemento è un risultato a esso relativo in filosofia della didattica della matematica ($\boldsymbol{R_i}$); i morfismi anche in questo caso sono le relazioni tra questi oggetti, considerate componente per componente. L'oggetto matematico sintetico della filosofia della didattica della matematica che si ottiene dall'immersione ha le stesse caratteristiche di $\boldsymbol{AD_S}$, cioè è l'insieme dei prefasci che emergono dall'immersione. In questo caso abbiamo però distinto tra $AD_SI$ e $AD_SII$, che sono le due componenti ontologiche interne alla didattica della matematica e che rappresentano dei modelli ermeneutici del primo e del secondo ordine.
Esponiamo ora la seconda parte della definizione.

## 12. 2. 2. Due casi particolari del modello generale di definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica

Due casi particolari del modello appena fornito consentono di mettere in evidenza la relazione tra la dimensione formale degli oggetti matematici e la loro dimensione pragmatica nell'ambito della pratica matematica, nonché di inquadrare l'aspetto dinamico degli oggetti (sia matematici, sia matematici specifici della didattica della matematica).

***Caso I:*** $\boldsymbol{C} = \{\cdot\}$
Se $\boldsymbol{C} = \{\cdot\}$ allora $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{Set}^{\cdot}$, cioè se $\boldsymbol{A}$ è l'unico oggetto della categoria $\boldsymbol{C}$, allora non vi sono morfismi (tranne il morfismo identità) che possono consentire di conoscerlo per via sintetica; in questo caso si ha che il funtore rappresentabile $\boldsymbol{h_A}$ coincide con $id_A$, cioè con il morfismo identità. Quindi l'oggetto $\boldsymbol{A}$ è visto in questo caso solo da una prospettiva analitica come oggetto in sé, ed è formalmente un insieme con una qualche proprietà che lo caratterizza.
Possiamo affermare che in questo modo si crea una frattura tra l'aspetto formale della matematica e la realtà dell'attività in aula di matematica (e anche rispetto a quella della pratica matematica stessa, naturalmente). Per evitare tale frattura è importante mettere in evidenza la relazione tra oggetto in senso sintetico e oggetto in senso analitico e l'importanza della conoscenza per via sintetica che abbiamo dimostrato essere una conoscenza "potenzialmente completa" e "affidabile".

Questo non significa che non si debba conoscere l'aspetto analitico dell'oggetto come oggetto in sé, rappresentato dalla sua definizione formale, ma che questa è secondaria rispetto alla conoscenza in contesto.

***Caso II:*** ***C***=**K**, dove K è una categoria nella quale è possibile stabilire un ordinamento.
Se ***C***=**K** allora $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{Set}^{\mathbf{K}}$ e l'ordinamento consente di introdurre un'evoluzione temporale, cioè una componente di dinamicità, nel modello di definizione. La categoria **K** può essere la categoria dei modelli di Kripke, i quali sono dei modelli intuizionistici non deterministici che consentono di tenere conto sia dell'evoluzione temporale sia delle relazioni logiche.[245]
Nell'immagine in figura (Figura 59) è rappresentata la situazione che si ottiene inserendo la componente dinamica nel modello. L'insieme dei prefasci che emergono in seguito all'immersione di ***C*** in ***Set*** e della "controreazione" del funtore contravariante da $\boldsymbol{C}^{op}$ a ***C***, sono degli insiemi che evolvono nel tempo, sono cioè degli *insiemi variabili*.

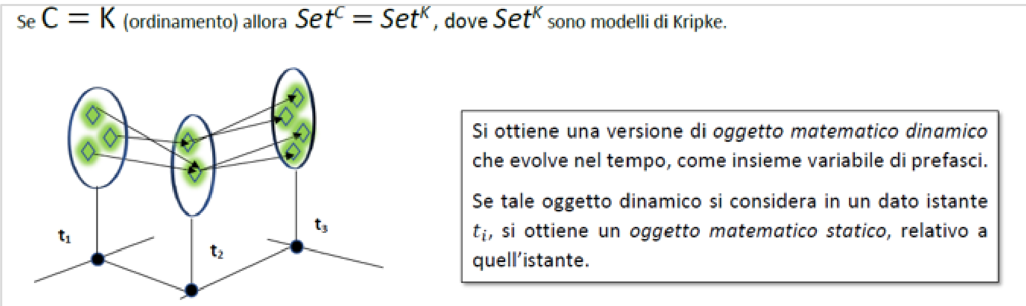



Figura 59. Secondo caso particolare del modello di definizione riferito all'oggetto matematico: C=K, con K modello di Kripke.

In maniera analoga si può pensare di introdurre un ordinamento anche in $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{Set}^{C}\times \boldsymbol{RDdm}}$ e in $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{Set}^{C}\times \boldsymbol{RDdm}}\times \boldsymbol{FDdm}}$, supponendo che $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{C}} \times \boldsymbol{RDdm}$ e $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{Set}^{C}\times \boldsymbol{RDdm}} \times \boldsymbol{FDdm}$ siano ordinabili.
Nell'immagine (Figura 60) abbiamo rappresentato il primo di questi due casi che si riferisce alla definizione del modello generale, in cui non sono distinti i modelli ermeneutici del primo e del secondo ordine, ma la situazione si presenterebbe in maniera del tutto analoga, ponendo solo $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{Set}^{C}\times \boldsymbol{RDdm}} \times \boldsymbol{FDdm} = \mathrm{K}$ e quindi

[245] I modelli di Kripke verranno esposti in dettaglio nel paragrafo 13.2.2., nel quale tali modelli saranno presentati come elementi del modello SKTR (Zalamea, 2021).

ottenendo $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{Set}^{Set^{C}\times \boldsymbol{RDdm}}\times \boldsymbol{FDdm}} = Set^{\mathrm{K}}$, dove $Set^{\mathrm{K}}$sono modelli di Kripke. In questo caso avremmo dunque l'oggetto matematico specifico della didattica della matematica nella sua versione completa, in cui sono presenti tutti i livelli ontologici: quello relativo alla matematica, quello relativo alla didattica della matematica come prassi e quello relativo alla filosofia (o epistemologia) della didattica della matematica.

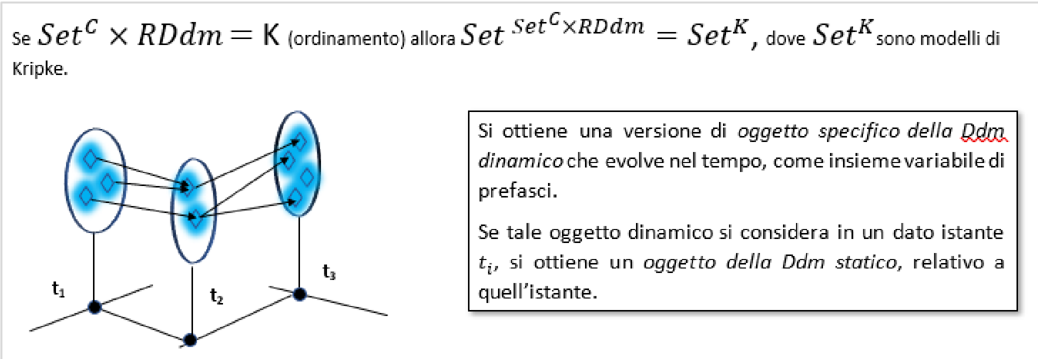



Figura 60. Secondo caso particolare del modello di definizione riferito all'oggetto matematico specifico della didattica della matematica: $\mathrm{Set}^{\mathrm{C}}\times\mathrm{RDdm} = \mathrm{K}$, con K modello di Kripke.

Notiamo dunque che attraverso l'inserimento di un ordinamento nella categoria "base" è possibile dinamicizzare gli insiemi di prefasci ottenendo così un modello in cui le attribuzioni di significato evolvono nel tempo e possono dunque rappresentare il *processo* di acquisizione di conoscenza.
Se si considerano invece solo delle "immagini istantanee" si hanno degli insiemi statici di prefasci e quindi l'attribuzione di significato e la conoscenza sono riferite solo a un dato istante.
Notiamo che in realtà, introducendo una topologia attraverso i modelli di Kripke, non possiamo più parlare di prefasci, ma dovremmo parlare di fasci. Per ora non ci soffermiamo però su questo aspetto, dato che non è essenziale per il modello di definizione qui fornito. Mettiamo in evidenza anche un altro aspetto importante: mentre è facile pensare a un ordinamento nella categoria ***C***, che è la categoria della matematica, la cosa non è così banale per quanto riguarda la possibilità di stabilire un ordinamento nelle categorie riferite alla didattica della matematica. Questo è quindi un aspetto interessante da approfondire tramite ricerche future.
Tornando al modello di definizione fornito, possiamo affermare che i modelli ermeneutici corrispondono a delle immersioni di Yoneda. Dalla Modellizzazione (1) sappiamo che una metafora strutturale è in realtà un'immersione basata su un'analogia. Quindi i modelli ermeneutici possono essere visti come delle

metafore strutturali e quindi, in ultima istanza, gli oggetti sintetici sono delle metafore strutturali basati su una qualche analogia.
Questo significa che l'oggetto matematico specifico della didattica della matematica è una metafora strutturale dell'oggetto matematico corrispondente.
Per esempio, la dimostrazione in didattica della matematica è una metafora strutturale della dimostrazione in matematica che si basa su una qualche analogia tra un frammento della matematica e un frammento della didattica della matematica.
Per determinare la natura dell'oggetto matematico specifico della didattica della matematica è quindi necessario individuare l'analogia sulla quale si basa la metafora che lo costituisce. Nello studio di questo aspetto sono indispensabili gli strumenti categoriali del quadro teorico e in particolare la definizione fornita, in quanto in essa emergono le relazioni metaforiche tra le diverse componenti ontologiche degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica. Infatti, è l'analogia tra un frammento della teoria delle categorie, costituito dalle 20 definizioni e 3 proposizioni finora esposte, che formano il modello matematico per il quadro teorico, e un frammento della didattica della matematica, che ha permesso tale emersione.

## 12. 3. Conclusioni

Nel presente capitolo abbiamo fornito il modello generale di definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica e abbiamo discusso un caso particolare che ha permesso di chiarire le relazioni tra gli oggetti matematici in senso analitico, cioè come oggetti formali a sé stanti, e gli oggetti matematici sintetici, nonché le relazioni tra gli oggetti matematici e gli oggetti della didattica della matematica, mostrando in che modo è possibile modellizzare i diversi livelli ontologici.
Abbiamo esaminato anche un secondo caso particolare del modello di definizione che consente di introdurre una dimensione dinamica nel modello, accanto a quella statica.
Se torniamo all'Interpretazione (10) del capitolo 11, possiamo notare come il secondo caso qui discusso rappresenti fedelmente l'evoluzione nel tempo degli insiemi semiotici nel *semiotic bundle* (Arzarello, 2006): gli insiemi semiotici pensabili come insiemi di prefasci (gli ovali in Figura 60), in cui ogni prefascio rappresenta un qualche genere di significazione (secondo la nostra prima assunzione di base formulata nel paragrafo 11.2.). Tale significazione può essere espressa tramite gesti, segni grafici, parole etc.; le relazioni tra gli insiemi di prefasci, cioè tra gli insiemi semiotici (che nel paragrafo 11.2. abbiamo identificato con le trasformazioni semiotiche) sono rappresentate dalle trasformazioni tra i prefasci (le frecce che congiungono gli ovali nella Figura 60).

La componente cronologica, introdotta da noi tramite l'idea di modelli di Kripke, è sottintesa nel *semiotic bundle* attraverso il concetto della dinamicità degli insiemi semiotici.
Nel capitolo 11.2. avevamo anche messo in evidenza il fatto che tra la prospettiva duvaliana (Duval, 2006) dei registri semiotici e quella arazarelliana (Arzarello, 2006) del *semiotic bundle* rimane irrisolto, a nostro avviso, il problema della diversità della modalità di attribuzione di significato agli oggetti, in quanto nel caso di Duval il significato del segno dipende dal ruolo che esso assume nei confronti degli altri segni, come avviene nei registri semiotici del linguaggio matematico, in una giustapposizione tra segni "concorrenti", mentre questo aspetto non può essere colto se si esce dai registri semiotici, come avviene nel *semiotic bundle*. Per riuscire a cogliere la relazione tra queste due posizioni è necessario considerare non degli insiemi di prefasci, ma degli insiemi di fasci, in cui si tiene conto anche di uno spazio di proiezione.
Questo argomento costituirà un argomento da approfondire in future ricerche. Nel successivo e ultimo capitolo della tesi forniamo però alcuni strumenti tecnici che saranno utili in tale direzione, dunque prefigurandola.

## Risposta alla domanda di ricerca D3

La risposta alla terza domanda di ricerca:

*D3. È possibile fornire una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica nel contesto teorico individuato (D2) che tenga conto dei criteri individuati (D1)?*

è stata fornita nel capitolo precedente.
Riassumiamo brevemente gli elementi emersi in tale sede.
La definizione fornita nel capitolo 12 è formulata nell'ambito del quadro teorico costruito, elaborato e fondato matematicamente nei capitoli 10 e 11, che hanno fornito la risposta alla domanda di ricerca *D2* e quindi in questo senso la risposta alla domanda di ricerca *D3* è affermativa.
Ribadiamo che si tratta di un modello molto generale e astratto. Questo aspetto è emerso a seguito della ricerca di generalità [criterio (4'') per la definizione]. Esso ha il vantaggio di offrire la possibilità di diverse interpretazioni, non necessariamente identiche a quella da noi fornita. Questo aspetto può essere visto anche come uno svantaggio, dato che il modello necessita di un'interpretazione per poter essere usato in didattica della matematica. Riteniamo però che una volta fissata una interpretazione, il vantaggio di poter sfruttare le relazioni generali che emergono dal modello di definizione sono molto maggiori rispetto allo svantaggio dovuto alla sua mancanza di determinazione completa.
Esaminiamo brevemente se la definizione soddisfa i criteri (1'') – (7'') evidenziati nel paragrafo 10.1. che riportiamo qui per comodità del lettore.

(1'') dinamicità/staticità e transitorietà degli oggetti matematici e della didattica della matematica;
(2'') distinzione tra oggetti matematici e oggetti matematici specifici della didattica della matematica nonché esplicitazione della relazione degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica con la versione istituzionale formale degli oggetti matematici;
(3'') distinzione tra i due livelli interpretativi degli oggetti matematici specifici della didattica della matematica come modelli ermeneutici del primo o del secondo ordine;
(4'') assoluta generalità, cioè indipendenza da una specifica teoria dell'apprendimento o da assunzioni relative a singoli approcci o teorie in didattica della matematica;
(5'') necessità di tenere conto del fatto che gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica sono dei complessi concettuali che si costituiscono in reti che evolvono nel tempo sulla base di certe relazioni semantiche che rappresentano una sorta di sintassi;
(6'') necessità di tenere conto della dimensione semiotica;
(7'') necessità di tenere conto di un approccio pragmatico agli oggetti matematici, considerando il contesto.

Il criterio (1’’) è soddisfatto sulla base della considerazione del secondo caso particolare del modello di definizione, che consente di unire gli aspetti dinamici e statici e di tenere quindi conto di un’ontologia transitoria. In questo senso questo tipo di ontologia è accettabile sia da parte di teorie che hanno una visione statica degli oggetti di ricerca e in cui la teoria è vista come un contesto in cui fare ricerca (modello generale), sia da parte di teorie che hanno una visione dinamica degli oggetti di ricerca e in cui la teoria è vista come uno strumento che evolve nel tempo e collega diverse teorie tra loro (secondo caso particolare del modello generale).
Il criterio (2’’) è soddisfatto dal modello generale di definizione che mette in evidenza come gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica si ottengono a partire dalla pratica matematica, nella quale gli oggetti sono degli oggetti sintetici, associando loro dei risultati provenienti dalla ricerca della didattica della matematica come disciplina. Anche gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica sono conosciuti e studiati come oggetti sintetici, tramite l’immersione della categoria dei risultati di ricerca in didattica della matematica nella categoria della pratica di tale disciplina. Il primo caso particolare del modello di definizione fornisce inoltre una spiegazione della relazione che si crea tra l’oggetto matematico nella sua versione formale, inteso come oggetto a sé stante, e l’oggetto matematico specifico della didattica della matematica, ma solo tramite la considerazione della pratica matematica, in quanto essa *media* il rapporto tra la matematica e la didattica della matematica.
Il criterio (3’’) è soddisfatto, in quanto i modelli ermeneutici emergono tramite le immersioni di Yoneda. In questo senso notiamo che anche gli oggetti matematici sintetici sono in realtà dei modelli ermeneutici, mentre noi abbiamo supposto che essi possano essere considerati come oggetti aventi un’esistenza oggettiva per la didattica della matematica. Dal modello di definizione emerge invece che nel rapporto tra matematica e didattica della matematica non è possibile prescindere dalla dimensione pragmatica degli oggetti matematici.
Il criterio (4’’) è soddisfatto per via della generalità del linguaggio in cui è fornito il modello che può dunque essere considerato assolutamente generale. A livello interpretativo il modello di definizione richiede che si accetti la seconda assunzione interpretativa di base, messa in evidenza nel paragrafo 11.2., cioè che attribuire significato significa conoscere. Ci sembra che si tratti di un aspetto che sia accettabile da parte di teorie dell’apprendimento anche molto diverse tra loro e che quindi non riduca in maniera significativa il livello di generalità del modello di definizione.
Il criterio (5’’) è stato discusso in riferimento alla risposta alla seconda domanda di ricerca e il presente capitolo non ha aggiunto nuovi elementi a tale proposito. Infatti, riguardo a questo criterio non possiamo affermare per ora altro se non che il linguaggio categoriale nel quale è stato formulato il modello di definizione è un linguaggio relazionale e quindi è in grado di cogliere la caratteristica relazionale dei complessi concettuali. Per ora non ci è possibile articolare meglio questo aspetto, ma esso verrà approfondito attraverso future ricerche più specifiche.

Il criterio (6'') è soddisfatto per i motivi già ampiamente discussi in precedenza, dato che gli insiemi di prefasci sono interpretabili come insiemi semiotici nel senso del *semiotic bundle*; inoltre, se si considera il concetto di fascio, che qui non abbiamo ancora discusso, è possibile trovare una conciliazione "tecnica" tra il *semiotic bundle* e i registri semiotici in matematica.
Il criterio (7'') è soddisfatto e il significato pragmatico degli oggetti ottiene nel modello proposto un'articolazione tecnica che consente di produrre anche una prova matematica per la sua validità gnoseologica come base per l'acquisizione di conoscenza.

# 13. Strumenti metodologici

Nel presente capitolo, che rappresenta un'integrazione al lavoro di tesi, esporremo il modello *SKTR* (Zalamea, 2021), il quale si presenta come un insieme di strumenti tecnici in accordo con il quadro teorico fornito nei capitoli 10 e 11 che consente di rendere operativo sia il quadro teorico sia il modello di definizione fornito nel capitolo 12, in prospettiva di ricerche future.
Il modello che proponiamo non nasce in didattica della matematica, ma nell'ambito della filosofia della matematica; tuttavia, come scrive Ernest, nel suo testo *An Overview of Philosophy of Mathematics Education*: "A 'top down' approach might use instead the abstract branches of philosophy to provide the conceptual framework for analysis" (Ernest, 2016, p. 6).
Riteniamo che il nostro possa essere inquadrato effettivamente come un approccio "top down", cioè come un'elaborazione teorica astratta che può essere proiettata sui diversi livelli della pratica della didattica della matematica come disciplina, e che quindi il ricorso in esso a strumenti provenienti dalle "branche astratte" della filosofia (della matematica) sia giustificato. Inoltre, ove possibile, gli strumenti generali del modello *SKTR* possono essere integrati localmente con strumenti metodologici derivanti dalla didattica della matematica. In tale senso ci riferiamo soprattutto alle strategie di networking di teorie (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008), ripetutamente citate nel corso della tesi.
Come già evidenziato, il modello *SKTR*[246] (Zalamea, 2021) nasce come strumento d'analisi e sintesi nella filosofia sintetica della matematica contemporanea (Zalamea, 2009/2012a). Tale modello fa ricorso a strumenti matematici, il cui uso in quel contesto è però puramente concettuale e metaforico. L'applicazione degli strumenti matematici è quindi basata su metafore strutturali nel senso definito nel capitolo 10.

## 13. 1. Questioni metodologiche

Dato che l'obiettivo è quello di rendere accessibili i risultati del presente lavoro a un pubblico più vasto possibile e non essendo il linguaggio matematico formale (né insiemistico né categoriale) il linguaggio consueto delle ricerche in didattica della matematica, in accordo con quanto discusso nel capitolo 10, nell'esposizione dei concetti matematici coinvolti abbiamo scelto di procedere come segue:

[246] In realtà l'acronimo usato da Zalamea (2021) è *RTHK*, dove *H* sta per *Haces* ("fasci" in spagnolo), ma in questa sede preferiamo ricorrere all'acronimo *STKR*, dove *S* sta per *sheaves* ("fasci" in inglese) e dove l'ordine di citazione delle componenti si basa sulla loro posizione in ordine cronologico nella costruzione del modello.

- fornire una descrizione informale, intuitiva, mettendo in evidenza le caratteristiche che sono fondamentali per un uso concettuale metaforico degli oggetti coinvolti, supportando tali descrizioni, ove necessario, con opportune rappresentazioni grafiche ed esempi;
- fornire le definizioni matematiche dopo aver introdotto i concetti in maniera informale oppure discutere in maniera informale il significato delle definizioni, dopo averle proposte;
- spiegare sulla base di un esempio tratto dalla tesi come possono essere applicati tali strumenti, mettendo in evidenza le caratteristiche che li rendono degli strumenti concettuali universali.

Riteniamo che questo modo di procedere sia giustificato dal fatto che la presente tesi si colloca concettualmente nell'ambito della didattica della matematica, in quanto affronta argomenti di pertinenza di questa disciplina, ma dall'altro lato ricorre a strumenti matematici che hanno una loro collocazione formale in matematica. Essa deve dunque tenere conto dei linguaggi specifici delle due discipline, cercando di coniugarli nella maniera più armoniosa e corretta possibile. Ribadiamo infine che il ricorso agli strumenti matematici esposti nel presente capitolo si basa su un'analogia stabilita tra un frammento della filosofia sintetica della matematica e un frammento della filosofia della didattica della matematica, sulla base della quale possiamo ricorrere a un uso metaforico di tali strumenti. Infatti, a tale proposito è sufficiente pensare le relazioni espresse nei diagrammi della Figura 47 e della Figura 48, sostituendo la categoria ***CT*** con la categoria ***FSM*** (categoria della filosofia sintetica della matematica) e la categoria ***C*** con un opportuno frammento di ***FSM***, in questo caso il modello *SKTR*.

## 13. 2. Il modello *SKTR*

Il modello completo (*SKTR*) è costituito da quattro elementi: *S* (*Sheaves*, cioè Fasci), *K* (*Kripke models*, cioè Modelli di Kripke), *T* (*Topoi*), *R* (*Riemann surfaces*, cioè superfici di Riemann).
Introduciamo l'uso metaforico concettuale di questi strumenti attraverso quelli che Zalamea (2021) chiama "i quattro gesti basici" del modello, tramite i quali è brevemente caratterizzato il ruolo di ciascuna delle quattro componenti:

> Utilizaremos cuatro gestos básicos (…): (i) pensar, "pesar" en su origen etimológico, es decir, ascender y descender en una escala de pesos; (ii) discurrir, dinamizar el pensamiento (…); (iii) invertir, girar hacia el revés; (iv) ramificar, abrir hacia la multiplicidad. [Useremo quattro gesti base (…): (i) "pensare" nella sua origine etimologica, cioè ascendere e discendere su una scala di pesi; (ii) discorrere, dinamizzare il pensiero (…); (iii) invertire, girare al contrario; (iv) ramificare, aprire verso la molteplicità]. (Zalamea, 2021, p. 44, traduzione nostra)

Ciascuno dei "gesti" simbolici descritti nei punti (i)-(ii)-(iii)-(iv) della citazione corrisponde all'azione di una delle componenti del modello *SKTR*:
*S* – (i): l'azione (o "gesto") compiuto tramite il *fascio* (*S*) corrisponde al pensiero matematico, nel senso di un "soppesare" ascendente e discendente su una scala di valori, in un'interazione tra *tipi* e *sottotipi*.[247]
*K* – (ii): l'azione (o "gesto") compiuto tramite il *modello di Kripke* (*K*) corrisponde a una dinamicizzazione del pensiero espresso tramite il fascio, la quale genera una molteplicità di fasci, visti come dei tipi;
*T* – (iii): l'azione (o "gesto") compiuto tramite il *Topos* (*T*) corrisponde a un'inversione della dinamica precedente, cioè a un'unificazione della molteplicità in proprietà generali che fanno emergere degli archetipi;
*R* – (iv): l'azione (o "gesto") compiuto tramite la *superficie di Riemann* (*R*) corrisponde a un ramificare, a un'apertura verso la molteplicità delle concretizzazioni.
Anche se le quattro componenti costituiscono un modello per la filosofia della matematica completo e potente, come mostrato attraverso numerosi esempi da Zalamea (2021), in realtà è possibile usare anche versioni parziali del modello, costituite anche da una sola, da due o da tre componenti, come per esempio il modello *S*, che ricorre solo al concetto di fascio, oppure il modello *SK*, che ricorre solo ai fasci e ai modelli di Kripke, oppure ancora il modello *SKT*, costruito a partire dai concetti di fascio, di modello di Kripke e di topos.
Di seguito caratterizzeremo in dettaglio (sia dal punto di vista puramente concettuale che dal punto di vista più strettamente matematico) ciascuna di queste quattro componenti.

---

[247] Qui per *tipo* intendiamo un caso caratteristico di un determinato genere, mentre per *sottotipo* intendiamo un caso specifico, un'istanziazione, di un tipo. Esempi di tipi potrebbero essere le definizioni per genere prossimo e differenza specifica, per astrazione, costruttiva, per ricorrenza etc., mentre un esempio di sottotipo del tipo definizione per genere prossimo e differenza specifica sarebbe una qualsiasi definizione di questo genere, come per esempio quella di parallelogramma: un trapezio (genere prossimo) avente entrambe le coppie di lati opposti paralleli (differenza specifica rispetto agli altri trapezi). Un sottotipo del tipo definizione per ricorrenza sarebbe invece qualsiasi definizione per ricorrenza, come per esempio quella della successione di Fibonacci: $a_n := \begin{cases} 1 \; se \; n = 0 \\ 1 \; se \; n = 1 \\ a_{n-1} + a_{n-2} \; se \; n \geq 2 \end{cases}$. Oltre ai concetti di tipo e sottotipo faremo riferimento soprattutto al concetto di *archetipo*, nel senso di un modello generale di tipi. Vi è una fondamentale differenza in termini di generalità tra l'idea di tipo e di archetipo. Facendo riferimento all'esempio precedente, un esempio di archetipo sarebbe un *modello* di definizione matematica, in cui si evidenziano le caratteristiche imprescindibili che una definizione matematica deve possedere, come per esempio quella di poter fungere da "elemento di garanzia" nelle dimostrazioni. Un altro esempio di archetipo potrebbe essere quello di funzione, dove il concetto di funzione algebrica o di funzione trascendente sarebbero dei tipi, mentre $y = 2x^2 + x$ sarebbe un esempio di sottotipo del tipo "funzione algebrica".

### 13. 2. 1. Il pensiero (matematico) come fascio: il modello *S*

La prima componente (*S*) del modello *SKTR* è, come già evidenziato, quella riferita al concetto di fascio. Il suo ruolo consiste nel cogliere le caratteristiche generali del pensiero matematico; ma non solo. Infatti, anche se in Zalamea (2021) il modello è usato solo per l'analisi del pensiero matematico, l'Autore sottolinea che il suo lavoro si fonda su un assunto fondamentale: che tale modello sia in realtà un modello in grado di caratterizzare il pensiero in generale:

> En efecto, una de nuestras hipótesis básicas (…) consiste en asumir una estrecha simbiosis entre el pensamiento matemático y el pensamiento en general, como si el primero fuese una suerte de destilación arquetípica de los distintos alcoholes típicos de la cultura. [In effetti, una delle nostre ipotesi di base (…) consiste nell'assumere una stretta simbiosi tra il pensiero matematico e il pensiero in generale, come se il primo fosse una sorta di descrizione archetipica dei distinti spiriti tipici della cultura]. (Zalamea, 2021, p. 45, traduzione nostra)

In questo senso, quello che abbiamo chiamato "l'uso metaforico" degli strumenti matematici risulta dall'analogia che Zalamea stabilisce tra il pensiero matematico e il pensiero in generale e, nel caso specifico del presente lavoro, dall'analogia che intendiamo proporre tra l'applicazione concettuale di questi strumenti in filosofia della matematica e in filosofia della didattica della matematica.
Caratterizziamo brevemente il funzionamento della componente *S* del modello, al fine di consentire di cogliere le sue potenzialità come strumento concettuale universale.
Una delle caratteristiche principali del pensiero matematico è data dall'alternarsi di due movimenti contrapposti e complementari che potremmo descrivere come segue:

(1) uno consistente in un movimento discendente di proiezione di tipi, concetti, idee astratte, intuizioni, appartenenti a quello che potremmo chiamare lo spazio concettuale [chiamato anche "spazio alto" (Zalamea, 2021, p. 57)], su quello che potremmo chiamare lo spazio delle tecniche, dei risultati, dei teoremi, delle definizioni, degli esempi [(chiamato anche spazio "spazio basso" Zalamea, 2021, p. 56)];
(2) un altro consistente in un movimento ascendente di riflesso di controimmagini di tipo funzionale delle proiezioni dallo spazio delle tecniche e dei risultati allo spazio concettuale, in cui si generano relazioni tra concetti, idee, intuizioni, per esempio sotto forma di nuovi metodi etc.

Lo spazio "basso", cioè quello delle tecniche, può essere pensato anche come lo spazio in cui si collocano gli strumenti deduttivi, ma anche quelli induttivi, mentre quello "alto", che abbiamo chiamato "concettuale", è lo spazio in cui si collocano gli strumenti abduttivi.
I due movimenti appena descritti coinvolgono un costante andare e venire tra il concreto e l'astratto, tra il definito e l'indefinito, tra il concetto e l'oggetto, in cui

il primo movimento, quello discendente, proiettivo, appare come un *ripiegamento*, una riduzione all'essenziale, della ricchezza concettuale, al fine di poter applicare e sviluppare tecniche nuove o applicarne delle già esistenti; mentre il secondo movimento, quello ascendente, del riflesso delle controimmagini funzionali, appare come uno *spiegamento* del potenziale creativo nascosto nelle tecniche, nelle definizioni, nei risultati in generale, per la costruzione di relazioni tra concetti, idee e intuizioni (Zalamea, 2021, p. 54).
La definizione di fascio come oggetto matematico, che forniremo successivamente, fa propri questi concetti universali del pensiero, non solo matematico.

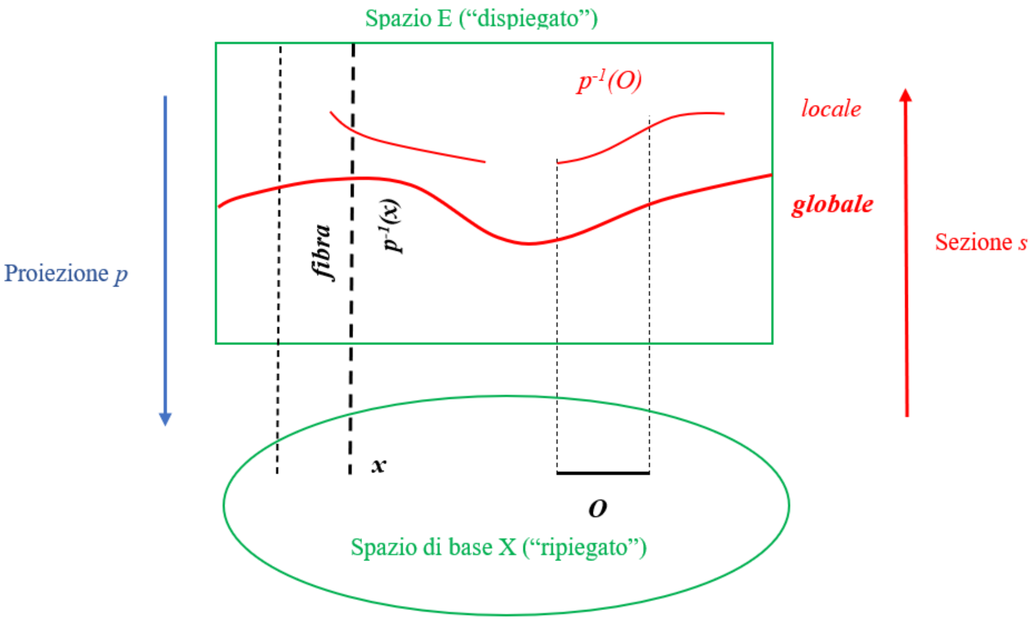



Figura 61. Un fascio con i due spazi, la proiezione, le fibre e le sezioni (adattato da Zalamea, 2021, p. 54).

Infatti, un fascio è costituito da:

(1) *due spazi topologici, uno considerato come spazio "alto"* (nel nostro ragionamento è lo spazio concettuale e nella Figura 61 è rappresentato tramite il rettangolo verde*), uno considerato come spazio base o "basso"* (nel nostro ragionamento è lo spazio delle tecniche e degli oggetti e nella Figura 61 è rappresentato tramite l'ovale verde);

(2) *una proiezione (p) dallo spazio "alto" allo spazio "basso"* (nel nostro ragionamento è la proiezione dei concetti, delle idee, delle intuizioni e nella Figura 61 è rappresentata tramite la freccia blu);
(3) *una funzione $p^{-1}$ che è un'inversa della proiezione $p$*[248] e che soddisfa certe condizioni di continuità[249] (nel nostro ragionamento è la controimmagine della proiezione che consente di individuare le relazioni che generano l'evoluzione concettuale nello spazio "alto", al variare delle tecniche e degli oggetti nello spazio "basso"; nella Figura 61 è rappresentata sia dai segmenti neri tratteggiati, i quali sono la controimmagine puntuale di un singolo elemento dello spazio base e sono chiamate *fibre*, sia dai tratti di curva sottili in colore rosso, che sono la controimmagine funzionale su un intorno di un punto dello spazio base e sono chiamate *sezioni locali* del fascio).

Un aspetto importante del pensiero (matematico) è quello di cercare un senso più ampio nei ragionamenti, creando reti di concetti, a volte estendendole fino a formare vere e proprie teorie. Questa caratteristica importante del pensiero è individuata nel fascio tramite il concetto di sezione globale, rappresentata in Figura 61 attraverso la curva rossa trasversale. Così come la ricerca di un senso più ampio di un ragionamento si ottiene tramite l'individuazione di relazioni tra concetti già noti (per esempio ricorrendo ad analogie o abduzioni che fanno intuire delle compatibilità, che poi devono essere dimostrate o confutate sul piano tecnico), così nel fascio le sezioni locali si possono "incollare" se sono compatibili, cioè se coincidono su una parte dei loro domini. Di seguito forniamo una definizione costruttiva di fascio (topologico), tratta da Zalamea (2021), che concretizza e spiega i concetti finora esposti:

> **Definizione 21.** Un haz (topológico) está conformado por (i) dos espacios topológicos $X$ (base) y $E$ (despliegue), (ii) una proyección $p: E\rightarrow X$, del espacio "alto" en el espacio "bajo", (iii) una condición de homeomorfismo local para $p$ (…). Las fibras de un haz son las inversas puntuales $p^{-1}(x)$, donde $x$ recorre los elementos del espacio base $X$. [Un fascio (topologico) è costituito da (i) due spazi topologici[250] $X$ (base) ed $E$ (dispiegamento), (ii) una proiezione $p$: $E\rightarrow X$, dallo spazio "alto" allo spazio "basso", (iii) una condizione di omeomorfismo locale per $p$. Le fibre del fascio sono le inverse puntuali $p^{-1}(x)$, dove $x$ varia sugli elementi dello spazio base $X$]. (Zalamea, 2021, p. 54, traduzione nostra) (Si veda la Figura 61)

[248] Per la precisione si tratta di un'inversa sinistra della proiezione $p$.
[249] L'inversa sinistra $p^{-1}$ della proiezione $p$ deve preservare localmente le caratteristiche dello spazio base nello spazio "alto", deve cioè essere un *omeomorfismo locale.* Infatti, un omeomorfismo è una funzione tra spazi topologici che consente di catturare l'idea di una deformazione "senza strappi" del primo spazio nel secondo, mentre un omeomorfismo locale è una funzione continua che si comporta (almeno) localmente come un omeomorfismo.
[250] Uno spazio topologico *$(X, T)$* è dato da un insieme $X$ su cui è definita una topologia $T$. Una topologia $T$ è una collezione di sottoinsiemi di $X$ tali che l'insieme vuoto e $X$ appartengono a $T$ e tale che sia l'unione che l'intersezione di elementi di $T$ sono elementi di $T$.

A partire dalla discussione introduttiva dell'argomento e dalla definizione costruttiva di fascio possiamo notare che ci sono due aspetti fondamentali che caratterizzano questo concetto e costituiscono la sua forza di strumento di analisi e sintesi: uno legato al ruolo della proiezione ($p$), che qui chiameremo "aspetto verticale", e uno legato al ruolo delle sezioni, che qui chiameremo "aspetto orizzontale". Queste due caratteristiche possono essere collegate come segue alla terminologia usata nella definizione:

> De esta primera manera, el haz se ve como despliegue vertical sobre $X$. Por otro lado, allende lo puntual, la problemática fundamental de los haces consiste en conocer sus secciones, es decir, las inversas funcionales de la proyección: $s(O) = p^{-1}(O)$ (sección local sobre una vecindad $O$), o $s(X) = p^{-1}(X)$ (sección global sobre el espacio $X$). [In questa prima maniera, il fascio si vede come dispiegamento sopra $X$. D'altro lato, oltre il puntuale, la problematica fondamentale dei fasci consiste nel conoscere le loro sezioni, cioè le inverse funzionali della proiezione: $s(O) = p^{-1}(O)$ (sezione locale sopra un intorno $O$), o $s(X) = p^{-1}(X)$ (sezione globale sopra lo spazio $X$[251]]. (Zalamea, 2021, p. 54, traduzione nostra)

L'aspetto verticale fa sì che il fascio, nel suo insieme, possa essere visto (Figura 59) come uno spiegamento verticale sopra lo spazio base $X$: infatti, a ogni $x \in X$ corrisponde una fibra i cui elementi sono delle "molteplicità" che attraverso la proiezione $p$ sono associate puntualmente a $x$. Dunque, da un lato la fibra rappresenta il dispiegamento di $x$ in $E$, dall'altro lato $x$ è l'immagine del ripiegamento della fibra $p^{-1}(x)$ in $X$. Questo significa che l'aspetto verticale contribuisce alla conoscenza dello spazio "alto" $E$ attraverso le sue proiezioni puntuali sullo spazio "basso" $X$.
L'aspetto orizzontale, invece, fa sì che il fascio, nel suo insieme, possa essere visto come uno spiegamento orizzontale sopra lo spazio di base $X$, in quanto a ogni aperto $O$ di $X$ corrisponde una funzione che è intesa come inversa funzionale di $p$ (Figura 61). Tale inversa funzionale esprime il variare degli elementi in $E$ al variare degli elementi in $O$. Questo significa che l'aspetto orizzontale del fascio consente di conoscere le caratteristiche di $E$ stabilendo, ove possibile, relazioni tra

[251] Premettiamo che un *ricoprimento* di un insieme $X$ è dato da una famiglia di insiemi tale che $X$ è incluso nell'unione della famiglia di insiemi. Il concetto di individuazione di *sezioni globali* a partire da dati locali è espresso sulla base di due assiomi: (1) uno relativo all'uguaglianza tra sezioni, stabilita tramite una coincidenza locale delle loro restrizioni, nel senso che dato un aperto $U$ dello spazio base $X$ del fascio $F$ e un suo ricoptimento $(U_i)$, due sezioni $s, t \in F(U)$ dell'insieme delle sezioni del fascio coincidono, cioè vale $s=t$, se coincidono le loro restrizioni su ciascun insieme del ricoprimento; (2) l'altro relativo alle condizioni di "incollaggio" tra sezioni compatibili, espresso tramite la condizione che se $(U_i)$ è un ricoprimento di un aperto $U$ e se per ciascun $i$ esiste una sezione $s_i$ tale che per ciascuna coppia di insiemi di ricoprimento $U_i$ *e* $U_j$ le restrizioni $s_i$ e $s_j$ coincidono sulle intersezioni $U_i \cap U_j$ allora esiste una sezione globale $s$ su $U$, la cui restrizione su $U_i$ coincide son $s_i$. Grazie all'assioma (1), la sezione descritta nell'assioma (2), se esiste, è unica. Un prefascio che soddisfa solo l'assioma (1) è detto *prefascio separato*.

diverse sezioni, creando cioè relazioni tra il locale e il globale. Infatti, la conoscenza delle inverse funzionali della proiezione: $s(O) = p^{-1}(O)$ (sezione locale su un intorno $O$) o $s(X) = p^{-1}(X)$ (sezione globale sopra lo spazio $X$) può essere visto come un'azione di spiegamento orizzontale di $E$ sopra $X$.
Come sottolinea Zalamea:

> El *doble despliegue* vertical y horizontal del haz asegura su inmensa riqueza conceptual y técnica. El eventual *pegamiento* de diversas secciones locales en una sección mayor y la eventual existencia (o no) de secciones globales son los problemas esenciales de la teoría. [Il doppio spiegamento verticale e orizzontale del fascio assicura la sua immensa ricchezza concettuale e tecnica. L'eventuale incollaggio di diverse sezioni locali in una sezione maggiore e la eventuale esistenza (o meno) delle sezioni globali sono i problemi essenziali della teoria]. (Zalamea, 2021, pp. 54–55, traduzione nostra)

Zalamea ricorre al modello *S* per analizzare le opere di diversi matematici: Galois, Riemann, Hilbert etc. Per un approfondimento in questo senso rinviamo a Zalamea (2021).
Noi esemplificheremo di seguito il modello *S* sulla base di un esempio tratto dalla tesi.

#### 13. 2. 1. 1. Un esempio di ricorso al modello *S* tratto dal presente lavoro

Per applicare in senso metaforico concettuale lo strumento matematico *fascio*, è necessario mettere in evidenza le sue caratteristiche generali, cosa che abbiamo già fatto nell'introduzione dell'argomento. Riassumiamole per maggiore chiarezza.
Il concetto di fascio consente di modellizzare:

- i *gesti astratti* ascendenti e discendenti (di proiezione e dispiegamento "in verticale") tra la sfera dei concetti, delle idee, delle intuizioni e delle abduzioni da un lato, e la sfera delle tecniche, degli oggetti, delle definizioni, degli assiomi e delle deduzioni dall'altro;
- i *gesti astratti* (di estensione "in orizzontale") di reti di concetti, idee, intuizioni al variare delle tecniche, degli oggetti, delle definizioni etc.;
- i *gesti astratti* di trasmissione di informazioni ricavate localmente, a livello globale, con eventuale conseguente costituzione di una continuità concettuale a livello globale.[252]

---

[252] Facciamo notare che qui la parola "gesto" è usata nel senso di un gesto che descrive metaforicamente un'azione. Non ci soffermiamo qui sulle analogie tra questo modo di intendere la gestualità e quello consueto nell'approccio multimodale in didattica della matematica (si veda per esempio Sabena, 2011), in quanto questo ci porterebbe troppo lontano dall'argomento trattato, ma

Il concetto di fascio è dunque utile come strumento metodologico di analisi e di descrizione di lavori di concettualizzazione nonché di costruzione di oggetti, approcci e teorie.
Nell'immagine in figura (Figura 62) sono rappresentati i concetti coinvolti nelle analisi e sintesi condotte nel capitolo 5. Nel testo del diagramma "ddm" sta per "didattica della matematica".

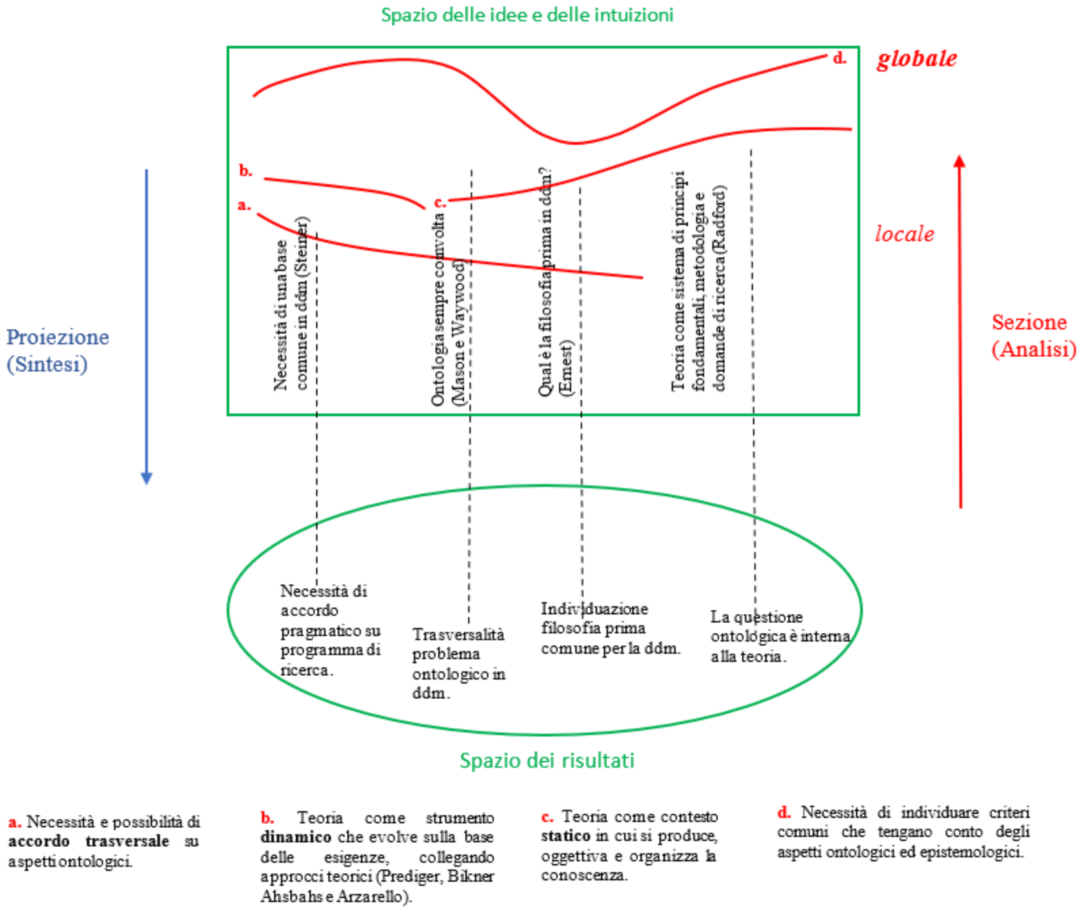



Figura 62. Applicazione del modello S ad alcuni ragionamenti esposti nel paragrafo 5.1.3.

riteniamo che questo possa essere un tema da approfondire in future ricerche, tenuto conto dei risultati raggiunti in questa tesi.

Nello spazio "alto" sono riportate le idee di fondo degli autori citati, le quali vengono proiettate sullo spazio "basso", dove esse corrispondono alle conclusioni che tali autori traggono. Le fibre (linee tratteggiate) rappresentano la proiezione dei contenuti concettuali, le cui sintesi sono riportate in basso. D'altra parte, l'analisi dei risultati riportati nello spazio "basso", consente di creare collegamenti tra le idee base riportate nello spazio "alto", creando delle connessioni tra concetti, che chiamiamo "sezioni". Nel caso specifico abbiamo tre sezioni locali: *a.*, *b.* e *c.* e una sezione globale, *d.*
La sezione *a.* collega le proiezioni risultanti dalle prime tre fibre: la necessità di un accordo pragmatico su un programma di ricerca (Steiner, 1985, 1987), la trasversalità del problema ontologico in didattica della matematica (Mason & Waywood, 1996) e l'individuazione di una filosofia prima per la didattica della matematica (Ernest, 2012, 2016). La sezione *a.*, che esprime il collegamento tra queste tre proiezioni, consiste nel fatto che per questi autori sembra possibile un accordo trasversale sugli aspetti ontologici. Questo vale in senso più pragmatico per Steiner (1985, 1987), che propone un programma di ricerca che possa consentire alle diverse teorie di comunicare su un terreno comune costituito da un quadro teorico multidisciplinare, in accordo con la natura multidisciplinare degli strumenti teorici in didattica della matematica, ma vale anche per le altre due proiezioni, in quanto la trasversalità del problema è sottolineato da Mason e Waywood (1996) tramite il fatto che secondo questi autori ogni teoria presuppone un impegno ontologico e che quindi è impossibile prescindere da questo aspetto nelle ricerche. Infine, l'individuazione di una filosofia prima per la didattica della matematica (Ernest, 2012) è una chiara dichiarazione a favore di una possibilità di un'ontologia comune per la disciplina, come abbiamo mostrato nel capitolo 2.
La quarta proiezione (riferita al fatto che la questione ontologica è una questione di pertinenza solo delle singole teorie) non può essere collegata alle altre tramite la sezione *a.*, in quanto non considera la questione ontologica trasversalmente.
La sezione *c.* consente però di collegare alcune idee relative alla sezione *a.* con la quarta proiezione; questo avviene attraverso il concetto di teoria come *contesto* di produzione di conoscenza scientifica. Da questo punto di vista, anche se non si nega che una teoria evolva, si nega che questo avvenga necessariamente attraverso le interazioni con altre teorie, in quanto essa può essere vista come un sistema autopoietico (Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Santi, 2020b).
La sezione *b.*, invece, collega le idee relative alla prima proiezione con quelle relative alla seconda proiezione, in quanto l'idea di teoria come strumento dinamico di ricerca che evolve e si modifica sulla base delle esigenze della ricerca stessa è in accordo con quella di programma di ricerca, ma anche con la posizione che sottolinea l'impegno ontologico che ogni teoria porta con sé, in quanto non contraddice il fatto che più teorie possono implicare un "impegno ontologico" simile e che quindi possono essere compatibili e coordinabili nel senso evidenziato da Prediger, Bikner Ahsbahs e Arzarello (2008) (si veda il paragrafo 4.3.).

Infine, la sezione *d.*, che è una sezione globale, dato che consente di collegare le sezioni locali *b.* e *c.*, consiste nella necessità di individuazione di criteri comuni per inquadrare l'aspetto ontologico dal punto di vista epistemologico generale (cioè legato agli oggetti matematici), in maniera tale che essi siano il più possibile inclusivi dei diversi punti di vista.

Dato che l'analisi in questione si riferisce al presente lavoro di tesi, le sezioni locali e globali si riferiscono a collegamenti stabiliti da chi scrive la tesi, ma in senso più generale possono derivare da quanto inferito da un osservatore riguardo al modo di ragionare di un altro soggetto o di un gruppo di soggetti.

Possiamo dunque notare come il modello *S* sia in grado di rappresentare tecnicamente l'idea di modello ermeneutico. Infatti, esso consente di inquadrare sia il supposto ragionamento di un soggetto (proiezioni) sia le interpretazioni di tali proiezioni in un quadro che può essere organizzato in sezioni coerenti localmente o anche globalmente. In questo senso il fascio è uno strumento che esprime il concetto di modello ermeneutico in quanto la coerenza locale o globale viene creata a partire dalle presupposizioni legate alle singole proiezioni, ma il significato delle singole proiezioni emerge pienamente in base alla coerenza creata localmente e globalmente.

Data la sua grande generalità, dovuta alle sue caratteristiche di oggetto matematico, il concetto di fascio è quindi molto versatile e potrebbe essere impiegato anche per analisi molto specifiche, per esempio in riferimento all'attività in aula. Infatti, possiamo notare che l'idea di fascio è già presente come strumento metodologico e concettuale in didattica della matematica attraverso il costrutto di *semiotic bundle* (Arzarello, 2006), già discusso nel paragrafo 10.4.4. Il *semiotic bundle* rappresenta un'interpretazione del concetto di fascio appositamente creata per l'analisi semiotica multimodale dell'attività matematica in classe. In esso emerge però soprattutto l'aspetto "orizzontale" del fascio, mentre quello "verticale" non viene messo in evidenza. Il modello *S* che abbiamo introdotto ora, invece, e ancora di più il modello *SK* che vedremo nel prossimo paragrafo, sono dei modelli generali che si presentano come un archetipo matematico in grado di modellizzare relazioni generali che si presentano come degli invarianti a diversi livelli: prasseologico, della didattica della matematica come disciplina, dell'epistemologia e della filosofia della didattica della matematica.

Passiamo quindi alla presentazione della seconda componente del modello *SKTR*, cioè dei modelli di Kripke, nonché del modello *SK* che si ottiene collegando le prime due componenti *S* (fasci) e *K* (modelli di Kripke).

### 13. 2. 2. Fasci sopra modelli di Kripke: il modello *SK*

Nel paragrafo precedente abbiamo esposto e discusso il possibile uso del concetto di fascio per analisi di vario genere, ma abbiamo potuto anche notare che il fascio è di per sé un oggetto statico. Infatti, esso consente di stabilire un certo tipo di relazioni e, come abbiamo visto, la sua forza consiste nella possibilità di inquadrare i "gesti" astratti di proiezione di concetti, idee e intuizioni, in risultati, oggetti, definizioni, esempi, nonché la costruzione di concetti globali a partire da concetti locali. Tutto ciò riguarda però le relazioni tra elementi già presenti nel fascio e senza contemplare una loro evoluzione temporale; in questo senso il fascio non è quindi una struttura dinamica. Esso può però acquisire dinamicità se lo si pensa come definito su una topologia particolare, in cui sono rappresentabili dei percorsi. In questo senso il fascio diventa una collezione di fasci. Espresso diversamente, con questa prospettiva il fascio può essere visto come una struttura in movimento sopra lo spazio base e il fascio stesso non è altro che un'immagine istantanea di tale movimento, un'immagine che fa parte di una successione di immagini temporali.
Lo scopo con cui Zalamea introduce l'idea di topologia "temporale" è quello di poter tenere conto dell'evoluzione storica della matematica. In maniera analoga una tale topologia può tenere conto dell'evoluzione storica della didattica della matematica o anche, perché no, del ragionamento di un singolo individuo, o di un gruppo di individui, durante l'attività in aula. Infatti, se si considera l'attività matematica come un'attività semiotica, l'evoluzione di tale attività è espressa tramite l'evoluzione nel tempo di un *fascio semiotico*, cioè del *semiotic bundle* (Arzarello, 2006).
Nei contesti che stiamo considerando non serve tuttavia avere delle immagini del fascio in movimento in ogni istante dell'evoluzione, cioè non serve una topologia che consenta di tracciare un'evoluzione istante per istante, con continuità, ma è sufficiente una topologia discreta, in cui ogni momento temporale preso in considerazione corrisponde a un evento ritenuto significativo da chi adotta il modello in questione per le proprie analisi. Una tale topologia è data dai *modelli di Kripke intuizionistici*, di cui ci occuperemo nel prossimo paragrafo.
Oltre alla possibilità di catturare la dinamicità dell'evoluzione del, e quindi i processi soggiacenti al, pensiero matematico, Zalamea (2021) mira a fornire al modello di filosofia sintetica della matematica contemporanea uno strumento metodologico che sia in grado di tenere conto delle molteplicità dei "mondi possibili", cioè degli stati raggiungibili a partire da un dato stato, comprese le condizioni per tale accesso. La possibilità di modellizzare le relazioni tra mondi possibili è data dai *modelli di Kripke modali*, che presenteremo dopo i modelli di Kripke intuizionistici.

### 13. 2. 2. 1. Modelli di Kripke intuizionistici

Un modello di Kripke intuizionistico può essere pensato come un grafo orientato privo di cicli (Figura 63), in cui i nodi rappresentano degli istanti temporali a cui sono collegati degli stati descritti da lettere proposizionali, mentre gli archi rappresentano i transiti da uno stato all'altro, espressi tramite i connettivi.

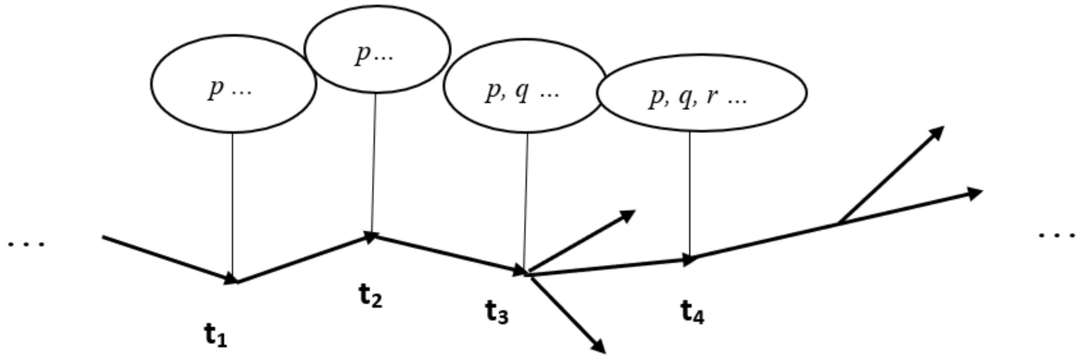



Figura 63. Esempio di struttura di un modello di Kripke intuizionistico.

I nodi sono ordinati in maniera tale che, fissato un nodo corrispondente a un istante temporale, i nodi alla sua sinistra rappresentino il passato e quelli alla sua destra il futuro. I modelli di Kripke intuizionistici sono modelli non deterministici, il che significa che la loro evoluzione è lineare nel passato e non lineare nel futuro, mantenendo quindi molteplici possibilità di evoluzione del fenomeno modellizzato, le quali, una volta concretizzate, escludono i percorsi evolutivi che si presentavano a loro alternativi.
Zalamea definisce un modello di Kripke intuizionistico come segue.

> **Definizione 22.** Un *modelo de Kripke intuicionista* K está dado por (i) una relación de orden $\leq$ (entre *tiempos*: hacia tiempos superiores a la derecha se desarrolla el *futuro*, hacia tiempos inferiores a la izquierda se observa el *pasado*), (ii) una información proposicional $K(t) \subseteq$ {lettras proposizionales} en cada tiempo $t$, estable en el crecimiento del orden ($t \leq s \Rightarrow K(t) \subseteq K(s)$), y (iii) una definición recursiva de satisfacción $\Vdash$ para el lenguaje proposicional, dada por tres cláusulas iniciales clásicas $K \Vdash_t p \Leftrightarrow p \in K(t)$, $K \Vdash_t (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow K \Vdash_t \alpha$ y $K \Vdash_t \beta$, $K \Vdash_t (\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow K \Vdash_t \alpha$ o $K \Vdash_t \beta$ ($p$ letra proposicional, $\alpha$ y $\beta$ fórmulas bien formadas), y por dos cláusulas específicamente intuicionistas que involucran *todo el futuro* de la fórmula: (negación) $K \Vdash_t \neg\alpha \Leftrightarrow \forall s \geq t\ K \nVdash_s \alpha$, (implicación) $K \Vdash_t (\alpha \rightarrow \beta) \Leftrightarrow \forall s \geq t\ (K \Vdash_s \alpha \Rightarrow K \Vdash_s \beta)$.[Un *modello di Kripke intuizionistico* è dato da: (i) una relazione d'ordine $\leq$ (tra tempi: verso tempi successivi a destra evolve il futuro, verso tempi precedenti a sinistra

osserviamo il passato), (ii) una informazione proposizionale $K(t) \subseteq$ {lettere prosizionali} in ogni tempo $t$, stabile nel verso crescente dell'ordine ($t \leq s \Rightarrow K(t) \subseteq K(s)$), e (iii) una definizione ricorsiva di soddisfazione $\Vdash$ per il linguaggio proposizionale, dato da tre clausole iniziali classiche $K \Vdash_t p \Leftrightarrow p \in K(t)$, $K \Vdash_t (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow K \Vdash_t \alpha$ e $K \Vdash_t \beta$, $K \Vdash_t (\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow K \Vdash_t \alpha$ or $K \Vdash_t \beta$ ($p$ lettera proposizionale, $\alpha$ e $\beta$ formule ben formate), e da due clausole specificamente intuizionistiche che coinvolgono *tutto il futuro* della formula: (negazione) $K \Vdash_t \neg\alpha \Leftrightarrow \forall s \geq t\ K \nVdash_s \alpha$, (implicazione) $K \Vdash_t (\alpha \rightarrow \beta) \Leftrightarrow \forall s \geq t\ (K \Vdash_s \alpha \Rightarrow K \Vdash_s \beta)$.] (Zalamea, 2021, p. 98, traduzione nostra)

I modelli di Kripke intuizionistici sono nati per "naturalizzare" le dimostrazioni costruttive tipiche dell'intuizionismo e quindi la loro logica è la logica intuizionista. Infatti, nella definizione possiamo notare che, accanto ai connettivi $\wedge$ (congiunzione) e $\vee$ (disgiunzione), il cui significato viene tradotto nella definizione nei corrispondenti termini del linguaggio naturale "e" e "o" (quindi, potremmo dire, "naturalizzato"), vi sono due clausole specifiche della logica intuizionista che definiscono i connettivi di *negazione* ($\neg$) e di *implicazione* ($\Rightarrow$) in maniera diversa da come ciò avviene nella logica classica.
Nella logica intuizionista (e quindi nelle dimostrazioni costruttive) il concetto di negazione non è così immediato come lo è in quella classica. Infatti, mentre appare abbastanza scontato pensare che cosa significhi negare una proposizione che asserisce una certa proprietà (per esempio, la proposizione "$x$ è pari" è vera se $x = 0, 2, 4, \ldots$, mentre è falsa se $x = 1, 3, 5, \ldots$), non appare altrettanto scontato pensare che cosa significhi negare la costruibilità di un ente matematico (per esempio, che cosa significa l'affermazione: "Non è possibile costruire un triangolo la cui somma degli angoli interni è maggiore di 180°"?).[253]
Negare una proposizione che afferma la costruibilità di un oggetto significa nel contesto della logica intuizionista, e in particolare nel contesto dei modelli di Kripke intuizionistici qui presentati, che tale proposizione *non è soddisfacibile in nessun istante futuro del modello*; viceversa, se una proposizione non è soddisfacibile in nessun istante futuro, essa non è soddisfacibile (cioè la costruzione in questione non è possibile). Parlando di presente e futuro, viene introdotta una componente temporale che è completamente estranea alla logica classica e dunque anche alle dimostrazioni in essa condotte.[254]
Per quanto riguarda l'implicazione, la sua definizione è invece più intuitiva nella logica intuizionista che non in quella classica, dato che si tratta di un connettivo di per sé "dinamico". Infatti, l'implicazione esprime una relazione simile per certi versi a quella causale, che coinvolge due istanti temporali successivi, come avviene di solito nelle costruzioni, dove un passaggio segue l'altro. In un certo

[253] Naturalmente l'esempio si riferisce alla geometria euclidea bidimensionale, nella quale tale costruzione non è possibile.
[254] Notiamo inoltre che in questo contesto "la verità" di un enunciato in un dato istante temporale corrisponderebbe alla somma delle informazioni disponibili grazie ai momenti che lo precedono.

senso l'implicazione viene infatti "staticizzata" nella logica classica, tramite la definizione semantica con le tavole di verità.
Nel contesto dei modelli di Kripke intuizionistici l'implicazione è soddisfatta in un istante del modello se la relazione tra l'antecedente e il conseguente permane in tutti gli istanti a esso successivi. Per esempio, l'implicazione "Se un triangolo è equilatero allora è anche equiangolo" è vera in un qualsiasi istante perché ogni volta (quindi in un qualsiasi istante futuro) che si costruisce un triangolo equilatero, sarà possibile dimostrare che esso è equiangolo.
Come è ben noto, nella logica intuizionista non valgono alcuni principi della logica classica, come la doppia negazione ($\neg\neg\, p \leftrightarrow p$, cioè negare due volte significa affermare) e la legge del terzo escluso ($p \vee \neg p$, cioè o è vera una proposizione o è vera la sua negazione, non c'è un terzo valore possibile).
Per quanto riguarda la doppia negazione, nella logica intuizionista modellizzata tramite i modelli di Kripke intuizionistici vale il seguente principio di densità:

> En un tiempo dado vale la *doble negación* de una formula si y solo si esta es válida *densamente en el futuro* de este tiempo: $K\Vdash_t \neg\neg\alpha \Leftrightarrow \forall s \geq t\ \exists u \geq s\ K\Vdash_u$. [In un tempo dato la *doppia negazione* di una formula vale se e solo se essa è valida *densamente nel futuro* di tale tempo: $K\Vdash_t \neg\neg\alpha \Leftrightarrow \forall s \geq t\ \exists u \geq s\ K\Vdash_u \alpha$]. (Zalamea, 2021, p. 98, traduzione nostra)

Cioè, in un dato istante una proposizione è affermata attraverso la sua doppia negazione se e solo se, considerato un qualsiasi istante temporale successivo, c'è sempre un altro istante a esso successivo, in cui la proposizione è vera. Dunque, in quest'ottica un teorema è e rimane sempre vero, ma è possibile contemplare anche l'evoluzione stessa della sua dimostrazione, in cui la sua "verità" viene costruita passo dopo passo.[255] Come dimostrazione della non validità *in generale* della doppia negazione come identità, Zalamea porta il seguente controesempio, il quale è anche utile come esemplificazione di un caso elementare di modello di Kripke.

**(Contro)esempio** (tratto da Zalamea, 2021, p. 98)
Si consideri un modello di Kripke costituito da due mondi (0 e 1) e un arco orientato da 0 a 1. Siano $K(0)$ e $K(1)$ gli insiemi di lettere proposizionali associati ai due stati temporali rappresentati dal nodo 0 e dal nodo 1, rispettivamente; valga inoltre $K(0) = \emptyset$ and $K(1) = \{p\}$ (Figura 64).

[255] Ricordiamo che, come abbiamo già evidenziato nel paragrafo 9.3.2.3., nella logica intuizionista non è possibile fare ricorso alle dimostrazioni per assurdo, in quanto le dimostrazioni costruttive sono sempre dimostrazioni dirette.

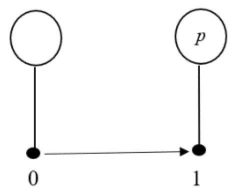



Figura 64. Modello di Kripke con due mondi (0 e 1).

Come è possibile notare, si ha $K \nVdash_0 (\neg\neg p \rightarrow p)$, cioè in questo modello di Kripke la doppia negazione non coincide con l'identità, dato che in 0 $\neg\neg p$ vale (essa vale densamente nell'unico stato futuro rispetto a 0, lo stato 1) ma $p$ non vale. Infatti, se si pensa a $p$ come alla costruzione di un ente matematico, allora $\neg\neg p$ non significa affatto che la costruzione sia eseguita e dunque, anche se vale $\neg\neg p$, $p$ non vale.

### 13. 2. 2. 2. Modelli di Kripke modali

Anche i modelli di Kripke modali possono essere pensati come grafi orientati (Figura 65), in cui i nodi sono dei mondi possibili, per i quali valgono determinate condizioni d'accesso e ai quali sono collegate delle informazioni proposizionali, mentre gli archi rappresentano i transiti da un mondo all'altro, espressi tramite i connettivi.

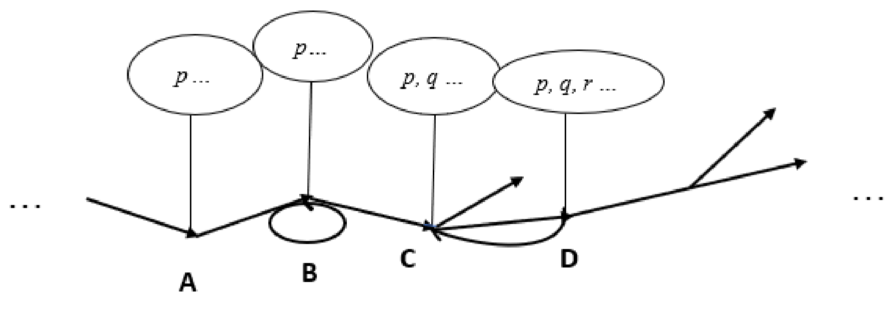



Figura 65. Esempio di struttura di un modello di Kripke modale.

La relazione d'ordine temporale dei modelli intuizionistici è qui sostituita da una relazione di accessibilità; si tratta di una relazione molto generale (non necessariamente riflessiva né (anti)simmetrica, né transitiva. Le condizioni di soddisfacibilità sono determinate anche qui, come già nel caso dei modelli di Kripke intuizionistici, da alcune clausole che traducono (o "naturalizzano") alcuni elementi della logica classica, come i connettivi $\wedge$ e $\vee$, il principio di non contraddizione $[\neg(p\wedge\neg p)]$ e l'implicazione.
Zalamea definisce un modello di Kripke modale come segue.

> **Definizione 23.** Un *modelo de Kripke modal K* è dado por: (i) una relación binaria $R$ (entre *mundos*, con conexiones arbitrarias: la relación no tiene por qué ser ni riflexiva – bucles de mundo a sí mismo – ni simétrica ni transitiva, etc.); (ii) una información proposicional $K(a) \subseteq \{\text{letras proposicionales}\}$ en cada mundo $a$, y (iii) una definición recursiva de satisfacción para el languaje poposiciónal modal, dada por cinco cláusolas iniciales clásicas $K\Vdash_a p \Leftrightarrow p \in K(a)$, $K \Vdash_a (\neg\alpha) \Leftrightarrow K\nVdash_a \alpha$, $K\Vdash_a (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow K\Vdash_a \alpha$ y $K\Vdash_a \beta$, $K\Vdash_a (\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow K\Vdash_a \alpha$ o $K\Vdash_a \beta$, $K\Vdash_a (\alpha \rightarrow \beta) \Leftrightarrow$ (si $K\Vdash_a \alpha$ entonces $K \Vdash_a \beta$) ($p$ letra proposicional, $\alpha$ y $\beta$ formulas bien formadas), y por dos cláusulas específicamente modales que involucran *el espectro de accesibilidad* de la fórmula: (necesidad) $K\Vdash_a \Box\alpha \Leftrightarrow \forall b\ aRb\ K\Vdash_b \alpha$ y (posibilidad) $K\Vdash_a \Diamond\alpha \Leftrightarrow \exists b\ aRb\ K\Vdash_b \alpha$. [Un *modello di Kripke modale K* è dato da: (i) una relazione binaria $R$ (tra *mondi*, con connessioni arbitrarie: la relazione non deve essere né riflessiva – loop da un mondo in sé stesso – né simmetrica, né transitiva etc.), (ii) una informazione proposizionale $K(a) \subseteq \{\text{lettere proposizionali}\}$ in ogni mondo $a$, e (iii) una definizione ricorsiva di soddisfacimento per il linguaggio proposizionale modale, data da cinque clausole iniziali classiche $K\Vdash_a p \Leftrightarrow p \in K(a)$, $K \Vdash_a (\neg\alpha) \Leftrightarrow K\nVdash_a \alpha$, $K\Vdash_a (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow K\Vdash_a \alpha$ e $K\Vdash_a \beta$, $K\Vdash_a (\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow K\Vdash_a \alpha$ o $K\Vdash_a \beta$, $K\Vdash_a (\alpha \rightarrow \beta) \Leftrightarrow$ (se $K\Vdash_a \alpha$ allora $K \Vdash_a \beta$) ($p$ lettera proposizionale, $\alpha$ e $\beta$ formule ben formate), e da due clausole specificamente modali che coinvolgono *lo spettro di accessibilità* della formula: (necessità) $K\Vdash_a \Box\alpha \Leftrightarrow \forall b\ aRb\ K\Vdash_b \alpha$ e (possibilità) $K\Vdash_a \Diamond\alpha \Leftrightarrow \exists b\ aRb\ K\Vdash_b \alpha$]. (Zalamea, 2021, p. 99, traduzione nostra)

Come è ben noto, nella logica classica la legge di non contraddizione si basa sulla legge del terzo escluso, che però non vale nella logica intuizionista poiché in essa non vale il principio classico della doppia negazione (si veda l'esempio del paragrafo precedente). La clausola che garantisce la consistenza in questo contesto è la seguente: $K\Vdash_a (\neg\alpha) \Leftrightarrow K\nVdash_a \alpha$. Secondo tale clausola una proposizione è soddisfacibile se e solo se non lo è la sua negazione.
Nella definizione di modello di Kripke modale l'implicazione è semplicemente tradotta (o "naturalizzata") nel metalinguaggio naturale, associando al simbolo formale di implicazione tratto dal linguaggio della logica proposizionale classica ($\Rightarrow$) il suo significato intuitivo espresso da "se… allora…".
Una particolare attenzione meritano qui gli operatori logici modali: l'operatore di necessità ($\Box$) e l'operatore di possibilità ($\Diamond$). La clausola relativa all'operatore di necessità afferma che una proposizione $\alpha$ è *necessariamente soddisfatta* in un mondo $a$ del modello $K$ se e solo se essa è soddisfatta in ogni mondo $b$ del modello

$K$ che sia accessibile da $a$ ($K \Vdash_a \Box\alpha \Leftrightarrow \forall b\ aRb\ K\Vdash_b \alpha$). La clausola relativa al modello di possibilità afferma invece che una proposizione $\alpha$ è *possibile* in un mondo $a$ del modello $K$ se è possibile in un qualche mondo $b$ del modello $K$ che sia accessibile da $a$ ($K\Vdash_a \Diamond\alpha \Leftrightarrow \exists b\ aRb\ K\Vdash_b \alpha$).
Zalamea (2021) fa poi notare che dalle definizioni è possibile dedurre alcune caratteristiche interessanti della logica su cui tali definizioni si basano. Per esempio, si può dedurre che non vi è una relazione generale tra le modalità di necessità e possibilità, il che porta a un grande ampliamento delle opzioni che possono presentarsi in un modello di Kripke modale. Infatti, l'implicazione che afferma che dalla necessità di una proposizione segue la sua possibilità ($\Box p \rightarrow \Diamond p$) non è una legge generale della logica presa in esame e nemmeno l'implicazione che afferma che la possibilità di una proposizione implica la sua necessità ($\Diamond p \rightarrow \Box p$) lo è, poiché in entrambi i casi è possibile fornire controesempi di modelli di Kripke modali elementari in cui tali implicazioni non sono soddisfatte.

**(Contro)esempio 1** (tratto da Zalamea, 2021, p. 100)
Come controesempio che dimostra la non validità della prima implicazione ($\Box p \rightarrow \Diamond p$), Zalamea propone quello di un modello di Kripke costituito da un solo mondo $a$, non accessibile da sé stesso, quindi per il quale vale $R = \emptyset$ (nel senso che l'insieme delle relazioni di accessibilità è vuoto) (si veda la Figura 66).

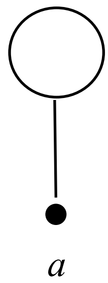



Figura 66. Modello di Kripke con un solo mondo a, non accessibile da sé stesso e senza informazioni proposizionali.

Infatti, affinché l'implicazione $\Box p \rightarrow \Diamond p$ sia vera, dalla necessità di $p$ in $a$ dovrebbe seguire la possibilità di $p$ in $a$, ma ciò avviene solo quando il mondo del quale si parla sia almeno accessibile da sé stesso, cioè solo se si possono porre in relazione elementi di esso con sé stessi. Se $p$ è pensata come una costruzione di un ente matematico allora se in un mondo non è possibile porre in relazione le informazioni in esso presenti, non è possibile mettere in relazione la necessità della costruzione con la sua possibilità.

**(Contro)esempio 2** (tratto da Zalamea, 2021, p. 100)
Come controesempio che dimostra la non validità della seconda implicazione ($\Diamond p \rightarrow \Box p$) Zalamea propone quello di un modello di Kripke costituito da due mondi $a$ e $b$, con le relazioni $aRa$, $aRb$ ($a$ è accessibile da sé stesso e $b$ è accessibile da $a$) e le informazioni proposizionali $K(a) = \{p\}$, $K(b) = \emptyset$ (si veda la Figura 67). Infatti, se $p$ è pensata come la costruzione di un ente matematico, anche se $p$ è possibile, non è detto che essa venga realizzata; dunque, dalla possibilità non segue la necessità.

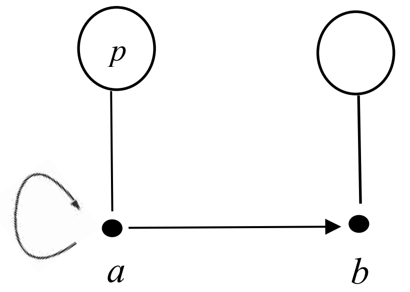



Figura 67. Modello di Kripke modale con due mondi.

D'altra parte, come sottolinea Zalamea, è possibile dimostrare che il necessario è possibile ($\Box p \rightarrow \Diamond p$) se e solo se $R$ è definita su tutti i mondi possibili, cioè se e solo se le condizioni di accesso sono definite riguardo a tutti questi mondi. Questo significa che non devono esistere dei mondi isolati (il grafo deve essere quindi connesso), poiché altrimenti si ricade nei modelli precedenti. Inoltre è possibile dimostrare che il possibile è necessario in generale ($\Diamond p \rightarrow \Box p$) se e solo se $R$ è una funzione. Infatti, se $R$ è una funzione, allora a ogni mondo del modello viene associato uno e un solo mondo di accesso, il che significa che non ci sono mondi isolati e che il modello è deterministico e lineare, in quanto ogni "causa" ha uno ed un solo "effetto".
Per quanto riguarda degli esempi d'uso del modello $SK$ in filosofia della matematica, rimandiamo a Zalamea (2021); di seguito esporremo invece un esempio legato a un'applicazione di tale modello a una parte del presente lavoro di tesi.

### 13. 2. 2. 3. Un esempio di ricorso al modello *SK* tratto dal presente lavoro

Per comprendere meglio il potenziale di applicabilità della componente *K* del modello *SKTR*, riassumiamo brevemente le caratteristiche concettuali principali dei modelli di Kripke.

I *modelli di Kripke intuizionistici* consentono:

- di modellizzare un'evoluzione temporale dei concetti, introducendo una componente di dinamicità e transitorietà nella formazione degli oggetti matematici;
- di tenere conto degli aspetti logici nonostante la transitorietà degli oggetti sottostanti all'analisi (passaggio da una proposizione all'altra, azioni etc.).

I *modelli di Kripke modali* consentono:

- di modellizzare le relazioni logiche tra stati o mondi possibili, mettendo l'accento sulla possibilità di passaggio da uno stato a un altro, sulla base di particolari condizioni di accesso;
- di tenere conto delle leggi logiche sottostanti alla transitorietà tra stati o mondi possibili, in termini di una logica modale.

Notiamo che in un'applicazione metaforica dei modelli di Kripke le leggi logiche formali possono essere sostituite da regole o ragionamenti che mettono in evidenza gli aspetti semantici coinvolti, ma che all'occorrenza è possibile modellizzare anche gli aspetti più tecnici. Nell'esempio che mostreremo, il modello SK serve per rappresentare due istanti temporali della stesura della tesi: uno relativo al capitolo 5, l'altro relativo al capitolo 6.

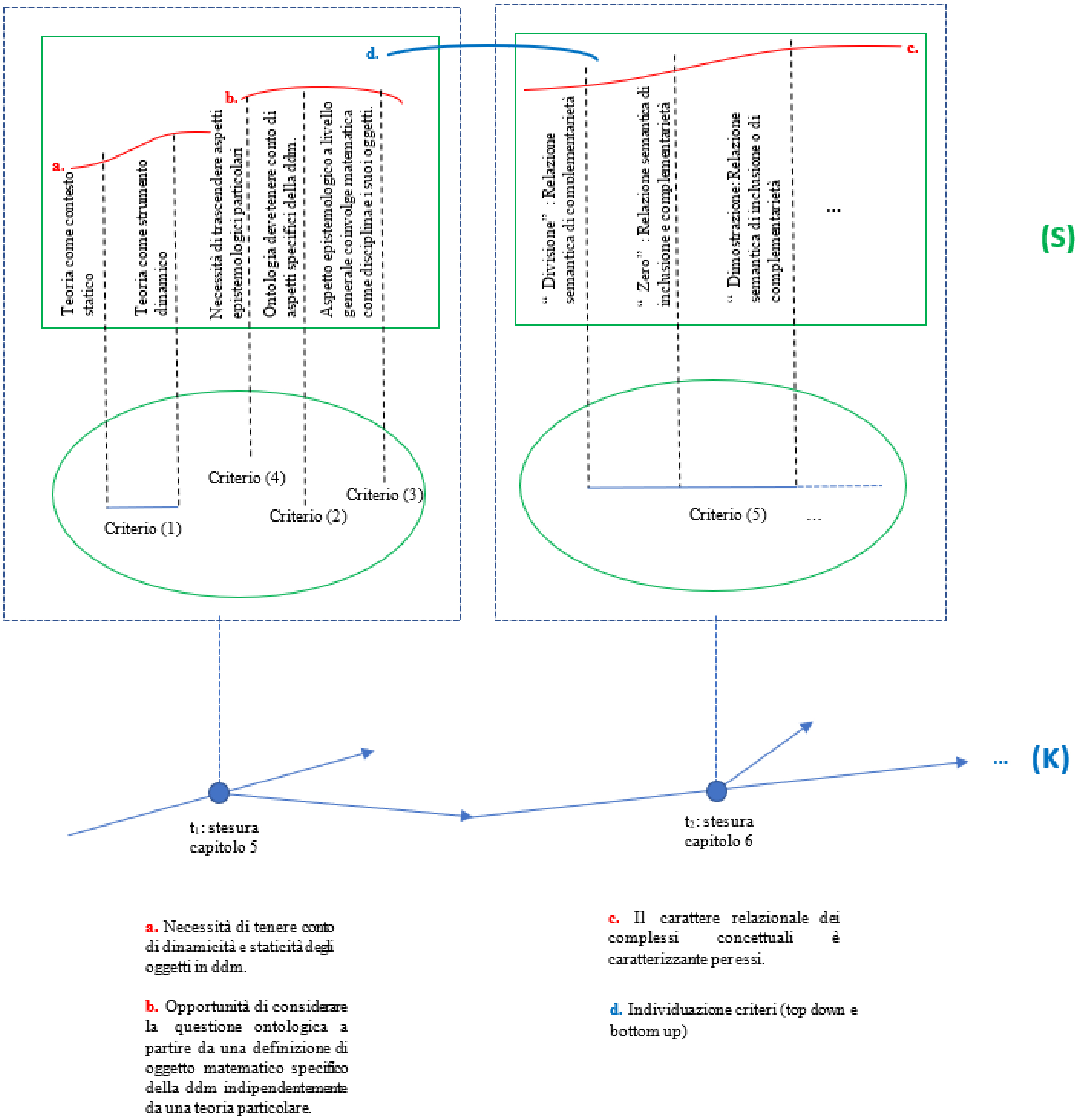



Figura 68. Applicazione del modello SK al modo di procedere assunto nei capitoli 5 e 6 della presente tesi.

Nell'immagine (Figura 68) sono rappresentati due istanti temporali (*$t_1$* e *$t_2$*) della stesura della tesi, dove *$t_1$* è associato alla stesura del capitolo 5 e *$t_2$* è associato alla stesura del capitolo 6. Questi due istanti temporali rappresentano due nodi di un modello di Kripke intuizionistico che consente di rappresentare l'evoluzione temporale del lavoro di tesi. Al nodo indicato con *$t_1$* è associato un fascio in cui è rappresentata l'emergenza dei criteri (1), (2), (3) e (4),[256] come già discusso nel capitolo 5, i quali sono qui ricondotti a due sezioni locali (*a.* e *b.*). Nel secondo fascio, associato al nodo *$t_2$* e al capitolo 6, è descritta l'emergenza del criterio (5) dagli esempi riportati nel capitolo. In questo caso è presente una sezione globale (*c.*), che rappresenta l'individuazione del carattere relazionale dei complessi concettuali "per astrazione".
L'arco in blu contrassegnato con "*d.*" rappresenta il transito che collega concettualmente i due capitoli: l'obiettivo di individuazione dei criteri che dovrebbe soddisfare la definizione cercata di oggetto matematico specifico della didattica della matematica, tramite un approccio *top down* o *bottom up* (si veda il paragrafo 4.3.).
Volendo mettere in evidenza la natura del legame logico tra i due fasci che compongono il modello di Kripke qui rappresentato, si potrebbe dire che i due mondi *$t_1$* e *$t_2$* sono collegati tramite il connettivo "e" (il corrispondente del connettivo $\wedge$ della logica classica) che, dal punto di vista della logica intuizionista significa semplicemente che i due istanti temporali fanno parte di un percorso costruttivo.

### 13. 2. 3. I topoi: il modello *SKT*

La terza componente del modello *SKTR*, cioè il topos, consente di aggiungere alla modellizzazione dell'evoluzione temporale dei fasci (modello *SK*) la ricerca di archetipi emergenti da tale evoluzione, costituendo in questo modo il modello *SKT*.
Premettiamo che tutti i fasci possibili su uno spazio base, sul quale è definita una topologia in senso categoriale, costituiscono un topos.
Per comprendere meglio la modalità concettuale con cui il topos viene usato nel modello *SKT* (o *SKTR*), dobbiamo focalizzare l'attenzione sulle sue caratteristiche concettuali. Procediamo dunque con una breve esposizione e discussione di tali caratteristiche, prima di fornire una definizione costruttiva dell'oggetto matematico *topos*.
Secondo le parole di Grothendieck, un topos si presenta come una sovrastruttura che emerge attraverso la considerazione di tutti i possibili percorsi su uno spazio

[256] Ci stiamo riferendo ai criteri che la definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica dovrebbe soddisfare, cioè ai criteri individuati e circoscritti nella prima parte della tesi (si veda il paragrafo 7.2.).

topologico; esso ha le caratteristiche di una categoria di fasci su una particolare topologia. Tale sovrastruttura costituisce un'immagine fedele delle caratteristiche dello spazio topologico ed è accettabile dal punto di vista matematico poiché, a partire da essa, è possibile ricostruire lo spazio stesso:

> Considérons l'ensemble formé de **tous** les faisceaux sur un espace (topologique) donné, ou, si on veut, cet arsenal prodigieux formé de **tous** ces "mètres" servant à l'arpenter. Nous considérons cet "ensemble" ou "arsenal" comme muni de sa structure la plus évidente, laquelle y apparaît, si on peut dire, "à vue de nez" ; à savoir, une structure dite de "catégorie". (...) C'est cette sorte de "superstructure d'arpentage", appelée "catégorie des faisceaux" (sur l'espace envisagé), qui sera dorénavant considérée comme "incarnant" ce qui est le plus essentiel à l'espace. C'est bien là chose licite (pour le "bon sens mathématique"), car il se trouve qu'on peut "reconstituer" de toutes pièces un espace topologique en termes de cette "catégorie de faisceaux" (ou de cet arsenal d'arpentage) associée. [Consideriamo l'insieme formato da tutti i fasci su uno spazio (topologico) dato o, se si vuole, quell'arsenale prodigioso formato da tutti questi "metri" che servono per rilevarlo. Consideriamo questo "insieme" o "arsenale" come munito della sua struttura più evidente, la quale appare, se così si può dire, "a prima vista"; vale a dire, una cosiddetta "struttura di categoria". (…) È questa "superstruttura di rilevamento", chiamata "categoria dei fasci" (sullo spazio contemplato), che sarà d'ora in avanti considerata come "incarnante" gli aspetti più essenziali dello spazio. Questa è una cosa certamente lecita (per il "buon senso matematico"), poiché si può "ricostruire" completamente uno spazio topologico in termini di questa "categoria di fasci" (o di questo arsenale di rilevamenti) associato]. (Grothendieck, 1983–1986, pp. 39–55, traduzione nostra)[257]

Il topos si presenta dunque come una sovrastruttura con le caratteristiche di una categoria, in cui gli oggetti sono dei fasci e i morfismi sono le relazioni tra essi. Il topos unisce quindi l'insieme dei fasci definibili su uno spazio topologico in una struttura di tipo categoriale. Zalamea evidenzia il ruolo del topos come *archetipo matematico*, cioè come una struttura relazionale che diventa un modello per *tipi* specifici. In questo senso, gli archetipi matematici (di cui il topos è l'esempio generale) si declinano e vengono interpretati in molteplici tipi culturali, ponendo le basi per una vera interdisciplinarità, alla cui base l'Autore vede la matematica (Zalamea, 2021). Ma su questo aspetto torneremo nel prossimo paragrafo, quando parleremo delle superfici di Riemann, l'ultimo elemento del modello *SKTR*.
Per ora sottolineiamo il ruolo unificatore del topos in riferimento ai possibili percorsi di "ricognizione" in uno spazio topologico. Si potrebbe dire che il topos assume in sé ciò che rimane invariato nei diversi "percorsi" possibili nello spazio topologico, come per esempio la sua continuità o il numero delle sue discontinuità.
Il concetto di *topos di Grothendieck* a cui ci riferiamo in questo contesto è, come già evidenziato, strettamente legato al concetto di categoria. Più precisamente, si tratta di una categoria munita di una particolare topologia, chiamata *topologia di*

[257] Il primo numero di pagina si riferisce alla pagina del manoscritto, il secondo si riferisce alla versione in formato elettronico citata in bibliografia.

*Grothendieck*; tale categoria è detta *sito* e può essere pensata come la base del topos.
Un topos di Grothendieck è dunque una categoria di fasci su un sito. Nell'immagine (Figura 69) vediamo quelli che Zalamea chiama "i gesti base" (Zalamea, 2021, p. 44) del topos di Grothendieck: il sito, i fasci e il topos stesso. Il *sito*, cioè la categoria con la topologia di Grothendieck, è rappresentato in basso nell'immagine. Dal sito emerge la molteplicità dei possibili fasci sulla base. Infine, il topos (in alto nell'immagine), consente di unire tutti i fasci in una categoria di fasci, formando una sovrastruttura rappresentata dalla curva rossa.

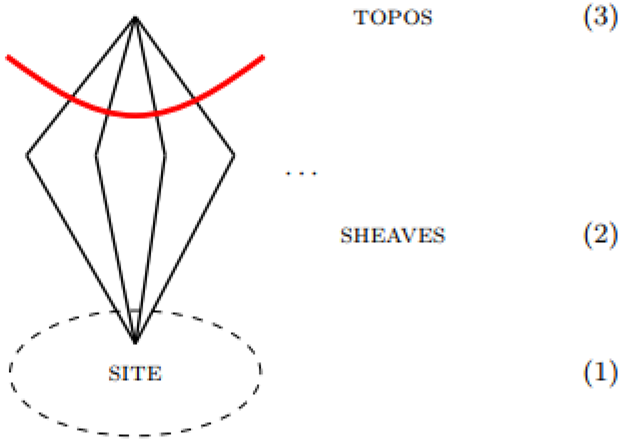



Figura 69. I "gesti" base di un topos di Grothendieck (tratto da Zalamea, 2021, p. 130).

Partendo da queste puntualizzazioni, ci soffermeremo prima sul ruolo della topologia di Grothendieck e poi sulla definizione di fascio nell'ambito del concetto di topos di Grothendieck.
Lo studio degli oggetti geometrici attraverso il loro ricoprimento[258] con degli insiemi aperti e attraverso il ricorso all'idea di fascio definito su una topologia puntuale è una tecnica consueta nella geometria differenziale, ma Grothendieck si rese conto che il concetto di fascio è in realtà indipendente dai singoli *elementi* dell'insieme aperto, cioè dai suoi punti, intuendo che esso dipende in realtà solo dal *concetto* di aperto. Egli comprese che se il concetto di ricoprimento fosse stato assiomatizzato, un ricoprimento avrebbe potuto essere pensato non

[258] Ricordiamo che un *ricoprimento* (covering) di un insieme $X$ è dato da una famiglia di insiemi tale che $X$ è incluso nell'unione della famiglia di insiemi; un ricoprimento è una partizione se gli insiemi della famiglia sono a due a due disgiunti.

necessariamente in maniera puntuale, ma anche come ricoprimento con altri oggetti matematici associati agli aperti, come per esempio dei gruppi, degli anelli o anche semplicemente degli insiemi di funzioni continue definite su essi. Una *topologia di Grothendieck*, a differenza delle consuete topologie puntuali,[259] è dunque una topologia definita in senso categoriale,[260] tipico dell'approccio sintetico agli oggetti matematici.
Per definire il concetto di topos è poi necessario stabilire, in base alla nozione di ricoprimento (assiomatizzata da Grothendieck), le condizioni di estensione dei dati locali in un fascio, derivanti dalle sezioni locali e relativi agli oggetti definiti sugli aperti, a dati globali, cioè legati a delle opportune sezioni globali del fascio (per esempio riferite a tutto lo spazio topologico). Ma di questo diremo tra poco, quando tratteremo l'estensione del concetto di fascio nel senso di Grothendieck.
Per quanto riguarda la topologia di Grothendieck, possiamo quindi affermare che essa è interpretabile come una generalizzazione del concetto di spazio topologico attraverso la generalizzazione del concetto di ricoprimento. Infatti, i topoi di Grothendieck possono essere particolarmente utili per formalizzare intuizioni topologiche riferite a oggetti che non hanno necessariamente le caratteristiche di spazio topologico in senso consueto, ricorrendo a un approccio sintetico.
Esaminiamo ora dal punto di vista tecnico il concetto di topologia di Grothendieck.
Una topologia di Grothendieck si definisce a partire da una categoria arbitraria nella quale è definito il concetto di *pullback*. Come già evidenziato nel capitolo 11.2. (Definizione 17) un *pullback* si definisce a partire da due morfismi ($f$ e $g$) di una data categoria $C$, aventi lo stesso codominio, cioè $f: X \rightarrow Z$ e $g: Y \rightarrow Z$, dove $X$, $Y$ e $Z$ sono oggetti della categoria. Il pullback $P = X \times_Z Y$, se esiste, è dato da due morfismi, $p_1$ e $p_2$, aventi come dominio un quarto oggetto $P$ e come codominio gli oggetti $X$ e $Y$, cioè $p_1: P \rightarrow X$ e $p_2: P \rightarrow Y$.[261]
Dati gli elementi $f$ e $g$ con le caratteristiche descritte, il pullback costituito da $p_1$ e $p_2$ e dall'oggetto $P$ fornisce le componenti necessarie per completare il seguente diagramma in maniera tale che esso sia commutativo:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

[259] Per topologie "puntuali" intendiamo qui topologie in senso classico, cioè nelle quali lo spazio topologico è inteso come insieme di punti.
[260] Per "topologia in senso categoriale" qui intendiamo topologie nelle quali lo spazio topologico è inteso come un insieme di oggetti (insiemi, gruppi etc.) tra i quali sono definiti dei morfismi aventi le caratteristiche dei morfismi di una categoria.
[261] Per denotare il pullback $P$ si può usare anche la tripla ordinata $(P, p_1, p_2)$.

cioè in maniera tale che valga $f \circ p_1 = g \circ p_2$. Inoltre, il pullback deve soddisfare una proprietà universale, secondo la quale preso un quinto oggetto $M$, munito di due morfismi $m_1$: $M \rightarrow X$ e $m_2$: $M \rightarrow Y$, deve essere unico il morfismo $t$: $M \rightarrow P$ tale che valga $t \circ p_1 = m_1$ e $t \circ p_2 = m_2$; in diagramma:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, "m_2"] \arrow[ddr, "m_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Dunque, una topologia di Grothendieck è una categoria nella quale è definito il concetto di pullback. Più in particolare, essendo il morfismo $t$ menzionato nella definizione di pullback unico, esso garantisce l'invertibilità e consente quindi, dato il pullback $(P, p_1, p_2)$ per $f$, $g$, di "retrocedere" in maniera univoca fino all'oggetto iniziale $M$, dato un oggetto finale $Z$.[262]

Un esempio elementare, già discusso in precedenza, ma che riportiamo qui per comodità del lettore, di pullback su una categoria i cui oggetti sono degli insiemi, è il seguente. Siano $Z = \{1; 4; 5; 7; 10\}$, $X = \{1; 5; 7\}$ e $Y = \{4; 5; 7; 10\}$ tre oggetti di una categoria e siano i morfismi tra essi i morfismi di inclusione tra insiemi: il morfismo $f$: $X \rightarrow Z$ è dato in questo caso dalla relazione di inclusione $X \subset Z$, mentre il morfismo $g$: $Y \rightarrow Z$ è dato dalla relazione di inclusione $Y \subset Z$. Se esistono un quarto oggetto $P$ e due morfismi $p_1$: $P \rightarrow X$ e $p_2$: $P \rightarrow Y$, allora $P$, $p_1$ e $p_2$ costituiscono un pullback per $X$, $Y$, $Z$, $f$ e $g$. Possiamo considerare $P = \{5; 7\}$ e $p_1$: $P \subset X$ e $p_2$: $P \subset Y$. Il pullback $(P, p_1, p_2)$ deve soddisfare la proprietà generale che, dato un insieme $M$ con due morfismi $m_1$: $M \rightarrow X$ e $m_2$: $M \rightarrow Y$, esista un unico morfismo $t$: $M \rightarrow P$ tale che valga $t \circ p_1 = m_1$ e $t \circ p_2 = m_2$. Possiamo considerare $M = \{5\}$, $m_1$: $M \subset X$, $m_2$: $M \subset Y$, $t$: $M \subset P$. Dato $M$, per via della transitività della relazione di inclusione da $\{5\} \subset \{5; 7\} \subset \{1; 4; 5; 7; 10\}$ segue che $\{5\} \subset \{1; 4; 5; 7; 10\}$, quindi $t \circ p_1 = m_1$ e da $\{5\} \subset \{1; 5; 7\} \subset \{1; 4; 5; 7; 10\}$ segue che $\{5\} \subset \{1; 4; 5; 7; 10\}$, quindi $t \circ p_2 = m_2$. Dall'esempio si può notare che il pullback costituisce una sorta di categoria formata da cinque oggetti, in cui c'è un oggetto inziale ($M$) e un oggetto finale ($Z$).

Inoltre, dall'esempio diventa chiaro che il concetto di pullback mette in evidenza il fatto che se due morfismi hanno lo stesso codominio e l'intersezione dei rispettivi domini non è vuota, è possibile comporre due morfismi tra loro equivalenti, cioè aventi lo stesso dominio e lo stesso codominio; tali morfismi composti (nell'esempio essi sarebbero $g \circ p_2$ e $f \circ p_1$) che costituiscono due percorsi

[262] Notiamo che il concetto di *pullback* potrebbe essere molto utile nella modellizzazione del *backward reasoning* (Barbero, Gómez-Chacón, & Arzarello, 2020), dato che consente di esprimere tecnicamente la "retrocessione" a partire da un oggetto considerato oggetto finale di una categoria, in analogia con il processo del *backward reasoning*, che va dalle conclusioni verso le premesse.

tecnicamente equivalenti per collegare l'oggetto $P$ con l'oggetto finale $Z$, ma che tali percorsi possono fornire informazioni differenti, dato che uno "passa" per l'oggetto $X$, mentre l'altro "passa" per l'oggetto $Y$. Viceversa, l'esempio mette in evidenza che se due morfismi hanno lo stesso dominio e l'intersezione dei loro codomini non è vuota, è possibile ricondurre due morfismi che hanno due codomini diversi ($m_1$ e $m_2$) a un morfismo composto in cui il percorso dal dominio comune ai rispettivi codomini passa per lo stesso oggetto ($P$).

Come già accennato, oltre che sul concetto specifico di topologia di Grothendieck, legato a una categoria sulla quale è definito un pullback, il concetto di topos di Grothendieck si basa anche su un'estensione del concetto classico di fascio, a partire da quello del fascio inteso come fascio di uno spazio étalé.[263]

L'estensione a cui ci riferiamo consiste nella definizione del fascio in termini funtoriali, cioè in maniera tale che esso sia visto come un oggetto di una categoria i cui oggetti sono dei funtori e i cui morfismi sono le trasformazioni naturali tra tali funtori; una tale categoria è, come già evidenziato, la categoria $Set^C$.

Possiamo dunque affermare che la topologia di Grothendieck rende molto versatile il concetto di ricoprimento, dato che gli oggetti della categoria possono essere oggetti molto diversi tra loro e inoltre, tramite i pullback, garantisce la completezza della categoria, nel senso evidenziato nel paragrafo 11.2., che a sua volta si basa sull'estensione del concetto di fascio in termini funtoriali (ricordiamo che la completezza di una categoria è definita in termini di completezza dei diagrammi, che sono dei funtori).

I due elementi qui esaminati, cioè la topologia di Grothendieck e il fascio inteso in senso funtoriale, sono uniti in un'unica struttura attraverso il concetto di topos di Grothendieck. Tale struttura raccoglie quindi in sé la molteplicità di tutti i fasci possibili sul sito, cioè sulla categoria munita di una topologia di Grothendieck; ogni fascio rappresenta un oggetto della categoria dei fasci possibili sul sito.

Il topos emerge come l'archetipo che unisce i fasci definibili sul sito su cui è definita la topologia; seguendo la terminologia di Zalamea, il topos è simile a un "distillato archetipico" (2021, p. 45), qualcosa che emerge da un'iniezione delle idee e dei concetti globali del fascio dei fasci in una struttura generale.

Dopo aver discusso le caratteristiche concettuali del concetto di topos, forniamo ora una definizione costruttiva di *topos di Grothendieck*, citando direttamente Zalamea:[264]

---

[263] Ricordiamo che uno spazio étalé di un fascio $F$ è dato da uno spazio topologico $E$ e da un omeomorfismo locale $p: E \rightarrow X$, dove $X$ è lo spazio di base e $F$ è il fascio delle sezioni di $p$.

[264] Il topos di Grothendieck si distingue dal topos elementare. Quest'ultimo è una categoria che soddisfa le caratteristiche di essere finitamente completa, chiusa rispetto all'operazione di prodotto cartesiano e di possedere un classificatore di sottoggetti [un esempio di tale classificatore è l'operatore di verità che nel caso di una logica bivalente classifica gli oggetti della categoria assegnando loro un valore di verità (1: vero o 0: falso)]. La definizione di topos elementare non coinvolge direttamente il concetto di topologia poiché si basa sul concetto di topologia in senso classico, cioè come topologia di insiemi di punti. Il concetto di topos elementare nasce con obiettivi diversi rispetto al topos di Grothendieck; il primo nasce per fornire una soluzione all'idea di una

**Definizione 24.** La construcción de un *topos de Grothendieck* se realiza en tres pasos: (1) *extension* de la noción clásica de topología (paso de la definición analitica conjuntista a una definición sintética categorica); (2) *extension* de la noción clásica de haz (paso de la definición come espacio *étalé* a una definición funtorial asociada), y (3) conjunción de (1) y (2) sobre la multiplicidad de *todos* los haces posibles sobre una topología categórica dada. El primer paso (1) es entonces la definición de una topología extendida: dada una categoría *arbitraria C* que posea algunas construcciones básicas (*pullbacks*), una *topología de Grothendieck J* consiste en darse, para cada objeto *U* de la categoría, una noción de *cubrimiento J*(*U*) (colección de flechas en el objeto) de tal manera que (i) *pullback* de cubrimiento es cubriemento, (ii) cubrimiento de cubrimientos es cubrimiento y (iii) la idendidad es cubrimiento. Una tal dupla (*C; J*) se llama un sitio. El segundo paso (2) consiste en definer un *haz F sobre un sitio* (*C; J*) como un funtor $F : C^{op}\rightarrow Con$ ("prehaz") que se comporte bien con respect a pegamientos coherentes en la topología *J* de Grothendieck.[265] Finalmente, el terzer paso (3) integra todos los haches diferentes en una estructura total que los contiene, *Topos*(*C; J*) = $\{F^{haz}: C^{op} \rightarrow \text{Con}\}$, y un *topos de Grothendieck* se define como una categoría equivalente a un tal *Topos*(*C*; *J*) para un sitio adecuado (*C; J*). [La costruzione di un *topos di Grothendieck* si realizza in tre passi: (1) *estensione* della nozione classica di topologia (da una descrizione analitica insiemistica a una descrizione sintetica categorica), (2) *estensione* della nozione classica di fascio (passaggio da una definizione come spazio *étalé* a una definizione funtoriale associata) e (3) congiunzione di (1) e (2) sopra la molteplicità di *tutti* i fasci possibili sopra una topologia categorica data. Il primo passo (1) è quindi la definizione di una topologia estesa: data una topologia *arbitraria C* che possiede alcune costruzioni di base (*pullbacks*), una topologia di Grothendieck *J* consiste nel dare, per ogni oggetto *U* della categoria, una nozione di ricoprimento *J*(*U*) (collezione di frecce nell'oggetto) in maniera tale che (i) *pullback* di ricoprimenti è un ricoprimento, (ii) ricoprimento di ricoprimenti è un ricoprimento, (iii) l'identità è un ricoprimento. Una tale coppia (*C; J*) si chiama sito. Il secondo passo (2) consiste nel definire un *fascio F sopra un sito* (*C; J*) come un funtore $F : C^{op}\rightarrow Set$ ("prefascio") che si comporta bene rispetto ai ricoprimenti nella topologia di Grothendieck *J*. Infine, il terzo passo (3) integra tutti i fasci in una struttura totale che li contiene *Topos*(*C; J*) = $\{F^{fascio}: C^{op} \rightarrow \text{Set}\}$, e un topos di Grothendieck è definito come una categoria

---

reinterpretazione della matematica in termini categoriali, mentre il secondo è uno strumento della geometria algebrica che ha l'obiettivo di introdurre una modalità diversa da quella puntuale per lo studio di spazi, interpretandoli come oggetti di una categoria tramite la quale è definita una topologia specifica per lo scopo, la cui caratteristica di base è la presenza di pullback.

[265] Detto diversamente, "si $\{U_i \rightarrow U, i \in I\}$ es un cubrimiento en *J*(*U*) y se tienen secciones (locales) $s_i \in F(U_i)$ compatibles entre sí ($s_i \upharpoonright U_i \times_U U_j = s_j \upharpoonright U_i \times_U U_j$, para todos $i;j \in I$), entonces existe una única seccíon (global) $s \in F(U)$ tal que $s \upharpoonright U_i = s_i$ para todos $i \in I$" [se $\{U_i \rightarrow U, i \in I\}$ è un ricoprimento in *J*(*U*) e abbiamo sezioni (locali) $s_i \in F(U_i)$ compatibili ($s_i \upharpoonright U_i \times_U U_j = s_j \upharpoonright U_i \times_U U_j$, per tutti $i;j \in I$), allora esiste un'unica sezione (globale) $s \in F(U)$ tale che $s \upharpoonright U_i = s_i$ per tutti $i \in I$] (Zalamea, 2021, p. 128, traduzione nostra).

> equivalente a un tale *Topos*($C$; $J$) per un sito adeguato ($C$; $J$)].[266] (Zalamea, 2021, pp. 127–128, traduzione nostra)

Notiamo che nella caratterizzazione concettuale del topos abbiamo già discusso i concetti che intervengono nella definizione e anche le loro reciproche relazioni; non ci soffermiamo dunque ulteriormente su questo aspetto. Sottolineiamo soltanto che ciò che il topos aggiunge al modello *SK*, esaminato in precedenza, portando alla costruzione del modello *SKT*, in realtà non è un nuovo elemento, ma un nuovo modo di organizzare gli elementi già presenti nel modello *SK*, attraverso la definizione di pullback, in una struttura che fa emergere una nuova componente di carattere archetipico.
Prima di procedere con l'esemplificazione dell'uso del modello *SKT*, torniamo brevemente ancora sul concetto di topologia di Grothendieck e sul suo ruolo nel modello *SKT*. Sottolineiamo che parlare di topologia di Grothendieck significa evocare un concetto molto astratto che serve, come già evidenziato, per la definizione generale di ricoprimento. Dal punto di vista applicativo è quindi importante riflettere su quale tipo di topologia possa essere utile per i diversi contesti.
In realtà abbiamo già fornito una prima idea di topologia: si tratta dei modelli di Kripke. Infatti, i nodi del modello possono essere interpretati come oggetti di una categoria e i connettivi che regolano il passaggio da un nodo all'altro (o le condizioni di accesso che regolano l'accesso da un mondo all'altro, nel caso di modelli di Kripke modali) possono essere visti come i morfismi della categoria. Nel caso dei modelli di Kripke intuizionistici, dato l'ordine definito sugli stati e la transitività della relazione d'ordine, è possibile comporre i morfismi e a ogni stato può essere associato un morfismo identità che lascia invariata l'informazione a esso associata. Nel caso dei modelli di Kripke modali, la relazione di inclusione tra gli insiemi di proposizioni che rappresentano le informazioni associate ai mondi soddisfa altrettanto le condizioni richieste affinché un modello di Kripke modale possa essere visto come una categoria. Inoltre, le caratteristiche delle relazioni (d'ordine e d'inclusione) consentono di definire dei pullback. Nel caso dei modelli di Kripke intuizionistici, il pullback rappresenta la possibilità di stabilire relazioni tra i nodi del modello che non sono rappresentate direttamente dalla relazione d'ordine tra quest'ultimi. Si potrebbe parlare in un certo senso di una "ricerca delle possibili cause" di uno stato rappresentato da un nodo che viene assunto come oggetto terminale ($Z$). Nel caso dei modelli di Kripke modali, i pullback rappresentano analogamente una sorta di ricerca della modalità con cui si manifesta un dato mondo come risultato di altri mondi che lo implicano.
Un altro argomento importante legato alla topologia per il modello in questione è che la topologia di Grothendieck consente di cambiare la base a seconda delle

[266] Zalamea fornisce come esempi di topoi in matematica il topos étale di uno schema (Grothendieck 1962), che rappresenta la chiave per la soluzione della congettura di Weil, 1960-1974, e il topos aritmetico (Connes 2014), che rappresenta una possibile chiave di soluzione dell'ipotesi di Riemann (Zalamea, 2021, p. 131).

esigenze dell'analisi eseguita.[267] La possibilità di cambio della base nel topos è espresso, nella definizione di topos, tramite il punto (i) del primo passo, cioè tramite il fatto che un pullback di ricoprimenti è a sua volta un ricoprimento. Infatti, se un pullback di ricoprimenti è ancora un ricoprimento, è possibile estendere il ricoprimento a parti "nuove" dello spazio topologico, attraverso l'individuazione di opportuni triple ($P$, $p_1$, $p_2$) che soddisfino la definizione di pullback.

Un'esemplificazione molto evocativa e significativa dell'uso metaforico (o analogico, come lo chiama Zalamea) del concetto di topos, cioè della sua applicazione concettuale in un ambito diverso da quello matematico, in cui esso è nato, riguarda quello che Zalamea chiama il "topos dell'esistenza":

> Un ejemplo de uso analógico del (THK) es lo que hemos llamado el "topos de la existencia": tomamos en la base el tiempo de nuestra vida, y situamos sobre cada instante la fibra de nuestras creencias en ese momento. Nuestras vivencias dan lugar a secciones locales a lo largo de nuestra existencia; a menudo, las secciones no son compatibles entre sí, y entramos en incesantes contradicciones que desconfiguran nuestra personalidad. Ya con un poco de perspectiva, nos preguntamos si nuestra constante agitación, en la niñez, en la adolescencia, en la edad madura, o en la vejez, ha tenido algún sentido. En suma, nos preguntamos si las secciones locales de nuestra vida se inyectan bajo alguna propiedad global, que le otorgue una prospección de trascendencia a nuestro ser. Una respuesta positiva o negativa puede forzar en nosotros una razonable satisfacción o una inquietante crisis. [Un esempio di uso analogico del (*THK*)[268] è quello che abbiamo chiamato il "topos dell'esistenza": prendiamo nella base il tempo della nostra vita e posizioniamo sopra ogni istante la fibra delle nostre convinzioni in tale momento. Le nostre esperienze danno luogo a sezioni locali lungo la nostra esistenza; spesso le sezioni non sono compatibili tra loro e entriamo in incessanti contraddizioni che deconfigurano la nostra personalità. Con un po' di prospettiva, ci chiediamo se la nostra costante agitazione, nell'infanzia, nell'adolescenza, nella mezza età o nella vecchiaia, abbia avuto un senso. In breve, ci chiediamo se le parti locali della nostra vita siano iniettate in una qualche proprietà globale, che dà una prospettiva di trascendenza al nostro essere. Una risposta positiva o negativa può portarci a una ragionevole soddisfazione o a una crisi inquietante. (Zalamea, 2021, pp. 134–135, traduzione nostra)

Un'altra immagine molto utile per la comprensione del ruolo del topos nel modello *SKT* è legata alla metafora dell'orchestra, a cui Zalamea ricorre per esemplificare i gesti che egli associa a ciascuna componente del topos (Figura 69):

> Sobre un espacio base (espacio topológico, sitio) se toman todos los haces ("metros") sobre el espacio y surge una nueva estructura (topos) al recorrer el "arsenal" de los haces. El gesto es el de un director de orquesta: sobre (1) una partitura dada (espacio

[267] Il cambio di base è particolarmente importante nell'uso del concetto di topos in logica. Infatti, nella logica dei fasci di Caicedo (1995) è possibile inquadrare sia la logica intuizionista, che è la logica naturale dei fasci, sia la logica classica, in modo tale che quest'ultima risulti essere un caso limite di quella intuizionista.

[268] Ricordiamo che nel presente lavoro *THK* corrisponde a *SKT*.

> base) se toman (2) todos los instrumentos (haces sobre la base) y se unen bajo (3) la batuta del director ("superestructura", dibujada con un gesto circular en rojo). Con ello, detrás de las diversas técnicas instrumentales (2), surge la música (3). Es fácil imaginar al director mientras danza, elonga sus brazos y diversifica los movimientos de sus manos, tratando de expresar finamente los gestos de sincronización material que requiere la orquesta para la posterior elevación espiritual de la obra ejecutada.[269] [Sopra uno spazio base (spazio topologico, sito) si prendono tutti i fasci ("metri") sopra lo spazio e [così] sorge una nuova struttura (topos) allo scorrere "dell'arsenale" dei fasci. Il gesto è quello del direttore d'orchestra: sopra (1) una partitura data (spazio base) si prendono (2) tutti gli strumenti (fasci sopra la base) e si uniscono sotto (3) la bacchetta del direttore ("superstruttura", tracciata con un gesto circolare in rosso). Con esso, dietro le diverse tecniche strumentali (2) sorge la musica (3). [Si veda la Figura 69] È facile immaginare il direttore mentre danza, allunga le sue braccia e diversifica i movimenti delle mani, cercando di esprimere con precisione i gesti di sincronizzazione materiale che l'orchestra richiede per la successiva elevazione spirituale dell'opera eseguita]. (Zalamea, 2021, p. 130, traduzione nostra)

In Zalamea (2021) il topos ha prevalentemente il compito di cogliere le idee archetipiche che sorgono dall'applicazione del modello *SK* all'analisi degli aspetti più generali dell'evoluzione delle opere dei singoli matematici. Così vengono esaminati i lavori di Galois, Riemann, Poincaré, Cantor, Gödel, Hilbert e Grothendieck, sette esempi di matematici con un altissimo grado di creatività, per i quali vengono scelti quattro momenti significativi della loro vita creativa (che di

[269] Notiamo qui la forte analogia con il recente concetto di ontologia nella TO. In Radford (2019), l'Autore ricorre alla stessa metafora dell'orchestra, individuando nella musica prodotta dallo sforzo comune (il joint labour) dell'orchestra, composta dai musicisti (gli studenti) e dal dirigente d'orchestra (l'insegnante), l'oggetto matematico prodotto nelle ore di matematica. In maniera analoga, Zalamea descrive l'analisi filosofica della produzione matematica tramite il modello *SKT*: le azioni matematiche sono viste come i gesti che i musicisti esprimono tramite i loro strumenti, e che nel modello *SKT* sono rappresentati dai fasci; l'azione del filosofo della matematica è vista come il gesto che il direttore d'orchestra compie con il suo strumento, cioè la bacchetta, che nel modello *SKT* è rappresentato dal topos. Nel caso del modello *SKT* la musica non è però la matematica prodotta (dagli studenti e dall'insegnante in aula o dai matematici nelle loro pratiche storicamente e culturalmente determinate) ma è, a seconda del soggetto analizzato, il frutto dell'analisi di pratiche o azioni di comunità di pratiche diverse. Vi è inoltre un altro aspetto sul quale vale la pena soffermarsi e che è presente nel modello *SKT*, non avendo però un corrispondente nell'ontologia della TO: si tratta dello spartito musicale, che nel modello *SKT* è rappresentato dallo spazio di base. Questo aspetto è importante per due motivi: (1) perché lo spazio di base può rappresentare la componente ontologica derivante dalla matematica come disciplina formale, con le sue definizioni, i suoi teoremi e il suo linguaggio specifico, e che in didattica della matematica rappresenta una componente ontologica "realista", in quanto è da essa che parte qualsiasi trasposizione didattica ed è a essa che anche nella produzione matematica in aula si torna nel momento in cui si parla *degli* oggetti matematici; (2) perché diversi sistemi di razionalità a cui fanno riferimento gli attori (gli studenti, l'insegnante, il ricercatore in didattica della matematica, il matematico professionista) possono essere espressi in termini di basi con topologie differenti, ma anche perché tramite il concetto di topos di Grothendieck è possibile cogliere l'evoluzione da una base in un'altra, fornendo un fondamento teorico per quella che abbiamo chiamato "l'ontologia transitoria" in didattica della matematica.

solito corrispondono a importanti pubblicazioni oppure alla stesura di manoscritti), ciascuno dei quali è rappresentato da un nodo di un modello di Kripke intuizionista.
A ciascuno di questi momenti storici corrisponde un fascio collegato al rispettivo nodo del modello di Kripke. In tale fascio lo spazio superiore rappresenta i concetti collegati alla specifica tematica di quel periodo di lavoro del matematico. Tra tali concetti sono rintracciabili, a volte, delle sezioni globali che li collegano, mentre nello spazio di base sono rappresentati gli oggetti matematici che sono una sorta di proiezione di tali concetti sul piano dei risultati matematici, formulati in termini di definizioni, teoremi etc. Le controimmagini di tali risultati nello spazio superiore del fascio creano le sezioni (a volte globali, altre volte solo locali) interne ai singoli fasci. Il topos ha da un lato il ruolo di creare, se possibile, un senso trasversale che consente di collegare i fasci tra loro, attraverso una sezione esterna del fascio di fasci che si crea in questo modo, mentre dall'altro consente di estrarre l'idea chiave che riassume in sé il senso dell'intera opera, per esempio in termini di un qualche genere di teoria.
Nel prossimo paragrafo mostreremo un esempio di applicazione del modello *SKT* a un frammento della presente tesi.

### 13. 2. 3. 1. Un esempio di ricorso al modello *SKT* tratto dal presente lavoro

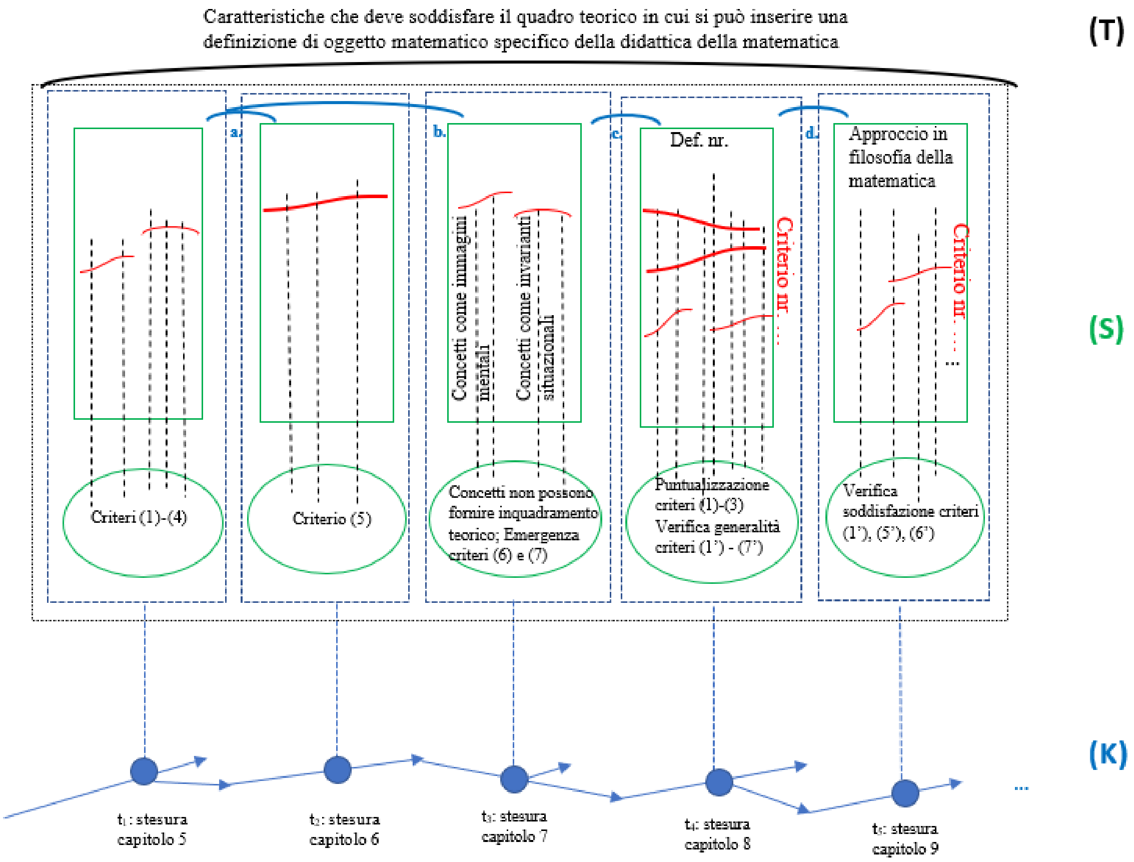
Prima di procedere riassumiamo brevemente per maggiore chiarezza le caratteristiche generali del concetto di topos che sono state esposte e discusse nel paragrafo precedente:

- il topos consente di studiare gli oggetti attraverso le loro relazioni con l'ambiente poiché la topologia sulla quale si basa è di tipo categoriale, in cui sono i morfismi, cioè le relazioni, tra un oggetto e altri oggetti della categoria, a fornire informazioni sulla sua natura (si veda il concetto di oggetto sintetico esposto nel capitolo 10);
- il topos consente di studiare un oggetto in termini di "percorsi praticabili" su di esso, espressi tramite le sezioni interne nei fasci (ottenute sulla base degli assiomi di incollamento tra sezioni compatibili) e attraverso le sezioni esterne tra essi (ottenute tramite il concetto di pullback); in questo modo è possibile cogliere possibili relazioni tra sottotipi e tipi da un lato e archetipi dall'altro;
- il topos, attraverso il concetto di pullback, definito nella categoria che viene associata alla topologia dello spazio base del fascio di fasci, consente di creare collegamenti tra basi appartenenti a fasci diversi, offrendo così la possibilità di passaggio da una base a un'altra e creando così una unica base globale nel topos;
- il topos consente di cogliere delle proprietà strutturali globali che governano l'intero fascio di fasci ed emergono da esso;

- l'interpretazione del topos fornisce un significato globale alla struttura di fascio di fasci.

Dunque, la componente del modello *T* e l'intero modello *SKT* possono trovare impiego in tutte quelle situazioni in cui l'analisi dei dati richiede (e consente) di tenere conto degli aspetti appena evidenziati.

Nell'immagine (Figura 70) è rappresentato il topos (*T*) che emerge dal fascio dei fasci composto dai fasci (*S*) corrispondenti ai capitoli 5, 6, 7, 8 e 9, cioè dalla prima parte della tesi.




**a.** Individuazione criteri (top down e bottom up)

**b.** Verifica possibilità di inquadrare gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica sulla base dei criteri emersi nei capitoli 5 e 6.

**c.** Puntualizzazione criteri e emergenza criteri trasversali nuovi.

**d.** Relazione tra oggetti matematici specifici della didattica della matematica e oggetti matematici.

Figura 70. Applicazione del modello SKT alla prima parte della tesi, cioè ai capitoli 5, 6, 7, 8 e 9.

Nel diagramma in figura ogni fascio corrisponde a un nodo del modello di Kripke (*K*), il quale è associato a un numero di capitolo della tesi. Di seguito supporremo dunque che l'ordine nella successione dei numeri dei capitoli corrisponde a un ordine temporale nella elaborazione della tesi.
Nel primo fascio, associato al capitolo 5, sono riportate simbolicamente le proiezioni e le due sezioni locali che hanno fatto emergere i criteri da (1) a (4) (si veda il paragrafo 7.2).

Nel secondo fascio, associato al capitolo 6, sono riportate le proiezioni e la sezione globale che ha fatto emergere il criterio (5) come caratteristica trasversale agli esempi forniti (si veda il paragrafo (7.2.).
Nel terzo fascio, associato al capitolo 7, sono evidenziate due sezioni locali che sono ricondotte alla classificazione degli approcci ai concetti intesi come abilità o come immagini mentali, mentre i risultati, intesi come le proiezioni (cioè la sintesi) dell'analisi effettuata, consistono nella constatazione che gli approcci ai concetti non sono in grado di inquadrare dal punto di vista teorico una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica, nonché nell'individuazione di altri due criteri, (6') e (7'), che pur non risultando trasversali sono emersi con frequenza nei vari approcci. Inoltre, gli approcci ai concetti hanno consentito di trarre informazioni utili per la puntualizzazione dei criteri (1), (2) e (3) (si veda il capitolo 8.2.).
Il quarto fascio, associato al capitolo 8, rappresenta simbolicamente le proiezioni (cioè la sintesi) delle analisi delle sette definizioni proposte nel capitolo e le sezioni che risultano da tali proiezioni: in alcuni casi abbiamo delle sezioni globali, il che significa che alcuni criteri sono trasversali alle definizioni, mentre in altri casi abbiamo solo delle sezioni locali, in quanto altri criteri, pur non essendo incompatibili con le varie definizioni, non sono presi in considerazione né da esse direttamente né dal contesto teorico più ampio nel quale si inseriscono.
Il quinto fascio, associato al capitolo 9, rappresenta infine simbolicamente le analisi (sezioni) e sintesi (proiezioni) in riferimento alla soddisfazione dei criteri relativi agli oggetti matematici in filosofia della matematica.
Anche in questo caso i modelli di Kripke sono modelli intuizionistici che rappresentano semplicemente un processo.
Le sezioni in blu, indicate con le lettere *a.*, *b.*, *c.* e *d.* sono le sezioni esterne tra i fasci che li collegano tra loro: l'individuazione dei criteri tramite approccio top down e bottom up nei capitoli 5 e 6 (*a.*), la verifica della possibilità di inquadramento teorico di quanto evidenziato in tali criteri nel capitolo 7, nonché la ricerca di altri possibili criteri da tenere in considerazione (*b.*), la puntualizzazione dei criteri già evidenziati e la verifica della trasversalità di quest'ultimi (*c.*), la relazione tra gli oggetti matematici specifici della didattica della matematica e gli oggetti matematici in filosofia della matematica (*d.*).
Il topos (*T*) emerge come il senso generale della prima parte della tesi, dato dalla risposta alla prima domanda di ricerca, che però si proietta già verso la seconda parte della tesi, in cui si cercherà di costruire una teoria adatta ad accogliere una definizione avente le caratteristiche cercate.
Passiamo ora all'ultima componente del modello *SKTR*, che è costituito dalle superfici di Riemann.

### 13. 2. 4. Le superfici di Riemann

L'ultima componente del modello *SKTR* consente di aggiungere all'evoluzione temporale (modello *SK*) e all'individuazione di proprietà archetipiche che emergono dal percorso (modello *SKT*), il ruolo che tali archetipi svolgono nell'analisi delle diverse espressioni culturali dell'essere umano. Gli *archetipi* matematici (di cui il topos è qui l'esempio generale) si declinano e vengono interpretati in molteplici *tipi* culturali, ponendo le basi per la transdisciplinarità (Zalamea, 2021).
Per poter tenere conto della ramificazione degli archetipi matematici, Zalamea introduce come strumento metodologico le superfici di Riemann. Per comprendere meglio la modalità metaforica con cui tali oggetti matematici vengono usati nel modello *SKTR*, è necessario evidenziare le loro caratteristiche concettuali, come già fatto nel caso delle altre tre componenti del modello. Procediamo dunque con una breve esposizione e discussione di tali caratteristiche, prima di fornire una definizione costruttiva di *superficie di Riemann*.
Le superfici di Riemann sono delle superfici unidimensionali che hanno localmente la struttura del piano complesso, mentre la loro topologia globale può assumere caratteristiche anche molto differenti. Storicamente l'idea di superficie di Riemann nasce dall'esigenza di rendere univoci i prolungamenti analitici delle funzioni olomorfe.
Il prolungamento analitico di una funzione è una funzione complessa di variabile complessa che consente di estendere gradualmente il dominio di una funzione reale o complessa attraverso delle sovrapposizioni parziali successive del dominio del prolungamento con il dominio della funzione di partenza. Dato che la funzione di partenza e il suo prolungamento devono essere definite entrambe sul dominio di partenza e devono coincidere su tale dominio, questo equivale a chiedere che la funzione di partenza sia invertibile. Un problema importante risiede quindi nel fatto che le inverse di molte funzioni olomorfe sono funzioni palindrome, cioè non iniettive, il che significa che per esse si ottengono prolungamenti diversi sulla base del percorso seguito lungo i diversi valori delle funzioni inverse.

**Esempio**
La funzione f: $\mathbb{C}\rightarrow \mathbb{C}$: $z\rightarrow z^2$ ha come funzione inversa $f^{-1} = \sqrt{z}$, la quale associa però a ciascun elemento del dominio ($\mathbb{C}$) non uno unico, ma due valori del codominio ($\mathbb{C}$); così si ha per esempio, per z=1, $f^{-1} = \sqrt{1} = 1$ ma anche $f^{-1} = \sqrt{1} = -1$ e quindi un prolungamento della funzione $f$ potrebbe seguire due percorsi diversi. In maniera analoga si comportano le inverse di tutte le funzioni $f$: $\mathbb{C}\rightarrow \mathbb{C}$: $z\rightarrow z^n$, $n \in N$, $n>1$.
Per poter rendere invertibili tali funzioni, si può procedere in due modi, come sottolinea Zalamea (2021): (1) è possibile prendere in considerazione le restrizioni delle funzioni su opportuni domini (per esempio nel caso della funzione $f$: $\mathbb{C}\rightarrow \mathbb{C}$: $z\rightarrow z^2$, prendendo come dominio il semipiano complesso costituito dai primi due

quadranti, cioè $\{z \in \mathbb{C}: Im(z) > 0\}$ oppure quello costituito dal terzo e quarto quadrante, cioè $\{z \in \mathbb{C}: Im(z) < 0\}$, domini per i quali la funzione inversa esiste, dato che tali restrizioni sono suriettive e iniettive, oppure (2) è possibile "moltiplicare" i piani del codominio, associando un piano complesso alle radici positive e uno alle radici negative e ottenendo così una funzione biunivoca su ciascuno di tali piani. I piani in questione sono collegati tra loro nell'origine (0 viene mappato in 0), la quale costituisce un punto di ramificazione doppio per l'inversa $f^{-1} = \sqrt{z}$. I piani, uniti tra loro tramite il punto di ramificazione, costituiscono un'unica superficie che prende il nome di *superficie di Riemann*, mentre i singoli piani che la compongono si chiamano *fogli* della superficie.
Dal punto di vista matematico, le superfici di Riemann consentono quindi di "moltiplicare" il codominio delle funzioni complesse a variabile complessa, in maniera tale da evitare eventuali problemi di inversione.
Riemann stesso spiegò inizialmente il concetto che sta alla base della superficie che poi prese il suo nome come segue: più piani complessi (eventualmente anche un numero infinito) vengono sovrapposti, provvisti con un certo tipo di "tagli" (per esempio dei tagli lineari) e poi incollati insieme lungo tali tagli. Non si tratta certo di una definizione rigorosa, nemmeno per l'epoca in cui nacque l'idea di superficie di Riemann (la tesi dottorale in cui tale concetto, anche se non il nome, appare per la prima volta è del 1851) ma, come accade di solito, le definizioni rigorose seguono con molto ritardo le invenzioni matematiche [infatti, una definizione rigorosa di superficie di Riemann si ebbe solo nel 1913, con Hermann Weyl].
Di seguito proponiamo una definizione costruttiva di superficie di Riemann, fornita da Zalamea (2021, p. 175–176):

> **Definizione 25.** La definición de superficie de Riemann se realiza en tres pasos: (i) una *variedad topológica 2-dimensional X* es un espacio topolóico de Hausdorff donde todo punto posee una vecindad homeomorfa a un abierto de $R^2$; (ii) una *estructura compleja* sobre $X$ consiste en un "atlas", o familia de "mapas", $\{(U_i;\ \varphi_i): i \in I\}$ tal que $U_i$ es abierto en $X$, el atlas recubre $X$ ($\cup_{i\in I} U_i = X$), los mapas son fieles ($\varphi_i$: $U_i \to \varphi(U_i)^{\text{abierto}} \subseteq C$ es homeomorfismo), y los tránsitos son analíticos (para cada par de mapas $(U_i; \varphi_i)$, $(U_j; \varphi_j)$, $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$: $\varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ es holomorfa); y (iii) una *superficie de Riemann* se define entonces como una variedad topológica 2-dimensional conexa $X$ con una estructura compleja sobra $X$. [La definizione di superficie di Riemann si realizza in tre passi: (i) una *varietà topologica*[270] *2-dimensionale* è uno spazio topologico di Hausdorff[271] in cui ogni punto possiede un intorno omeomorfo a un aperto di $R^2$, (ii) una *struttura complessa* su $X$ consiste in un atlante,[272] o una famiglia di "mappe" $\{(U_i;\ \varphi_i): i \in I\}$, tale che $U_i$ è aperto in $X$,

[270] Una *varietà topologica* è uno spazio topologico che è localmente simile allo spazio euclideo, mentre può avere caratteristiche globali molto diverse da quest'ultimo.
[271] Uno *spazio di Hausdorff*, detto anche spazio separato, è uno spazio in cui, dati due punti dello spazio, è sempre possibile trovare per essi due intorni aperti disgiunti.
[272] Un *atlante* per uno spazio topologico è una famiglia indicizzata di carte sullo stesso spazio topologico, cioè di omeomorfismi che associano a ogni aperto dello spazio topologico un aperto dello spazio euclideo, che costituisce una copertura per lo spazio topologico.

l'atlante ricopre $X$ ($\bigcup_{i\in I} U_i = X$), le mappe sono fedeli ($\varphi_i$: $U_i \rightarrow \varphi(U_i)^{\text{aperto}} \subseteq C$ è omeomorfismo) e i transiti sono analitici (per ciascuna coppia di mappe ($U_i$; $\varphi_i$), ($U_j$; $\varphi_j$), $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$: $\varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ è olomorfa) e (iii) una *superficie di Riemann* si definisce quindi come una varietà topologica 2-dimensionale connessa $X$ con una struttura complessa su $X$.] (Zalamea, 2021, pp. 175-176, traduzione nostra)

Come già evidenziato all'inizio del presente paragrafo, nel modello SKTR il compito delle superfici di Riemann consiste nel catturare concettualmente il ruolo che gli archetipi matematici svolgono, o possono svolgere, nella concettualizzazione nonché nell'analisi, delle diverse espressioni culturali dell'essere umano.[273]
Ma Zalamea si spinge ben oltre l'individuazione degli archetipi matematici nelle varie produzioni culturali, lanciando una provocazione:

> Sin un nivel metafísico universal (*T*) no pueden entenderse los tránsitos particulares entre matemáticas (*HK*) y cultura (*R*). Dicho de manera provocativa, sin metafísica no puede pensarse seriamente lo transdisciplinar. [Senza un livello metafisico universale (*T*) non possono verificarsi i transiti particolari tra le matematiche (*SK*) e la cultura (*R*). Detto in maniera provocatoria, senza metafisica non si può pensare seriamente la transdisciplinarità]. (Zalamea, 2021, p. 184, traduzione nostra)

Abbiamo già sottolineato come per Zalamea i concetti matematici nascono di solito tramite una distillazione, una "ripulitura" dall'inessenziale, di cui sono affette le idee originarie a cui si riferiscono tali concetti e che si riscontrano in ambiti non necessariamente matematici, diventando oggetti matematici definiti nei linguaggi specifici della disciplina. Dall'altro lato, invece, gli archetipi matematici così ottenuti, ridotti all'essenziale e divenuti oggetti matematici a tutti gli effetti, rivelano tutta la loro forza interpretativa e possono fungere, attraverso un uso analogico o metaforico, da strumenti concettuali negli ambiti culturali più diversi. Tali applicazioni sono, a loro volta, utili per comprendere meglio gli archetipi matematici e le loro caratteristiche. Ciò che per Zalamea sono i transiti metafisici universali (Zalamea, 2021, p. 184) sono dunque queste *possibilità* di transito tra archetipi matematici universali e loro concretizzazioni particolari.
Se vediamo le applicazioni analogiche degli archetipi matematici come delle funzioni complesse a variabile complessa allora il concetto di superficie di Riemann può rendere bene l'idea dell'unicità dello stesso archetipo (un'unica funzione complessa a variabile complessa) presente in un certo numero (*n*) di diversi ambiti (*n* fogli di una superficie di Riemann), considerata in maniera tale che ciascuna applicazione rimandi a un'immagine distinta dell'archetipo in un contesto specifico (un particolare foglio della superficie di Riemann), in maniera tale che il dominio dell'archetipo venga esteso (prolungamento della funzione complessa), pur conservando la possibilità di rintracciare le caratteristiche dell'archetipo che sono trasversali alle applicazioni (punti di ramificazione *n*-upli).

---

[273] Notiamo che il concetto di *cultura* a cui ci riferiamo qui è tale che anche la matematica stessa è considerata a tutti gli effetti un'espressione culturale dell'essere umano.

Questo è sostanzialmente l'uso che Zalamea fa del concetto di superficie di Riemann nella prospettiva sintetica della filosofia della matematica. Una rappresentazione che schematizza le relazioni tra l'archetipo del topos ($T$) e le superfici di Riemann ($R$), e che possiamo chiamare "il modello $TR$" è mostrata nella Figura 71. La moltiplicazione delle prospettive, in seguito alla sintesi del topos, viene interpretata come il "gesto base" delle superfici di Riemann, che conduce alla corrispondenza biunivoca tra il topos e i diversi fogli della superficie.

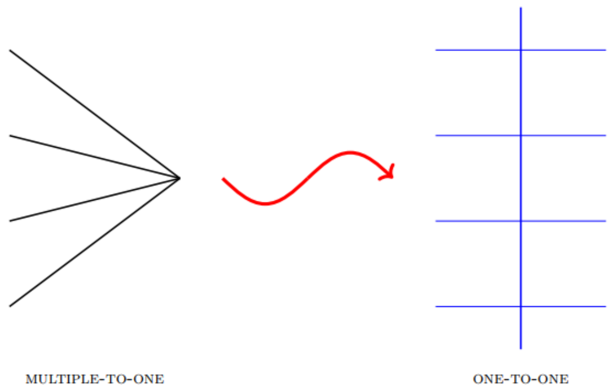



Figura 71. Il "gesto" base delle superfici di Riemann, espresso simbolicamente tramite la freccia rossa ondulata: dall'unità alla biunivocità (tratto da Zalamea, 2021, p. 176).

### 13. 2. 4. 1. Un esempio di ricorso al modello *TR* tratto dal presente lavoro

Per comprendere meglio l'utilità delle superfici di Riemann nel modello *SKTR,* dobbiamo mettere in evidenza le loro caratteristiche concettuali, già discusse nei precedenti paragrafi.
Riassumendo possiamo dire che l'idea di superficie di Riemann può essere chiamata in causa dal punto di vista concettuale:

- ogni volta che vi è un archetipo la cui azione viene proiettata o riconosciuta in diversi ambiti;
- ogni volta che si intende mostrare la modalità in cui una riduzione di più concetti a un unico "comune denominatore" venga poi declinata in maniera specifica in diversi ambiti, consentendo così di acquisire conoscenza, attraverso tali declinazioni, sul concetto generale espresso tramite il comune denominatore.

Come esempio di applicazione del modello *TR* riportiamo una sua possibile interpretazione (Figura 72), in cui l'archetipo del topos in matematica si proietta nelle varie discipline, tra le quali anche la didattica della matematica, dove esso è rappresentato dall'idea di oggetto matematico specifico della didattica della matematica, il quale si proietta a sua volta su diverse applicazioni in didattica della matematica.
Dunque, se l'archetipo fosse, come già evidenziato, l'idea di oggetto matematico specifico della didattica della matematica, le sue diverse coniugazioni nelle diverse teorie o approcci in didattica della matematica potrebbero essere viste come i fogli delle superfici di Riemann.

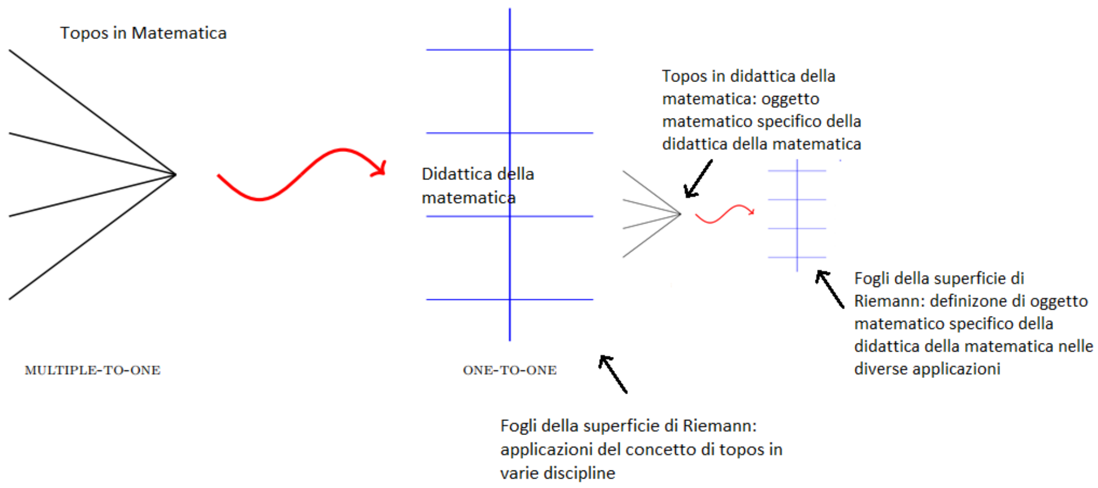



Figura 72. Esempio di replica a vari livelli dell'interazione tra topos e superficie di Riemann (modello TR).

Osservando l'immagine (Figura 72), possiamo notare come lo strumento concettuale che ha le sue origini nell'oggetto matematico *superficie di Riemann* si configura come una sorta di frattale, nel quale la struttura archetipica si riproduce a diversi livelli.

## 13. 3. Conclusioni

Il modello *SKTR* esposto e discusso in questo capitolo non può essere inteso come uno strumento metodologico per il lavoro di tesi, in quanto la metodologia seguita durante il lavoro è quella esposta nel capitolo 4, anche se il modello, nella sua

universalità, è applicabile al lavoro qui esposto, come già mostrato nei paragrafi precedenti.
Gli strumenti qui esposti devono invece essere intesi come la parte metodologica adatta ad "accompagnare" il quadro teorico in cui si colloca la definizione che abbiamo fornito. Infatti, se considerato separatamente dagli strumenti matematici per il quadro teorico che sono stati introdotti nel capitolo 11, il modello *SKTR* può apparire come un insieme di schemi con i quali rappresentare dei concetti. Questo svuoterebbe però il modello dalla sua forza creativa, in quanto è solo la comprensione dei concetti matematici dai quali esso emerge, a renderlo un vero strumento tecnico di lavoro che può essere esteso e adattato alle esigenze.
In particolare, notiamo che il modello *SKTR* qui presentato supporta il quadro teorico esposto nel capitolo 10 e il suo modello matematico esposto nel capitolo 11 poiché:

- esso consente di tenere conto in modo esplicito della dinamicità degli oggetti, fornendo uno strumento tecnico per interpretare un'ontologia transitoria (infatti, ciò è possibile attraverso l'introduzione dei modelli di Kripke intuizionistici), ma anche del loro aspetto statico, considerando solo il fascio come immagine istantanea di un processo;
- esso consente di tenere conto degli aspetti logici nell'evoluzione dei concetti e degli oggetti (infatti, ciò è possibile attraverso l'introduzione dei modelli di Kripke modali e intuizionistici, ma soprattutto attraverso il concetto di pullback che consente di considerare un cambio di base tra diverse tipologie di logiche, per esempio intuizionista e classica, dove la prima è più adatta per descrivere il processo di apprendimento, mentre la seconda consente di riferirsi agli oggetti matematici);
- il modello *S* è di per sé un modello interpretativo anzi, come abbiamo evidenziato nel paragrafo 12.2.2.1, esso può essere considerato un modello ermeneutico, poiché è proprio attraverso l'interazione tra dati locali (proiezioni e sezioni locali) e dati globali (sezioni globali) che si esemplifica in maniera fedele l'idea di ermeneutica esposta nel paragrafo 10.5.;
- nel modello *SK* l'aspetto semiotico può essere inquadrato sia tenendo conto del semiotic bundle (che si svilupperebbe nell'evoluzione dello spazio topologico "alto", cioè quello relativo alle intuizioni, alle idee, agli aspetti generativi e creativi dell'attività, ma anche tenendo conto della sua proiezione sullo spazio "basso", nel quale possono trovare un'interpretazione appropriata anche i registri semiotici di Duval, in termini di ciò che può essere proiettato dalla dimensione multimodale dello spazio "alto" sulla dimensione formalmente accettabile nel linguaggio matematico nello spazio "basso".

Il modello presentato rende dunque *operativo* il quadro teorico che abbiamo individuato per la definizione fornita nel capitolo 12.
La sua acquisizione è per così dire l'ultima "conquista" per il presente lavoro di tesi, che non era prevista dal percorso di ricerca e quindi non è rispecchiata nelle

domande di ricerca, ma che si è resa necessaria in seguito all'esigenza di rendere operativi il modello di definizione fornito e il quadro teorico in cui esso si inserisce.[274]

Come mostreremo nel paragrafo 14.1., il Topos (*T*) che emerge dalla ricerca qui presentata è a nostro avviso un risultato teorico molto importante dal punto di vista epistemologico, che non avrebbe potuto essere messo in evidenza senza il ricorso agli strumenti introdotti nel presente capitolo.

[274] Mettiamo in evidenza il fatto che il testo dal quale abbiamo tratto il modello *SKTR* non è ancora stato pubblicato e ringraziamo il Prof. Zalamea per averci consentito di studiarlo prima della sua pubblicazione, in tempo per la conclusione del presente lavoro di tesi.

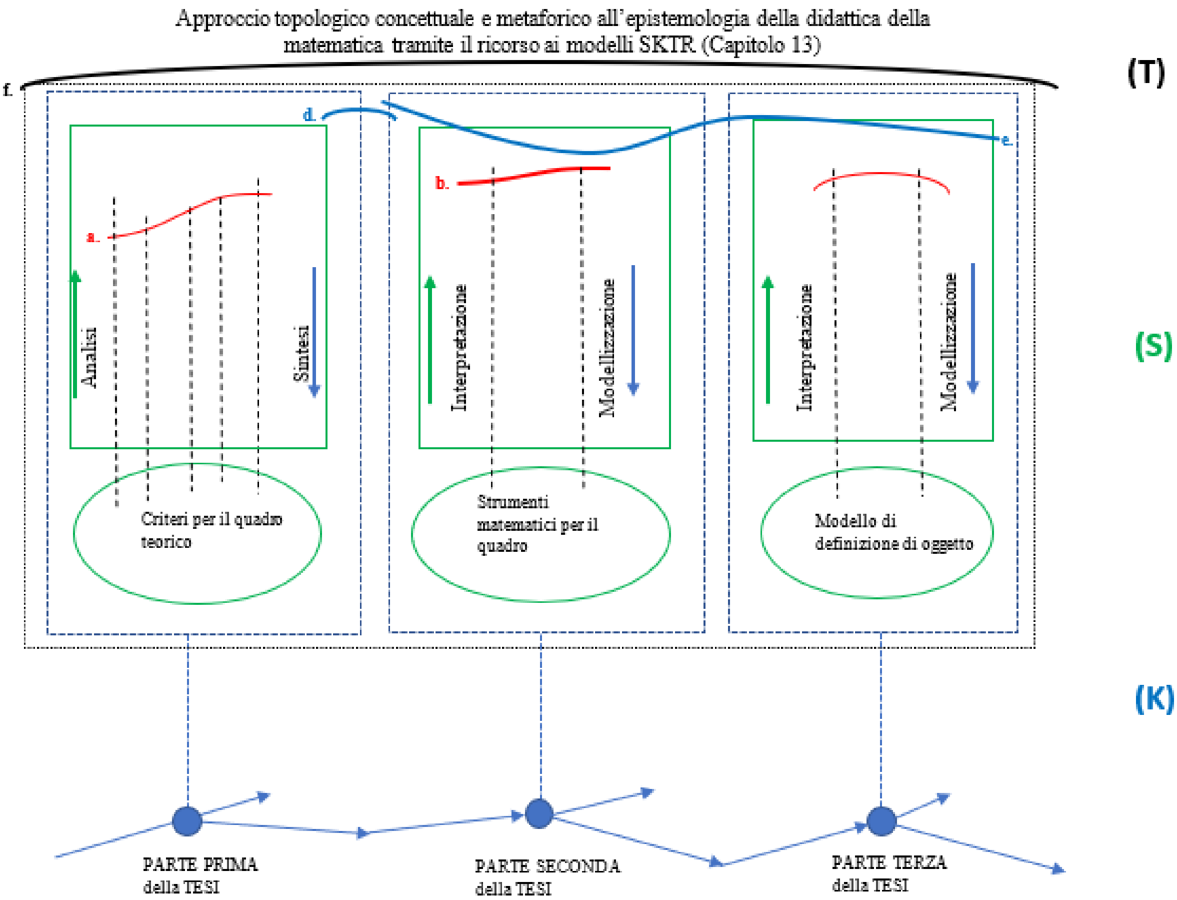
# 14. Conclusioni

## 14. 1. Riflessioni conclusive: uno sguardo indietro e uno in avanti

Nel corso della presente tesi abbiamo già fornito le risposte alle domande di ricerca *D1*, *D2* e *D3*, formulate nel capitolo 3, e quindi non ci soffermiamo ulteriormente su esse.
Possiamo affermare che la nostra domanda di ricerca in senso più ampio

> *È possibile individuare una definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica e se sì, in quali termini?*

ha ricevuto una risposta affermativa, in quanto abbiamo individuato i criteri che avrebbe dovuto soddisfare la definizione (risposta alla domanda di ricerca *D1*), individuato il quadro teorico in grado di accogliere tali criteri (risposta alla domanda di ricerca *D2*), costruendo anche un suo modello matematico categoriale ed evidenziando la sua coerenza e fondatezza gnoseologica, e fornendo infine un modello di definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica che si colloca in tale quadro teorico e soddisfa i criteri evidenziati nella risposta alla domanda di ricerca *D1* (risposta alla domanda di ricerca *D3*).
Il percorso che abbiamo seguito può essere rappresentato ricorrendo al modello *SKT* (si veda il paragrafo 13.2.3.) nel modo evidenziato nel diagramma della Figura 73.




a. Aspetti invarianti nelle variazioni relative agli esempi, ai diversi approcci, e alle diverse definzioni, individuatitramiteapproccio top down o bottom up nei diversi capitoli e loro affinamento progressivo tramite ripetute analisi e sintesi.

b. Quadro teorico coerente e gnoseologicamente fondato per via categoriale, attraverso la modellizzazione del ricorso metaforico agli strumenti categoriali in didattica della matematica e la progressiva interpretazione dei risultati nel quadro teorico.

c. Modello di definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica fornito nel linguaggio categoriale e interpretato nel quadro teorico.

d. Criteri individuati come presupposto per il quadro teorico.

e. Emergenza di un approccio categoriale all'epistemologia della didattica della matematica.

f. Emergenza della possibilità di un approccio operativo topologico all'epistemologia della didattica della matematica, basato sugli strumenti topologici concettuali e metaforici del modello SKTR, esposto nel capitolo 13.

Figura 73. Il modello SKT applicato al presente lavoro di tesi.

Il diagramma rappresenta le tre parti della tesi che si focalizzano sulle tre domande di ricerca: a ogni nodo del modello di Kripke intuizionistico (**K**) è associato un fascio (**S**) che rispecchia una di queste tre parti, in ordine cronologico rispetto alla loro esposizione nella tesi.
Il primo fascio sulla sinistra rappresenta l'emergenza della sezione globale **a.** come la caratteristica di questa parte della tesi, in cui si individuano gli aspetti invarianti nelle variazioni relative agli esempi, ai diversi approcci e alle diverse definizioni nei vari capitoli. Tale sezione si rispecchia nei criteri che la definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica dovrebbe soddisfare, ottenuti tramite l'applicazione di un approccio di tipo *top down* o *bottom up*, come risultato di ripetute sintesi (proiezione) e analisi (sezione) nei diversi capitoli, in un percorso progressivo di raffinamento dei criteri stessi.
Nel fascio centrale (**S**), associato al secondo nodo del modello di Kripke (**K**) e quindi alla seconda parte della tesi, riferita alla domanda di ricerca *D2*, una sezione globale **b.** emerge in termini di un quadro teorico coerente e gnoseologicamente fondato per via categoriale, attraverso la modellizzazione del ricorso metaforico agli strumenti categoriali in didattica della matematica e la progressiva interpretazione dei risultati nel quadro teorico stesso.
Nell'ultimo fascio (**S**), associato al terzo nodo del modello di Kripke (**K**) e quindi alla terza parte della tesi, riferita alla domanda di ricerca *D3*, una sezione globale **c.** emerge come una visione dell'oggetto matematico specifico della didattica della matematica in termini di metafora strutturale risultante da ripetute immersioni, attraverso il *modello* di definizione fornito nel linguaggio categoriale astratto e interpretato nel quadro teorico.
Le due sezioni esterne, **d.** ed **e.,** si riferiscono al fatto che i criteri individuati nella prima parte della tesi sono caratteristiche necessarie per la definizione (**e.**) e sono i presupposti per il quadro teorico (**d.**).
La sezione esterna **f.** che collega il secondo e il terzo fascio è data dall'emergenza di un approccio categoriale all'epistemologia della didattica della matematica, nel quale il quadro teorico assume una dimensione più ampia, come possibile approccio teorico a sé stante e non solo come "contesto" della definizione stessa, data anche l'astrattezza di quest'ultima, che si presenta come modello di definizione molto generale.
Infine, il topos (**T**), rappresentato dall'arco in nero **g.**, che emerge come significato ultimo della tesi è quello di un'apertura di un possibile approccio operativo topologico all'epistemologia della didattica della matematica, basato sugli strumenti topologici concettuali e metaforici, non formali, del modello *SKTR*, esposto nel capitolo 13.
Tornando alla nostra riflessione iniziale che ci ha portato a chiederci se il problema della definizione degli oggetti matematici della didattica della matematica possa avvenire indipendentemente da una teoria specifica già esistente, in maniera tale da trascendere la diversità di approcci, possiamo affermare che ciò è possibile a nostro avviso solo a patto di creare *ad hoc* l'ambiente teorico in cui inserire la

definizione e solo grazie al ricorso a strumenti teorici astratti, che non possono che essere di natura matematica.
Tuttavia, il modello matematico usato deve essere inteso come un supporto al quadro teorico in didattica della matematica che emerge in modo naturale da esso e non come un modello rigido nel quale far rientrare il quadro teorico stesso. Infatti, è per questo motivo che il titolo del capitolo 11 è "*Strumenti* matematici categoriali per il quadro teorico" e non semplicemente "Quadro teorico".
Data la sua generalità, il modello di definizione fornito e il quadro teorico in cui esso si inserisce, potranno essere applicati in una vasta gamma di contesti e in riferimento a problemi di varia natura, in cui l'obiettivo principale è quello di gettare luce sulle relazioni tra gli elementi coinvolti, in accordo con la grande forza della teoria delle categorie come strumento di lavoro che consente di cogliere e organizzare in maniera coerente aspetti relazionali che spesso rimangono nascosti.
Un esempio in questo senso è il problema relativo alla continuità/discontinuità tra argomentazione e dimostrazione, già esposto nel capitolo 6, la cui soluzione dal punto di vista dell'approccio categoriale da noi delineato è a buon punto nel percorso di ricerca, ma richiede ancora l'indagine di alcuni aspetti tecnici, legati agli strumenti introdotti nel capitolo 13.
Altri esempi di possibili applicazioni, alle quali abbiamo già accennato in parte durante l'esposizione, che si riferiscono alla definizione in senso stretto o al quadro teorico in cui essa si inserisce, sono i seguenti:

- l'inquadramento degli esempi di oggetti matematici specifici della didattica della matematica forniti nel capitolo 6 in termini categoriali, in accordo con la definizione fornita;
- la "proiezione" del modello di definizione fornito nella tesi sulle diverse definizioni di oggetto matematico esaminate nel capitolo 8, al fine di inquadrare le relazioni tra esse;
- la coordinazione del *semiotic bundle* e dei registri semiotici in un costrutto teorico unitario;
- l'indagine del legame tra i "gesti" astratti compiuti nelle componenti del modello SKTR, nel senso inteso da Zalamea, e l'approccio multimodale in matematica.

Inoltre, un obiettivo che ci prefiggiamo a medio-breve termine è quello di rendere più fruibili i risultati della ricerca da parte anche di ricercatori che non desiderano approfondire gli aspetti tecnici, pur volendo ricorrere agli strumenti concettuali qui introdotti per l'analisi e la sintesi dei propri lavori di ricerca. In questo senso sarebbe importante elaborare formulazioni puntuali discorsive degli strumenti tecnici coinvolti che conservino gli aspetti matematici concettuali ma non necessitino di un ricorso al linguaggio formale.
Un aspetto sul quale è importante ancora soffermarsi in conclusione riguarda la questione relativa alla caratterizzazione del modello che abbiamo proposto in termini di capacità descrittiva, esplicativa e predittiva, categorie solitamente usate

per una valutazione pragmatica e teleologica dei modelli, cioè al fine di una loro valutazione in termini di utilità.[275]
A nostro avviso il modello presentato è in prima linea un modello con una forza esplicativa profonda e vasta poiché è in grado di far emergere relazioni che altrimenti restano celate o possono essere caratterizzate solo con un elevato grado di ambiguità (si veda per esempio la relazione tra oggetti matematici e oggetti matematici specifici della didattica della matematica, centrale in questa tesi, ma anche quella tra la matematica intesa come campo di conoscenza organizzato in teorie formali e la pratica matematica, oppure quello tra *semiotic bundle* e registri semiotici). Si tratta certamente anche di un modello in grado di descrivere le relazioni tra gli elementi coinvolti. Non possiamo invece affermare che si tratti di un modello predittivo ma, d'altra parte, fare predizioni non rientra certamente tra gli obiettivi delle definizioni o dei modelli di definizioni, il cui ruolo principale è quello di consentire di distinguere e di spiegare, mirando a una migliore comprensione.
Nel corso della tesi abbiamo ripetutamente messo in evidenza la necessità di integrare tra loro il linguaggio matematico categoriale e il linguaggio discorsivo della didattica della matematica, sottolineando la delicatezza di questo aspetto che porta con sé ripercussioni importanti a livello epistemologico nella didattica della matematica.[276] Nel prossimo e ultimo paragrafo della tesi ci soffermiamo dunque più in dettaglio su questo aspetto.

## 14. 2. Riflessione critica sul ricorso agli strumenti matematici in didattica della matematica

Il ricorso agli strumenti matematici nel presente lavoro di tesi presenta a nostro avviso molti aspetti positivi, alcuni evidenziati già in precedenza e altri che possono essere ancora evidenziati, come per esempio la possibilità di un passaggio non solo intuitivo ma anche tecnico da un paradigma ontologico legato a oggetti statici e assoluti a uno legato a un'ontologia transitoria, indispensabile in didattica della matematica, dove gli oggetti di studio sono in realtà dei processi in costante evoluzione. Infatti, la tesi mostra che questo tipo di ontologia transitoria, legata a un approccio sintetico agli oggetti, cioè al loro uso in contesto, è altrettanto oggettivabile e assoggettabile ad analisi e definizione in termini generali, quanto lo è un'ontologia statica in senso classico, con l'aggiunta di una riduzione notevole

[275] Ringraziamo a tale proposito il Prof. Paolo Boero dell'Università di Genova per la messa in evidenza della necessità di una riflessione in tal senso durante una discussione informale sull'argomento.
[276] Ringraziamo a tale proposito il Prof. Mirko Maracci dell'Università di Pavia per la messa in evidenza della necessità di un'attenta riflessione in tal senso durante una discussione informale sull'argomento.

della complessità semantica. Inoltre, possiamo affermare che grazie al linguaggio e al contesto tecnico in cui è fornita, la definizione “si regge” da sola, cioè non necessita di giustificazioni della propria coerenza tramite argomentazioni esterne: la sua giustificazione è insita nella sua caratteristica di essere una definizione costruttiva.
Tuttavia, il ricorso a strumenti matematici che fungono da modello a un approccio teorico in didattica della matematica, anche se in modo non forzato, ma naturale, è per certi versi inusuale e richiede, come già sottolineato, una profonda riflessione sulle ripercussioni nell’ambito in cui esso si inserisce.
Riflettendo sul modello di definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica fornito nel capitolo 12, si potrebbe infatti obiettare che il ricorso a strumenti matematici così potenti, chiamati in causa “solo” per fornire un modello di definizione che, tutto sommato, potrebbe essere espresso anche a parole, possa sembrare sproporzionato.
Vogliamo dunque di seguito discutere brevemente alcuni punti relativi ai vantaggi e agli svantaggi dell’approccio da noi scelto.

1. All’interno del quadro teorico, la fondatezza di un approccio pragmatico al significato degli oggetti e la validità gnoseologica della conoscenza sintetica hanno ottenuto una conferma anche per via matematica. Si tratta di un risultato importante, dato che l’approccio pragmatico al significato è uno dei criteri trasversali alle varie teorie in didattica della matematica da noi individuati nella prima parte della tesi, ma anche perché la conoscenza in senso sintetico, cioè attraverso lo specifico contesto d’uso, è indispensabile per l’apprendimento. Il linguaggio matematico stesso ci ha quindi consentito di ottenere un risultato che non avrebbe potuto essere ottenuto in maniera altrettanto chiara e potente con strumenti puramente discorsivi, come attualmente avviene di solito in didattica della matematica.

2. Il diagramma che riporta il modello di definizione generale (Figura 57) mostra chiaramente che gli oggetti ***As*** (della matematica) e ***ADs*** (della didattica della matematica) sono diversi poiché essi si ottengono dall’immersione in contesti diversi: uno è quello della pratica della matematica, l’altro è quello della pratica della didattica della matematica. Si tratta di un aspetto che è potuto emergere solo grazie al ricorso al linguaggio diagrammatico categoriale che consente di cogliere le relazioni tra gli elementi e di pensare a possibili trasformazioni. Questo non è invece possibile in modo realmente efficace nel linguaggio discorsivo e nemmeno tramite l’uso di rappresentazioni schematiche che non incorporano le relazioni generali, come invece fanno i diagrammi matematici in un modo del tutto naturale.
Dal diagramma diventa anche evidente il fatto che la diversità dei due oggetti è dovuta al “prodotto” tra gli oggetti della categoria della pratica matematica e gli oggetti della categoria dei risultati in didattica della matematica: esso crea oggetti *nuovi*, cioè diversi da quelli matematici di partenza, oggetti che vengono

"conosciuti" sinteticamente tramite l'attività di ricerca nella pratica della didattica della matematica come disciplina.
D'altra parte, però, è possibile anche "scomporre" l'oggetto-prodotto ***ADs*** nelle sue componenti relative alla matematica e alla didattica della matematica, incrementando così la conoscenza di ***As***, cioè dell'oggetto matematico stesso. In questo modo si può cogliere un aspetto che non sarebbe stato altrettanto agevole cogliere senza la rappresentazione diagrammatica. Notiamo che questo consente anche di chiarire in che senso la didattica della matematica possa essere intesa come una matematica applicata (si veda per esempio D'Amore, 2016): essa produce, attraverso i propri oggetti, nuova conoscenza sugli oggetti matematici, ampliando il contesto nel quale questi possono essere studiati e conosciuti.

3. Crediamo che sia innegabile il vantaggio della chiarezza tipica del linguaggio matematico nell'esprimere i concetti e nel chiarire le relazioni, fatto che abbiamo già messo in evidenza nei punti precedenti. Vi è però un altro aspetto che riteniamo di dover sottolineare come vantaggio del ricorso agli strumenti matematici. In diversi casi i ricercatori in didattica della matematica si sono ispirati a concetti matematici nelle loro costruzioni teoriche. Nel corso della trattazione abbiamo esaminato per esempio un caso paradigmatico in cui si è creato un costrutto che si basa sull'idea di fascio, il cui obiettivo è quello di modellizzare l'evoluzione del processo semiotico multimodale durante l'apprendimento della matematica; si tratta del *semiotic bundle* (Arzarello, 2006). Dunque, l'ispirazione a strumenti matematici per la creazione di costrutti teorici non è in fondo una novità, anche se questi sono poi formulati esclusivamente nel linguaggio discorsivo consueto della didattica della matematica, senza l'evidenziazione del funzionamento dello strumento matematico sottostante. Questo modo di procedere ha indubbiamente il vantaggio di semplificare le cose, rendendo lo strumento o il costrutto così ottenuto facilmente utilizzabile anche da chi non possiede le conoscenze matematiche necessarie per comprendere il modello matematico o che ritiene che ciò non sia necessario per poter usare in maniera efficace lo strumento o il costrutto in questione. Si tratta indubbiamente di una modalità che potremmo definire molto "user friendly" di ricorso teorico agli strumenti matematici.
Tuttavia, noi riteniamo che mostrare il modello matematico che ha ispirato la costruzione concettuale di uno strumento possa offrire la possibilità di sfruttare tale modello per costruire altri strumenti generali e che, in ogni caso, non mostrarlo priva tali strumenti o costrutti di una fondatezza teorica che può essere trovata solo nelle relazioni astratte espresse nel linguaggio matematico. Questo vale a maggior ragione nel caso in cui invece di un singolo strumento (nel nostro caso la definizione di oggetto matematico specifico della didattica della matematica) viene costruito un "ambiente" teorico in cui esso può "vivere", ma che è potenzialmente in grado di essere esteso e reso funzionale a diversi obiettivi, sulla base delle interpretazioni che di esso si potranno dare.

Infatti, il nostro approccio non si ispira a un singolo concetto matematico per creare un singolo strumento in didattica della matematica, ma fornisce un modello matematico articolato e gnoseologicamente fondato che funge da supporto al quadro teorico discorsivo, formulato nel linguaggio della didattica della matematica e che può essere esteso sulla base delle necessità pratiche, come è usuale in un ambiente categoriale.
Anche se questo primo modello matematico potrà essere reso più fruibile in futuro anche da chi non possiede competenze matematiche avanzate, crediamo che conoscere non solo l'interpretazione ma anche la struttura matematica che in esso è implicita, possa consentire di individuare nel tempo altre interpretazioni di tale struttura, con notevoli vantaggi teorici legati alla coerenza insita nelle relazioni matematiche che l'hanno ispirata.
Con questo non intendiamo naturalmente affermare che la didattica della matematica debba *sempre* e necessariamente servirsi di strumenti matematici, ma che un loro uso come modelli da interpretare in vari contesti può fornire a un certo tipo di studiosi molti vantaggi e giovare all'organizzazione dei suoi risultati in un quadro più organico, senza perciò rinunciare alla ricchezza semantica della pluralità di approcci e teorie. Infatti, un approccio categoriale agli oggetti matematici della disciplina potrebbe essere visto come un primo passo verso un inquadramento topologico dell'epistemologia della disciplina, in cui il topos consente di individuare gli invarianti delle variazioni nel passaggio da un approccio teorico a un altro.
Per concludere, proponiamo un esempio che rappresenta, anche se solo in maniera metaforica, la nostra posizione riguardo all'uso e alla messa in evidenza degli strumenti matematici nella ricerca in didattica della matematica.
Chiediamo al lettore di osservare le seguenti due immagini (Figura 74).

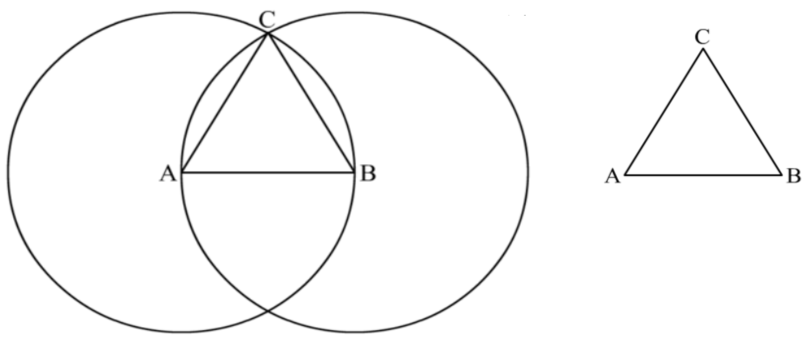



Figura 74. Quale delle due immagini è più "utile" dal punto di vista matematico?

Il triangolo rappresentato sulla destra (Figura 74) è ottenuto cancellando i tracciati ausiliari presenti nella costruzione che vediamo sulla sinistra.
Quante e quali informazioni in più fornisce la prima rappresentazione rispetto alla seconda? E soprattutto: chiunque è autorizzato di dubitare del fatto che quello nell'immagine a destra sia effettivamente un triangolo equilatero, mentre nessuno che abbia una formazione matematica anche solo elementare dubiterebbe che lo sia il triangolo sulla sinistra dell'immagine. E poi: quante altre costruzioni si potrebbero fare una volta compreso il ruolo degli artefatti (la riga e il compasso) che sono serviti per costruire il triangolo?
Concludiamo la presente tesi con la speranza che gli strumenti matematici introdotti in essa possano svolgere in futuro il ruolo di "riga e compasso" nell'evoluzione dell'approccio teorico qui delineato e nell'articolazione della definizione stessa.

## Ringraziamenti

Ringrazio tutte le persone che hanno contribuito alla realizzazione di questa tesi.
In particolare ringrazio la mia tutor Prof.ssa Cinzia Cerroni dell'Università di Palermo per la sua collaborazione, senza la quale il percorso che ha portato alla stesura della presente tesi non avrebbe potuto realizzarsi.
Rivolgo un ringraziamento particolare al Prof. Fernando Zalamea dell'Universidad Nacional della Colombia per la sua enorme generosità nel fornire suggerimenti tecnici nei momenti più delicati di questo percorso e per la sua squisita disponibilità umana nell'incoraggiare questo lavoro e nella lettura critica di alcune parti di esso.
Un grazie del tutto speciale va al mio tutor Prof. Bruno D'Amore dell'Universidad Distrital di Bogotà che mi ha prima indirizzata e poi guidata, supportata e incoraggiata con grande professionalità e infinita pazienza durante questo percorso lungo e tortuoso. Le intense ore di lavoro passate insieme sono state per me sempre occasione di grande arricchimento professionale, di cambi di prospettiva importanti, che hanno permesso l'emergenza di visioni d'insieme assolutamente necessarie per la composizione del puzzle di questo lavoro così complesso e articolato.
Sono molto grata a tutti gli altri numerosi studiosi italiani e stranieri che mi hanno dedicato il loro tempo e mi hanno dato suggerimenti preziosi, in particolare al Prof. Ferdinando Arzarello dell'Università di Torino.
Sono molto riconoscente ai referee della tesi, prof.ssa Cristina Sabena dell'Università di Torino e prof. Pier Luigi Ferrari dell'Università del Piemonte Orientale, per l'attenta lettura critica del testo, per l'apprezzamento espresso per il progetto di ricerca ivi esposto nonché per il caloroso incoraggiamento a proseguire nella direzione intrapresa.
Rivolgo un ringraziamento molto sentito anche ai membri della Commissione d'esame davanti alla quale è stata discussa la tesi, prof. Samuele Antonini dell'Università di Firenze, prof. Giorgio Bolondi dell'Università di Bolzano e prof. Pedro Garcia Sanchez dell'Università di Granada, per l'apprezzamento dei risultati raggiunti nella ricerca ivi esposta.

# Bibliografia

Akkerman, S. F., & Bakker, A. (2011). Boundary Crossing and Boundary Objects. *Review of Educational Research, 81*(2), 132–169.

Anthony, G. J., & Walshaw, M. A. (2004). Zero: A "none" number? *Teaching children mathematics, 11*(1), 38–43.

Antonini, S. (2019). Intuitive acceptance of proof by contradiction. *ZDM–Mathematics Education, 51*(3), 793–806.

Aristotele. (2017). *Metafisica*. Firenze: Bompiani.

Arrigo, G., D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2020). *L'infinito matematico: Storia, epistemologia e didattica di un tema affascinante*. Bologna: Pitagora.

Arrigoni, T. (2003). Istanze fondazionali e attenzione alla prassi nella filosofia della matematica contemporanea. *Rivista di Filosofia Neo-scolastica, 95*(2), 199–232.

Artigue, M. (1991). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques, 10*(2/3), 241–285.

Arzarello, F. (2006). Semiosi as a multimodal process. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), Semiotics, Culture and Mathematical Thinking [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(1), 267–299.

Arzarello, F., & Robutti, O. (2009). Embodiment e multimodalità dell'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 32*(3A/B), 243–268.

Arzarello, F., Paola, D. Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 97–109.

Arzarello, F., & Soldano, C. (2019). Approaching Proof in the Classroom Through the Logic of Inquiry. In G. Kaiser & N. Presmeg (Eds.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education*. ICME-13 Monographs (pp. 221–243). Springer, Cham. doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_10

Asenova, M. (2019). Epistemological obstacles in the evolution of the concept of proof in the path of ancient Greek tradition. In U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME11, February 6 – 10, 2019* (pp. 120–127). Utrecht: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME. Disponibile da https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02398011/document.

Asenova, M. (2020). La filosofia della matematica elimini tutti i dogmi. Intervista a Fernando Zalamea. *Prisma, 22*(9), 62–65.

Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Santi, G. (2020a). La teoria dell'oggettivazione e la teoria delle situazioni didattiche: Un esempio di confronto tra teorie in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica, 28*(1), 7–61.

Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Santi, G. (2020b). Análisis de algunos aspectos de la teoría de la objetivación. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa, 5*(2), 33–50.

Assude, T., Boero, P., Herbst, P., Lerman, S., & Radford, L. (2008). The notions and roles of theory in mathematics education research. In M. Santos & Y. Shimizu (Eds.), *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education* (pp. 6–13). Monterrey: ICMI.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Vrin.

Bagni, G. T. (2009). *Interpretazione e didattica della matematica. Una prospettiva ermeneutica*. Bologna: Pitagora.

Bagni, G. T., & D'Amore, B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica, 19*(1), 73–89.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147–176.

Balacheff, N. (1988). A study of students' proving processes at the junior high school level. In I. Wirszup & R. Streit (Eds.), *Proceedings of the Second UCSMP International Conference on Mathematics Education* (pp. 284–297). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Balacheff, N. (1991). Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 89–110). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Balacheff, N. (1995). Conception, connaissance et concept. *Séminaire de l'équipe DidaTech* (pp. 219–244). Grenoble: IMAG.

Balacheff, N. (1999). Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate. International *Newsletter on the Teaching and Learning on proof*. Disponibile da
http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeU.

Balacheff, N. (2010). Bridging knowing and proving in mathematics: A didactical perspective. In G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics* (pp. 115–135). New York: Springer.

Balacheff, N. (2017). cK¢, a model to understand learners' understanding – Discussing the case of functions. *El calculo y su ensenanza, IX*(Jul-Dic), 1–23.

Balacheff, N., & Gaudin, N. (2009). Modeling students' conceptions: The case of function. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 16, 207–234. Disponibile da: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01557264/document (Il numero di pagina nelle citazioni si riferisce alla versione on line disponibile negli archivi pluridisciplinari *Hal*).

Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). Ck¢ modèle de connaissances pour le calcul des situations didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75–106). Grenoble: La pensée sauvage.

Barbero, M., Gómez-Chacón, I. M., & Arzarello, F. (2020). Backward Reasoning and Epistemic Actions in Discovering Processes of Strategic Games Problems. *Mathematics 8*(6), 989.

Barrier, T. (2011). Les pratiques langagières de validation des étudiants en analyse réelle. *Recherches en didactique de mathematiques, 31*(3), 259–290.

Barrier, Th., Mathé, A. C., & Durand-Guerrier, V. (2009). Argumentation and Proof: A Discussion about Toulmin's and Duval's Models. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello, *Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009, Lyon France* (pp. 191–200). Lyon: ENS. Èdition.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp.750–787). Mahwah, NJ: LEA.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, *32*(3A/B), 269–294.

Bartolini Bussi, M. G., Sun, X., & Ramploud, A. (2013). A dialogue between cultures about task design for primary school. In C. Margolinas (Ed.), Task Design in Mathematics Education. *Proceedings of ICMI Study 22* (pp. 549–557). Oxford: ICMI.

Bennett, M. & Hacker, P. (2008). *History of Cognitive Neuroscience*. Oxford: Wiley-Blackwell.

Bicudo, M., A. V., & Miarka, R. (2016). The Philosophy of Mathematics Education in Brazil. In G. Kaiser (Ed.), *ICME-13 Topical Survays* (pp. 18–21). Hamburg, Germany: Faculty of Education, University of Hamburg.

Bishop, A. J. (1991). *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bloor, D. (1983). *Wittgenstein: A social theory of knowledge*. London, UK: The Macmillan Press.

Blossier, T., Barrier, T., & Durand-Guerrier, V. (2009). Proof and quantification. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers, (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 83–88). Taipei: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Boero, P. (2017). Cognitive unity of theorems, theories and related rationalities. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, *CERME 10, February 1–5, 2017*, (pp. 99–106). Dublin: DCU Institute of Education and ERME.

Boero, P., Dapueto, C., Ferrari, P., Ferrero, E., Garuti, R., Lemut, E., Parenti, L. & Scali, E. (1995). *Aspects of the mathematics–culture relationship in mathematics teaching–learning in compulsory school*. Proceedings of PME-XIX (Vol. 1, pp. 151–166). Recife: PME.

Boero, P., Douek, N., & Ferrari, P. L. (2008). Developing mastery of natural language: Approaches to some theoretical aspects of mathematics. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (II ed., pp. 262–297). New York, NY: Routledge.

Boero, P., Garuti, R., & Mariotti, M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education PME-XX* (Vol. 2, pp. 121–128). Valencia: PME.

Bricker, P. (2016). Ontological Commitment. In E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Disponibile da: <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/ontological-commitment/>.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 4*(2) 164–198. (Lavoro originale pubblicato nel 1976).

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33–115.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. In N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield (Eds.). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brouwer, L. E. J. (2013). Intuitionism and Fomalism. *Bulletin of the American Mathematical Society* (Trad. A. Dresden), 20, 81–96. (Lavoro originale pubblicato nel 1913).

Bruner, J. S. (1966). *Towards a theory of instruction*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Büttgen, P., Crépon, M., & Laugier, S. (2014). Begriff. In B. Cassin (Ed.), *Dictionary of Untranslatables: A Philosophical Lexicon* (pp. 90–93). Princeton: Princeton University Press.

Caicedo, X. (1995). Logica de los haces de estructuras. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 19*(74), 569–586.

Carter, J. (2019). Philosophy of Mathematical Practice: Motivations, Themes and Prospects, *Philosophia Mathematica, 27*(1),1–32.

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. Grenoble: LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique de la Mathématique, 12*(1), 73–112.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de los didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221–266.
Cobb, P. (2007). Putting philosophy to work. Coping with multiple theoretical perspectives, In F. K. Lester (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 3–38). Charlotte, NC: Information Age.
Cobb, P., Yackel, E. & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(1), 2–33.
Cockburn, A. D., & Littler, G. (Eds). (2008) *Mathematical misconceptions: A guide for primary teachers*. Los Angeles, CA: Sage Publications Ltd.
Confrey, J. (1981). Concepts, Processes and Mathematics Instruction. *For the Learning of Mathematics, 2*(1), 8–12.
Confrey, J. (1986). *"Misconceptions" accross subject matters: charting the course from a constructivist perspective*. Comunicazione orale in occasione del Convegno annuale dell'American Educational Research Association, San Francisco, CA.
Confrey, J. (1990). A review of the research on students' conceptions in mathematics, science, and programming. In C. Courtney (Ed.), *Review of research in education. American Educational Research Association, 16*, 3–56.
Corfield, D. (2003). *Towards a Philosophy of Real Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.
Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a co-ordinated process schema. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167–192.
Crespo, S., & Nicol, C. (2006). Challenging preservice teachers' mathematical understanding: The case of division by zero. *School science and mathematics, 106*(2), 84–97.
D'Ambrosio, U. (1985). *Socio-Cultural Bases For Mathematics Education*. Campinas: Unicamp.
D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatematica*. Bologna: Pitagora.
D'Ambrosio, U. (2003) The role of mathematics in building a democratic society. In B. L. Madison & L. A. Steen (Eds.), *Quantitative Literacy: Why Numeracy Matters for Schools and Colleges* (pp. 235–238). Princeton, NJ: National Council on Education and the Disciplines.
D'Amore, B. (1974a). *Elementi di logica matematica: Corso di Epistemologia e Metodologia*. Bologna: Pitagora.
D'Amore, B. (1974b). Su un possibile concetto di analogia. La categoria analogica. *Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Università di Modena*, XXIII, 231–232.
D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2000). "Concetti" e "oggetti" in Matematica. *Rivista di Matematica dell'Università di Parma, 6*(3), 143–151.

D'Amore, B. (2001a). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica, 15*(1), 4–30.

D'Amore, B. (2001b). Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 38*(1), 17–46.

D'Amore, B. (2005a). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica, 19*(3), 325–336.

D'Amore, B. (2005b). Noetica e semiotica nell'apprendimento della matematica. In R. L. Ancona, E. Faggiano, A. Montone, & R. Pupillo (Eds.), *Insegnare la matematica nella scuola di tutti e di ciascuno*. Atti del convegno omonimo, Università di Bari, 16–18 febbraio 2004 (pp. 29–34). Milano: Ghisetti & Corvi.

D'Amore, B. (2005c). Secondary school students' mathematical argumentation and Indian logic (nyaya). *For the Learning of Mathematics, 25*(2), 26–32.

D'Amore, B. (2006). Oggetti matematici e senso: Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica, 20*(4), 557–583.

D'Amore, B. (2007). Lo zero, da ostacolo epistemologico a ostacolo didattico. *La matematica e la sua didattica, 21*(4), 425–454.

D'Amore, B. (2011). Alcune riflessioni su didattica, concetto, competenza, schema, situazione. *Bollettino dei docenti di matematica*, 63, 19–26.

D'Amore, B. (2015a). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: Una contribución a la teoría de la objetivación. In L. Branchetti (Ed.), Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education [Numero speciale] (pp. 151–171). Isonomia-Epistemologica: Online philosophical journal of the University of Urbino "Carlo Bo". Disponibile da http://isonomia.uniurb.it/epistemologica. [Versione in italiano: D'Amore, B. (2017). Sapere, conoscere, lavoro in didattica della matematica: Un contributo alla teoria dell'oggettivazione. *Didattica della matematica: Dalla ricerca alle pratiche d'aula, 1*(1), 4–20. Disponibile da www.rivistaddm.ch].

D'Amore, B. (2015b). Comentarios a los artículos de Raymond Duval. In R. Duval & A. Saenz Ludlow (Eds.), *Selected Works* (pp. 237–253). Bogotà: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

D'Amore, B., Asenova, M., Del Zozzo, A., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., Nicosia, G. G., & Santi, G. (2021). *I numeri: Matematica, storia, giochi e curiosità, per una didattica corretta ed efficace*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B., & Fandiño Pinilla M. I. (2013). Il passo più lungo. Sulla necessità di non buttare a mare (in nome di un vacuo modernismo) teorie di didattica della matematica che spiegano, in maniera perfetta, situazioni d'aula reali. *Bollettino dei docenti di matematica*, 66, 43–52.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2019). *Zero: Storia, epistemologia e didattica di un numero magico*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2020). Sugli scivolamenti metadidattici. Alcuni esempi. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 43*(A2), 108–136.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "Paradoja cognitiva de Duval". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18*(2), 177–212.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M.I., Marzzani, I., Santi, G., & Sbaragli, S. (2009). Il ruolo dell'epistemololgia dell'insegnante nelle pratiche d'insegnamento. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 32*(B2), 171–192.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Sbaragli, S. (2017). Sulla natura degli oggetti matematici, in relazione con la didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica, 25*(2), 119–162.

D'Amore, B., & Godino, D. J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica, 20*(1), 9–38.

D'Amore, B., & Maier, H. (1999). Investigating teachers'work with pupils' textual eingenproductions. I. Schwank (Ed.), *European research in mathematics education* (Vol. 1-2, pp. 261–278). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

D'Amore, B., & Maier, H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. *La matematica e la sua didattica, 16*(2), 144–189.

D'Amore, B. & Radford, L. (Eds.) (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Disponibile da http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/ense nan za_y_aprendizaje_de_las_matematicas_problemas_semioticos_epistemologic os

D'Amore, B. & Santi, G. (2018). Natural language and "mathematics languages": Intuitive models and stereotypes in the mathematics classroom. *La matematica e la sua didattica, 26*(1), 57–82.

D'Amore, B., & Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica, 19*(2), 139–163.

D'Amore, B. & Sbaragli, S. (2020). *La matematica e la sua storia. Dal XVIII al XXI secolo* (Vol. 4). Bari: Dedalo.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. Boston: Birkhauser.

Davydov, V. V. (1972/1990). Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of school curricula. *Soviet studies in mathematics education* (Trad. J. Teller) (Vol. 2). Reston, VA: NCTM.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2011). *The SAGE Handbook of Qualitative Research*. Thousand Oaks: Sage.

Descartes, R. (1998). *Discorso sul metodo*. (Trad. M. Garin, testo francese a fronte). Milano: Laterza. (Lavoro originale pubblicato nel 1637).

Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. *ZDM–Mathematics Education*, 43, 471–482. doi:10.1007/s11858-011-0309-6

Diels, H. (1906). *Die Fragmente der Vorsokratiker: Griechisch und Deutsch* (II ed., Vol. 1). Berlin: Weidmannsche Buchhandlung. (Lavoro originale pubblicato nel 1903).

Dilthey, W. (1986). Le origini dell'ermeneutica. In M. Ravera (Ed.), *Il Pensiero ermeneutico* (pp. 175–198). Genova: Marietti.

Dörfler, W. (2005). Diagrammatic thinking: Affordances and constraints. In M. Hoffmann, J. Lenhard, & F. Seeger (Eds.), *Activity and sign* (pp. 57–66). New York: Springer.

Dörfler, W. (2016). Signs and their use: Peirce and Wittgenstein. In A. Bikner Ahsbahs, A. Vohns, R. Bruder, O. Schmitt, & W. Dörfler (Eds.), *Theories in and of Mathematics Education*. ICME-13 Topical Surveys. Cham: Springer. doi:10.1007/978-3-319-42589-4_4

Downton, A. (2008). Links Between Children's Understanding of Multiplication and Solution Strategies for Division. In M. Goos, R. Brown, & K. Makar (Eds.), Navigating current and charting directions. *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 171–178). Brisbane: MERGA.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–123). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E., & McDonald, M. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education research. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 273–280). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E., Vidakovic, D., & Weller, K. (2018). APOS Theory: Use of computer programs to foster mental constructions and student's creativity. In V. Freeman & J. L. Tassell (Eds.), *Creativity and Technology in Mathematics Education* (pp. 441–477). New York: Springer.

Dummett, M. (1993). *Seas of Language*. Oxford: Oxford University Press.

Durand-Guerrier, V. (2005). Natural deduction in Predicate Calculus. A tool for analysing proof in a didactic perspective. In M. Bosch (Ed.), *European Research in Mathematics Education IV: Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, February 17*

*- 21, 2005* (pp. 402–409). Sant Feliu de Guíxols: UNDEMI IQS – Universitat Ramon Llull ed ERME.

Durand-Guerrier, V. (2014). Logic in Mathematics Education. In S. Lerman (Eds.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 361–364). Dordrecht: Springer. doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_92

Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leur modélisations logiques. Spécificité de l'Analyse. Quelles implications didactiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques 23*(3), 295–342.

Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2005). An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule. *Educational Studies in Mathematics, 60*(2), 149–172.

Durrand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., & Tanguay, D. (2012a). Argumentation and Proof in the Mathematics Classroom. In G. Hanna & M. de Villers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education*, The 19th ICMI Study (pp. 349–368). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Durrand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., & Tanguay, D. (2012b). Examining the Role of Logic in Teaching Proof. In G. Hanna & M. de Villers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education*, The 19th ICMI Study (pp. 369–390). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Duval, R., & Egret, M. A. (1993). Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Repères*, 12, 114–140.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. *Educational Studies in Mathematics, 22*(3), 233–262.

Duval, R. (1992). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x*, 31, 37–61. [Versione in italiano: Duval, R. (1996). Argomentare, dimsotrare, spiegare: continuità o rottura cognitiva? *La matematica e la sua didattica, 10*(2), 130–152].

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*(1), 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1996). Quel cognitive retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques, 16*(3), 349–382. [Versione italiana: Duval, R. (1996). Quale cognitivo per la didattica della matematica? *La matematica e la sua didattica, 3*(10), 250–269].

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1/2), 103–131.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of the mathematical process of proof. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school* (pp. 137–161). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Duval, R. (2007). La conversion des représentations: un des deux processus fondamentaux de la pensée. In J. Baillé (Ed.) *Du mot au concept: Conversion* (pp. 9–45). Grenoble: Presses Universitaires de Grenoble.
Duval, R. (2009). «Objet»: Un mot pour quatre ordres de réalité irréductibles? In J. Baillé (Ed.), *Du mot au concept: Objet* (pp. 79–108). Grenoble: PUG.
Duval, R. (2017). Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations. Prefazione di Bruno D'Amore. Cham: Springer International Publishing AG. (Lavoro originale pubblicato in portoghese da Proem Editora, São Paulo, 2011). doi:10.1007/978-3-319-56910-9
Eco, U. (1979). *Trattato di semiotica generale*. Milano: Bompiani.
Ernest, P. (1994). Social Constructivism and the Psychology of Mathematics Education. In: P. Ernest (Ed.), *Constructing mathematical knowledge: epistemology and mathematics education* (pp. 68–77). London: Falmer Press.
Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of mathematics*. New York, NY: SUNY.
Ernest, P. (2004). *The Philosophy of Mathematics Education.* London: Routledge Falmer Taylor & Francis Group. (Lavoro originale pubblicato nel 1991).
Ernest, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity: the case of number. *Educational studies in mathematics, 61*(1/2) 67–101.
Ernest, P. (2012). What is our first philosophy in mathematics education*? For the Learning of Mathematics, 32*(3), 8–14.
Ernest, P. (2015). Mathematics and Beauty. *Mathematics Teaching*, 248, 23–27.
Ernest, P. (2016). An Overview of the Philosophy of Mathematics Education. The Philosophy of Mathematics Education. In G. Kaiser (Ed.), *ICME-13 Topical Survays* (pp. 3–8). Hamburg: Faculty of Education, University of Hamburg.
Ernest, P. (2018a). The Ethics of Mathematics: Is Mathematics Harmful? In P. Ernest, *The Philosophy of Mathematics Education Today* (ICME-13 Monography) (pp. 187–216). Cham: Springer International Publishing AG.
Ernest, P. (2018b). The Philosophy of Mathematics Education: An Overview. In P. Ernest (Ed.), *The Philosophy of Mathematics Education Today* (pp. 13–37). Cham: Springer. Disponibile da https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-77760-3.
Ernest, P. (2020). Una auditoria ética de las matemáticas en la educación y en la sociedad. In L. Radford & M. Silva Acuña (Eds.), *Etica entre Educación y filosofia* (pp. 73–106). Prefazione di Bruno D'Amore. Bogotà: Universidad de los Andes.
Ferrari, P. L. (2004a). Mathematical language and advanced Mathematics Learning. In M. Høines & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 383–390). Bergen, Norway: Bergen University College.
Ferrari, P. L. (2004b). Matematica e linguaggio. *Quadro teorico e idee per la didattica*. Bologna: Pitagora.

Ferrari, P. L. (2010). La dimostrazione in matematica: che cosa è rilevante per l'educazione? In G. Gerla (Ed.), *Logica Matematica e Processi Cognitivi. Rielaborazione di alcuni interventi al convegno "Logica matematica, costruzione dei concetti e processi socio-cognitivi"* (pp. 67–74). Salerno: Rubbettino Editore.

Ferrari, P. L. (2018). L'argomentazione fra matematica e lingua. In B. D'Amore & S. Sbaragli (Eds.), *La didattica della matematica, strumento concreto in aula. Atti del Convegno Nazionale Incontri con la matematica Nr. 32, 16-18 novembre 2018, Castel San Pietro Terme (BO)* (pp. 15–18). Bologna: Pitagora.

Fischbein, E. (1990). The Autonomy of Mental Models. *For the learning of mathematics, 10*(1), 23–30.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139–162.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 3–17.

Fodor, J. (1975). *The Language of Thought*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics, 27*(2), 2–14.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). *The emergence of objects from mathematical practices. Educational Studies in Mathematics, 82*(1), 97–124.

Frege, G. (1879). *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Halle: Louis Nebert Verlag.

Frege, G. (1891). *Function und Begriff. Vortrag gehalten in der Sitzung vom 9. Januar 1891 der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft von Dr. G. Frege*. Jena: Hermann Pohle.

Frege, G. (1892a). Ueber Begriff und Gegenstand. In R. Avenarius, *Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie* (pp. 192–205). Leipzig: O. R. Reiseland-Verlag.

Frege, G. (1892b). Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, 100*(1), 25–50.

Frege, G. (1988). *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Hamburg: Felix Meiner Verlag. (Lavoro originale pubblicato nel 1884).

Fusaroli, R., & Paolucci, C. (2011). The External Mind: a semiotic model of cognitive integration. *Versus. Quaderni di studi semiotici*, (12-13), 3–30.

Gadamer, H. G. (2019). *Verità e Metodo*. G. Vattimo (a cura di) (Trad. Di G. Vattimo; testo tedesco a fronte). Introduzione di G. Reale. Firenze/Milano: Giunti/Bompiani. (Lavoro originale pubblicato nel 1960).

García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higueras, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. ZDM - *Zentralblatt für Mathematikdidaktik, 38*(3), 226–246.

Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive Unity of Theorems and Difficulty of Proof. *Proceedings of the international group for the psychology of mathematics education PME-XXII, Stellenbosch, South Africa* (Vol. 2, pp. 345–352). Stellenbosch: Stellenbosch University.

Garuti, R., Boero, P., Lemut, E., & Mariotti, M. A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems. *Proceedings of the international group for the psychology of mathematics education PME-XX* (Vol. 2, pp. 113–120). Valencia.

Gattico, E. (2001). *Jean Piaget*. Milano: Mondadori.

Gaudin, N. (2005). *Place de la validation dans la conceptualisation, le cas du concept de function*. Tesi di Dottorato, Université Joseph Fourier di Grenoble. Disponibile da https://tel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/113100/filename/docprincipal.pdf.

Giannantoni, G. (1993). Socrate nella "Metafisica" di Aristotele. *Rivista Di Filosofia Neo-Scolastica, 85*(2/4), 566–584. Disponibile da http://www.jstor.org/stable/43062996.

Giannantoni, G. (2005). *Dialogo socratico e nascita della dialettica nella filosofia di Platone*. Napoli: Bibliopolis.

Giardino, V. (2017). The Practical Turn in Philosophy of Mathematics: A Portrait of a Young Discipline. *Phenomenology and Mind*, 12, 18–28.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22*(2/3), 237–284.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 15*(3), 325–355.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998a). The dialectic relationships among theory, development and practice in Mathematics Education: a metaanalysis of three investigations. In N. A. Malara (Ed.), *An international view on didactics of mathematics as a scientific discipline*. *Proceedings of WG 25 ICME 8, Sevilla July 1996* (pp. 13–22). Modena: CNR-MURST University of Modena.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998b). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177–195). Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM–Mathematics Education, 39*(1/2), 127–135.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática, 12*(2), 3–15.

Grabiner, J. V. (2012). Why proof? A historian's perspective. In G. Hanna, & M. de Villers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education, The 19th ICMI Study* (pp. 147–168). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 115–141.

Grize, J. B. (1983). Opérations et logique naturelle. In M. J. Borel & J. B. Miéville (Eds.), *Essais de logique naturelle*. Bern: Peter Lang.

Grothendieck, A. (1983-1986). *Récoltes et semailles*. Manoscritto inedito. Disponibile da https://jmrlivres.files.wordpress.com/2009/11/recoltes-et-semailles.pdf.

Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1994). Competing paradigms in qualitative research. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 105–117). Thousand Oaks, CA: Sage.

Habermas, J. (1998). Some further Clarifications of the Concept of Communicative Rationality. In M. Cooke (Ed.), *On the Pragmatics of Communication* (pp. 307–342). Cambridge, Massachusetts: MIT Press. (Lavoro originale pubblicato nel 1996).

Hadamard, J. S. (1949). *The Psychology of Invention in the Mathematics Field*. Princeton: University Press.

Halliday, M. A. K. (2004). *An introduction to Functional Grammer* (3ª ed., rivista da C. Matthiessen). London: Arnold.

Hamami, Y., & Morris, R. L. (2020). Philosophy of mathematical practice: a primer for mathematics educators. *ZDM–Mathematics Education, 52*(6), 1113–1126. doi.org/10.1007/s11858-020-01159-5

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. *Proceedings of PME 20* (Vol. 1, pp. 21-34). Valencia: PME.

Hanna, G., & de Villers, M. (2012) (Eds.). *Proof and Proving in Mathematics Education, The 19th ICMI Study*. Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Hanna, G., & Larvor, B. (2020). As Thurston says? On using quotations from famous mathematicians to make points about philosophy and education. *ZDM–Mathematics Education, 52*(6), 1137–1147. doi.org/10.1007/s11858-020-01154-w

Hauser, K. (2001). Objectivity over Objects: A Case Study in Theory Formation. *Synthese, 128*(3), 245–285.

Hegel, G. (1977). *Hegel's Phenomenology of Spirit* (Trad. A. V. Miller). Oxford, New York: Oxford University Press.

Hegel, G., W., F. (1830). *Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften 1*. Die Wissenschaft der Logik, §163, Add. 2. Disponibile da http://texte.phil-splitter.com/html/der_begriff_als_solcher.html.

Heidegger, M. (2017). *Essere e tempo* (Trad. A. Marini). Milano: Mondadori. (Lavoro originale pubblicato nel 1927).

Hersh, R. (2001). *Cos'è davvero la matematica?* Milano: Baldini e Castoldi.

Heyting, A., A. (1978). Intuizionismo. *Treccani: Enciclopedia del Novecento*. Disponibile da http://www.treccani.it/enciclopedia/intuizionismo_%28Enciclopedia-del-Novecento%29/.(Consultato il 14.03.20).

Hilbert, D. (1903). *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig: Teubner. (Lavoro originale pubblicato nel 1899). Disponibile da https://archive.org/details/grunddergeovon00hilbrich/page/n15/mode/2up

Hilbert, D. (1926). Über das Unendliche. *Mathematische Annalen, 95*(1),161–190. Disponibile da https://www.digizeitschriften.de/dms/toc/?PPN=PPN235181684_0095.

Hintikka, J., & Sandu, G. (1997). Game-theoretical semantics. In J. V. Benthem & A. T. Meulen (Eds.), *Handbook of logic and language* (pp. 361–410). Amsterdam: Elsevier.

Hjelmslev, L. (1961). *Prolegomena to a theory of language*. Madison, WI: University of Winconsin. (Lavoro originale pubblicato nel 1943).

Holopainen, T., J. (2014). Concepts and Concept Formation in Medieval Philosophy. In S. Knuuttila & J. Sihvola (Eds.), *Sourcebook for the History of the Philosophy of Mind: Philosophical Psychology from Plato to Kant* (pp. 263–279). Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer.

Hume, D. (1978). *A Treatise of Human Nature*. Oxford: Oxford University Press. (Lavoro originale pubblicato nel 1739).

Husserl, E. (1962). *Recherches logiques* (Trad. H. Elie, L. Kelkel, & R. Schérer) (Vol. 2). Parigi: Presses Universitaires de France.

Husserl, E. (2020). *La fenomenologia trascendentale*. In A. Marini (Ed.). Milano: Memesis.

Ilyenkov, E. V. (1982). *The dialectics of the abstract and the concrete in Marx's Capital*. Mosca: Progress.

Iori, M. (2015). *La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica*. Tesi di Dottorato, Università degli Studi di Palermo. Disponibile da http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/Phd/Iori/Iori.htm.

Israel, G. (2009). Nulla e zero tra matematica, filosofia e teologia. In B. D'Amore, *Matematica, stupore e poesia* (pp. 170–177). Firenze: Giunti.

Jahnke, H. N., Arcavi, A., Furinghetti, F. & El idrissi, A. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel & J. v. Maanen (Eds.) *History in Mathematics Education* (pp. 291–321). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kant, I. (1998). Kritik der reinen Vernunft. In J. Timmermann (Ed.), Philosophische Bibliothek (Vol. 505). Hamburg: Felix Meiner Verlag. (Lavoro originale pubblicato nel 1781).

Kenny, A. (2010). Concepts, Brains, and Behaviour. *Grazer Philosophische Studien, 81*(1), 105–113.

Kilpatrik, J. (1987). George Pólya's Influence on Mathematics Education. *Mathematics Magazine, 60*(5), 299–300.

Klein, F. (1908*). Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus: Geometrie*. In E. Helliger (Ed.) (Vol. 1). Leipzig: G. B. Teubner.

Klein, F. (1909*). Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus: Arithmetik, Algebra, Analysis*. In E. Helliger (Ed.) (Vol. 2). Leipzig: G. B. Teubner.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

Kutschera, F. von (1979). *Filosofia del lenguaje*. Madrid: Gredos.

Lakatos, I. (1978). Mathematics, Science and Epistemology. In J. Worrall & G. Currie, *Philosphical Papers* (Vol. 2). Cambridge: Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1979). *Dimostrazioni e confutazioni* (Trad. D. Benelli) Milano: Feltrinelli. (Lavoro originale pubblicato nel 1976).

Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Da dove viene la matematica*. Torino: Bollati Boringhieri.

Lautman, A. (2011). *Ansayos sobre la dialéctica, éstructura y unidad de las matemáticas modernas* (Trad. F. Zalamea). In F. Zalamea (Ed.). Bogotà: Biblioteca francesa de filosofía. (Lavori originali pubblicati nel periodo 1908-1944).

Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: from ritual to exploration. *Educational Studies of Mathematica, 101*(2), 153–176.

Lawvere, F. W., & Schanuel, S. H. (1994). *Teoria delle categorie: Un'introduzione alla matematica*. (Trad. M. Mondolfo). Padova: Franco Muzio & C.

Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, Consciousness, and Personality*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), *International perspectives on mathematics education* (pp. 19–44). Westport: Ablex.

Lesser, L. M. (2001). What "Is" Mathematics? In Memoriam of Gian Carlo Rota. *Humanistic Mathematics Network Journal, 24*(3), 1–6.

Leung, A., & Lopez-Real, F. (2002). Theorem Justification and Acquisition in Dynamic Geometry: A Case of Proof by Contradiction. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 145–165. doi.org/10.1023/A:1021195015288

Levinas, E. (1987). *Collected Philosophical Papers* (Trad. A. Lingis). Dordrecht: Martinus Nijhoff.

Levinson, S. (1983). *Pragmatics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lima, S., McClain, K., Castillo-Garsow, C., & Thompson, P. (2009). The Design of Didactic Objects for use in Mathematics Teachers' Professional

Development. In S. L. Swars, D. W. Stinson, & S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 974–982). Atlanta, GA: Georgia State University.

Locke, J. (1975). *An Essay Concerning Human Understanding*. New York: Oxford University Press. (Lavoro originale pubblicato nel 1690).

Lohmar, D. (2010). Intuition in Mathematics: on the Function of eidetic Variation in Mathematical Proofs. In M. Hartimo (Ed.), *Phenomenology and Mathematics* (pp. 72–90). Dordrecht-Heidelberg-London-New York: Springer.

Lolli, G. (1985). *Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche.* Bologna: il Mulino.

Lolli, G. (1987). *La macchina e le dimostrazioni: matematica, logica e informatica*. Bologna: il Mulino.

Lolli, G. (1988). *Capire una dimostrazione*. Bologna: il Mulino.

Lolli, G. (1996). *Capire la matematica*. Bologna: il Mulino.

Lolli, G. (2001). La questione dei fondamenti tra matematica e filosofia: Panorama introduttivo. In S. Albeverio e F. Minazzi (Eds.), *PRISTEM/Storia Note di Matematica, Storia e Cultura* (pp. 17–36). Mendrisio: Università della Svizzera Italiana.

Lolli, G. (2002a). *Filososfia della matematica*: *L'eredità del Novecento*. Bologna: il Mulino.

Lolli, G. (2002b). La metafora in matematica. in G. L. Beccaria & C. Marello (Eds.), *La parola al testo: Scritti per Bice Mortara Garavelli* (pp. 221–232). Alessandria: dell'Orso.

Lolli, G. (2004). *Da Euclide a Gödel*. Bologna: il Mulino.

Lolli, G. (2005). *QED: Fenomenologia della dimostrazione*. Torino: Bollati Boringhieri.

Lolli, G. (2013). Matematica intuizionistica. Disponibile da http://homepage.sns.it/lolli/dispense13.htm. (Consultato il 14.03.2020).

Lolli, G. (2015). *Le parole nella matematica*. SUPSI. La didattica dell'Italiano: Problemi e prospettive. Disponibile da http://didattica-italiano.www2.dfa.supsi.ch/iii-lapporto-delle-altre-discipline-scolastiche/.

Lolli, G. (2018). *La matematica come narrazione*. Bologna: il Mulino.

Lolli, G. (2019). *I teoremi di incompletezza*. Bologna: il Mulino.

Longo, G. (2008). Fondamenti cognitivi della matematica e analisi matematiche del vivente. *Estetica*, 37, 113–124.

Longo, G. (2015). Synthetic Philosophy of Mathematics and Natural Sciences Conceptual analyses from a Grothendieckian Perspective: Reflections on "Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics" by Fernando Zalamea. *Speculations: Journal of Speculative Realism*. Disponibile da https://core.ac.uk/display/47330751.

Losacco, M. (1922). *Storia della dialettica* (Vol. 1). Firenze: Olschki.

Ma, L. & Kessel, C. (2018). The Theory of School Arithmetic: Whole Numbers. In M. G. Bartolini Bussi & X. H. Sun (Eds.), *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades, The 23rd ICMI Study* (pp. 439–463). Cham: Springer.

Mac Lane, S. (1998). *Categories for the working Mathematician*. New York: Springer. (Lavoro originale pubblicato nel 1971).

Maddy, P. (2000). *Naturalism in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press. (Lavoro originale pubblicato nel 1992).

Margolis, E., & Laurence, S. (2019). Concepts. In N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* [Edizione Estate 2019]. Disponibile da: https://plato.stanford.edu/archives/sum2019/entries/concepts/.

Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34*(3), 219–248.

Markku, S., Hannula, M. P., & Di Martino, P. (2018). Affect and mathematical thinking: Exploring developments, trends, and future directions. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, & K. Ruthven (Eds.), *Developing Research in Mathematics Education Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe* (pp. 128–141). London: Routledge.

Mason, J. (2008). Being mathematical with & in front of learners: Attention, awareness, and attitude as sources of differences between teacher educators, teachers & learners. In T. Wood & B. Jaworski (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional* (Vol. 4, pp. 31–56). Rotterdam: Sense Publishers.

Mason, J., & Waywood, A. (1996). The Role of Theory in Mathematics Education and Research. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer International Handbooks of Education (Vol. 4, pp. 1055–1089). Dordrecht: Springer.

Maturana, H., & Varela, F. (2003). *El árbol del conoscimiento: las bases biológicas del entedimiento humano*. Buenos Aires: Lumen & Editorial Universitaria. (Lavoro originale pubblicato nel 1984).

MIUR (Ministero dell'Università e della Ricerca) (2012). Indicazioni per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo d'istruzione. Roma. Disponibile da: http://hubmiur.pubblica.istruzione.it//web/istruzione/prot7734_12.

Moran, D., & Cohen, J. (2012). *The Husserl Dictionary*. London, New York: Continuum International Publishing Group.

Morris, C. W. (1948). *The open self*. London: Forgotten Books.

Morris, C. W. (1977). *Segni, linguaggio e comportamento*. Milano: Longanesi.

Niss, M. (2007). The concepts and role of theory in mathematics education. In C. Bergsten, B. Grevholm, M. Skrømskag, H. Måsøval, & F. Rønning (Eds.) *Relating Practice and Research in Mathematics Education*, *Proceedings of*

*Norma 05, Fourth Nordic Conference on Mathematics Education, 2007* (Vol. 5, pp. 97–110). Trondheim: TAPIR Akademisk Forlag.

Nunokawa, K. (1996). Applying Lakatos' theory to the theory of mathematical problem solving. *Educational Studies of Mathematics, 31*(3), 269–293. doi.org/10.1007/BF00376323

Otte, M. (2018). The Philosophy of Mathematical Education Between Platonism and the Computer. In P. Ernest, *The Philosophy of Mathematics Education Today*, *ICME-13 Monography* (pp. 61–79). Cham: Springer.

Paolucci, C. (2010). *Strutturalismo e interpretazione*. Milano: Bompiani.

Peacocke, C. (1992). *A Study of Concepts*. Cambridge, MA: MIT Press.

Pécaud, S., & Nagels, M. (2015). L'autoformation comme activit*é. Savoirs, 39*(3), 89–104. doi:10.3917/savo.039.0089

Peirce, C. S. (1960). *Collected papers of Charles Sanders Peirce* (Vol. 1-6), In C. Hartshorne & P. Weiss (Eds.). Cambridge, MA: The Belknap Press of Harvard University Press. [Citato nel testo come Peirce, CP, numero volume. numero paragrafo].

Peirce, C. S. (1998). *The Essential Peirce*. In N. Houser, R. Eller, C. Lewis, A. De Tienne, C. L. Clark, & D. B. Davis (Eds.). *Selected Philosophical Writings*, 1893–1913 (Vol. 2). Blooming and Indainapolis: Indiana University Press. (Citato nel testo come Peirce, EP, numero volume, pagina).

Peruzzi, A. (2005). L'impostazione categoriale della matematica. *Atti di Pianeta Galileo 2005* (pp.73–88). Firenze: Centro Stampa del Consiglio Regionale della Toscana.

Piaget, J. (1970). *Genetic Epistemology*. New York: W. W. Norton.

Pigaet, J., & Inhelder, B. (1966). *La psychologie de l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Pimm, D. (1981). Metaphor and analogy in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 1*(3), 47–50.

Pólya, G. (1973). *How to solve it* (II ed.). Princeton, NJ: Princeton University Press. (Lavoro originale pubblicato nel 1944). Disponibile da https://notendur.hi.is/hei2/teaching/Polya_HowToSolveIt.pdf.

Ponte, J., P. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator, 3*(2), 3–8.

Prediger, S, Bikner Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM–Mathematics Education, 40*(2), 165–178. doi 10.1007/s1185-008-0086-z

Presmeg, N. (1998). A semiotic analysis of students' own cultural mathematics. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the twenty-second annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 136–151). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

Pungioni, M., & Branda, D. (2018). *Sogna in grande*. Firenze: Giunti del Borgo.

Quine, W. (1995). Naturalism; Or, Living Within One's Means. *Dialectica, 49*(2/4), 251–261.

Quinn, R. J., Lamberg, T. D., & Perrin, J. R. (2008). Teacher Perceptions of Division by Zero. *The Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas, 81*(3), 101–104. doi: 10.3200/TCHS.81.3.101-104

Radford, L. (2003a). On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. In M. Anderson M. et al. (Eds.). *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*. (pp. 49–79). Ottawa: Legas.

Radford, L. (2003b). On the epistemological limits of language: Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics, 52*(2), 123–150.

Radford, L. (2006). The Anthropology of Meaning. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1/2), 39–65.

Radford, L. (2007). Towards a cultural theory of learning. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-5). Larnaca, Cyprus, February 22–26, 2007*. CD-ROM.

Radford, L. (2008a). The ethics of being and knowing: towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 215–234). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2008b). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM–Mathematics Education, 40*(2), 317–327. doi 10.1007/s11858-008-0090-3

Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics, 30*(2), 2–7.

Radford, L. (2012), Education and the illusions of emancipation, *Educational Studies in Mathematics, 80*(1), pp. 101–118.

Radford, L. (2013). Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 7–44. doi:http://doi.dx.org/10.447 1/re di mat. 2013.19

Radford, L. (2014a). Phenomenology, Praxis, and the Question of Mathematical Objects. *Educación Matemática, 26*(1), 124–145.

Radford, L. (2014b). On teachers and students: An ethical cultural-historical perspective. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 1, pp. 1–20). Vancouver: PME.

Radford, L. (2016). Mathematics education as a matter of labor. In M. A. Peters (Ed.), *Encyclopedia of Educational Philosophy and Theory. Section: Mathematics education philosophy and theory*. Singapore: Springer.

Disponibile da http://luisradford.ca/publications/. doi 10.1007/978-981-287-532-7_518-1.

Radford, L. (2017). Ser, subjetividad y alienación. In B. D'Amore & L. Radford (Eds.), Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos (pp. 137–165). Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Disponibile da http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/ensenan za_y_aprendizaje_de_las_matematicas_problemas_semioticos_epistemologic os

Radford, L. (2018). A cultural-historical approach to teaching and learning: The theory of objectification. In F.-J. Hsieh (Ed.), *Proceedings of the 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 137–147). Taipei, Taiwan: EARCOME.

Radford, L. (2019). So, you say that doing math is like playing music? The mathematics classroom as a concert hall. *La matematica e la sua didattica, 27*(1), 69–87.

Radford, L., & Lasprilla Herrera, A. (2020). De por qué la ética es ineludible de considerar en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *La matematica e la sua didattica, 28*(1), 107–128.

Radford, L. (2020). La ética en la teoria de la objetivación. In L. Radford & M. Silva Acuña (Eds.), *Etica entre Educación y filosofia* (pp. 107–144). Prefazione di Bruno D'Amore. Bogotà: Universidad de los Andes.

Reale, G. (2019). Introduzione a "Verità e Metodo" di H. G. Gadamer. In G. Vattimo (Ed.). *Hans Georg Gadamer: Verità e Metodo* (pp. V-XXIV). Firenze, Milano: Giunti-Bompiani.

Resnik, M. D. (1997). *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford: Oxford University Press.

Reuter, M. (2014). Concepts and Concept Formation in Early Modern Philosophy. In S. Knuuttila & J. Sihvola (Eds.), *Sourcebook for the History of the Philosophy of Mind: Philosophical Psychology from Plato to Kant* (pp. 281–297). Dordrecht-Heidelberg-New York-London: Springer.

Ricoeur, P. (2016). *Dal testo all'azione: Saggi di ermeneutica* (Trad. G. Grampa). Milano: Jaca Book.

Robutti, O., Aldon, G., Cusi, A., Olsher, S., Panero, M., Cooper, J., Carante, P., & Prodromou, T. (2020). Boundary objects in mathematics education and their role across communities of teachers and researchers in interaction. In G. M. Lloyd, & O. Chapman, *International Handbook of Mathematics Teacher Education* (Vol. 3, pp. 211–240). Leiden: Brill Sense.

Roche, A., & Clarke, D. (2009). Making sense of partitive and quotitive division: A snapshot of teachers' pedagogical content knowledge. In R. Hunter, B. Bicknell, & T. Burgess (Eds.), *Crossing divides, Proceedings of the 32nd* *annual conference on Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 467–474). Palmerston North, NZ: MERGA.

Roche, A., & Clarke, D. M. (2013). Primary teachers' representations of division: assessing mathematical knowledge that has pedagogical potential. *Mathematics Research Education Journal, 25*(2), 257–278.

Rorty, R. (2004). *La filosofia e lo specchio della natura*. Nota introduttiva di D. Marconi e G. Vattimo. Miliano: Bompiani. (Lavoro originale pubblicato nel 1979).

Rosenblatt, L. M. (1985). Viewpoints: Transaction versus interaction. A terminological rescue operation. *Research in Teaching English, 19*(1), 98–107.

Rota, G. C. (1991). The End of Objectivity: *A Series of Lectures Delivered at M.I.T. in October, 1973*. Cambridge, MA: TRUEXpress.

Rota, G. C. (1997). The phenomenology of mathematical proof. *Synthese*, 111, 183–196.

Roth, W. M., & Radford, L. (2011). *A Cultural-Historical Perspective on Mathematics. MAA Notes* (Vol. 25, pp. 195–213). Washington: The Mathematical Association of America.

Rotman, J. (1998). *Journey into Mathematics*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.

Russell, B. (1908). Mathematical Logic as Based on the Theory of Types. *American Journal of Mathematics, 30*(3), 222–262. Disponibile da https://www.semanticscholar.org/paper/Mathematical-Logic-as-Based-on-the-Theory-of-Types-Russell/abe1a0c1b9472a5ea257de37cdd872fd1d3d9f80.

Russell, G., & Chernoff, E. J. (2011). Seeking more than nothing: Two elementary teachers conceptions of zero. *The Mathematics Enthusiast, 8*(1/2), 77–112.

Sabena, C. (2011). Studiare la multimodalità dell'insegnamento-apprendimento: focus sui gesti. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 34*(3A/B), 333–342.

Santi (2019). La Didattica della Matematica: aspetti epistemologico – fondazionali e ricadute nella pratica d'aula. In B. D'Amore & S. Sbaragli, *Atti del Convegno Nazionale Incontri con la matematica n° 33, Castel San Pietro Terme, Bologna*, 8–10 Novembre 2019 (pp. 43–46). Bologna: Pitagora.

Saussure, F. de (1986). *Course in general linguistics*. In C. Bally, A. Sechehaye, & A. Reidlinger (Eds.) (Trans. R. Harris). La Salle, IL: Open Court. (Lavoro originale pubblicato nel 1916).

Sbaragli, S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica, 19*(1), 57–71.

Schank, R. C., & Abelson, R. P. (1977). *Scripts plans goals and understanding*. Hillsdale, N.J.: Lea.

Scheiner, T. (2016). New light on old horizon: Constructing mathematical concepts, underlying abstraction processes, and sense making strategies. *Educational Studies in Mathematics, 91*(2), 165–183.

Schleiermacher, F. D. (2000). *Ermeneutica* (Trad. M. Marassi, testo tedesco a fronte). Milano: Bompiani.
Schoenfeld, A. H. (2020). Mathematical practices, in theory and practice. *ZDM–Mathematics Education, 52*(6) 1163–1175. doi.org/10.1007/s11858-020-01162-w
Schulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1–22.
Selter, C. (1994). *Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe*. Wiesbaden: Deutscher Universitätsverlag.
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflection on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1–36.
Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being – or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 38–75). London, UK: Lawrence Erlbaum.
Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press. [Trad. italiana A. Sfard (2009). Psicologia del pensiero matematico. Il ruolo della comunicazione dello sviluppo cognitivo. Prefazione di B. D'Amore. Trento: Erickson].
Sfard, A. (2009). Metaphors in education. In H. Daniels, J. Porter, & H. Lauder (Eds.), *Educational theories, cultures and learning: A critical perspective* (pp. 39–49). London: Routledge.
Sfard, A. (2018). On the Need for Theory of Mathematics Learning and the Promise of 'Commognition'. In P. Ernest (Ed.) *The Philosophy of Mathematics Education Today. ICME-13 Monographs* (pp. 219–228). Cham: Springer. doi.org/10.1007/978-3-319-77760-3_13
Sfard, A., & Kieran, C. (2001). Cognition as Communication: Rethinking Learning-by-Talking Through Multi-Faceted Analysis of Students' Mathematical Interactions. *Mind, Culture, And Activity, 8*(1), 42–76.
Shapiro, S. (2000). *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.
Simon, M. (2017). Explicating mathematical concept and mathematical conception as theoretical constructs for mathematics education research. *Educational Studies in Mathematics, 94*(2), 117–137. doi 10.1007/s10649-016-9728-1
Sini, C. (1982). Il problema del segno in Husserl e in Peirce. *Quaderni della Biblioteca Filosofica di Torino*, 57, 543–558.
Skemp, R. R. (2006). *Mathematics Teaching in the Middle School, 12*(2), 88–95. (Lavoro originale pubblicato nel 1976).

Skolem, T. (1933). Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems. *Norsk matematisk forenings skrifter, 2*(10), 73–82.

Skovsmose, O. (2016). Critical Mathematics Education: Concerns, Notions, and Future. In G. Kaiser (Ed.), *ICME-13 Topical Survays* (pp. 9–13). Hamburg, Germany: Faculty of Education, University of Hamburg.

Sonnesson, G. (2015). Phenomenology meets semiotics: Two not so very strange Bedfellows at the End of their Cinderella Sleep. *Metodo. International Studies in Phenomenology and Philosophy, 3*(1), 41–62.

Speranza, F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora.

Sriraman, B., & English, L. (2010). Surveying Theories and Philosophies of Mathematics Education. In B. Sriraman & L. English L (Eds). *Theories of Mathematics Education. Advances in Mathematics Education* (pp. 7–32). Berlin-Heidelberg: Springer. doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2_2

Sriraman, B. (2009). On the identities of mathematics education. Interchange: *A Quarterly Review of Education, 40*(1), 119–135.

Star, S. L. (1988). The structure of ill-structured solutions: Boundary objects and heterogeneous distributed problem solving. In M. Huhns & L. Gasser, *Readings in distributed artificial intelligence* (pp. 37–54). Menlo Park: Kaufman.

Star, S. L. (2010). This is not a boundary object: Reflections on the origin of a concept. *Science, Technology & Human Values, 35*(5), 601–617.

Steffe, L. P. (1995). Alternative epistemologies: An educator's perspective. In L. P. Steffe & J. Gale (Eds.), *Constructivism in education* (pp. 489–523). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Steinbring, H. (1989). Routine and meaning in the mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics, 9*(1), 24–33.

Steinbring, H. (2005). The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction: An Epistemological Perspective. *Mathematics Education Library* (Vol. 38). Berlin, New York: Springer.

Steinbring, H. (2006). What Makes a Sign a Mathematical Sign? An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1/2), 133–162.

Steinbring, H. (2008). Changed Views on Mathematical Knowledge in the Course of Didactical Theory Development. *ZDM–Mathematics Education, 39*(2), 303–316.

Steiner, H. G. (1985). Theory of mathematics education (TME): an introduction. *For the Learning of Mathematics, 5*(2), 11–17.

Steiner, H. G. (1987). A Systems Approach to Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(1), 46–52. doi:10.2307/749536

Stinson, D. W., & Bullock, E. C. (2012). Critical postmodern theory in mathematics education research: A praxis of uncertainty. *Educational Studies in Mathematics, 80*(1/2), 41–55.

Stylianides, G. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics, 28*(1), 9–16.

Stylianides, A., & Stylianides, G. (2017). Research-based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future. *Educational Studies of Mathematics, 96*(2), 119–127. doi 10.1007/s10649-017-9782-3

Sun, X. H. (2011). "Variation problems" and their roles in the topic of fraction division in Chinese mathematics textbook examples. *Educational Studies in Mathematics, 76*(1), 65–85.

Tall, D. O. (2013). How humans learn to think mathematically. *Exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Tall, D. O., Thomas, M. O. J., Davis, G., Gray, E. M., & Simpson, A. P. (2000). What is the object of the encapsulation of a process? *Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 1–19.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151–169.

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva M., & Cheng, Y. H. (2012). Cognitive Development of Proof. In G. Hanna & M. de Villers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study* (pp. 13–50). Dordrecht-Heidelberg-London-New York: Springer.

Thompson, P. W. (2002). Didactic objects and didactic models in radical constructivism. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing and Modeling in Mathematics Education*. (pp. 197–220). Dordrecht: Kluwer.

Thurston, W. P. (1994). *On proof and progress in mathematics. Bulletin of the american mathematical society, 30*(2), 161–177.

Tieszen, R. (2010). Mathematical realism and transcendental Phenomenological idealism. In M. Hartimo (Ed.), *Phenomenology and Mathematics* (pp. 1–22). Dordrecht/Heidelberg/London/New York: Springer.

Toulmin, S. (1958). *The use of arguments*. Cambridge: Cambridge University Press.

Treccani (2020). Enciclopedia on line. Disponibile da https://www.treccani.it/vocabolario/oggetto/ (Consultato il 20.08.20).

Treccani (n.d.). *Vocabolario on line*. Disponibile da http://www.treccani.it/enciclopedia/elenco-opere/Vocabolario_on_line

Tymoczko, T. (1985). *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Birkhauser: Boston.

Ulrich, C., Tillema, E. S., Hackenberg, A. J., & Norton, A. (2014). Constructivist model building: Empirical examples from mathematics education. *Constructivist Foundations, 9*(3), 328–339.

Van Bendegem, J. P. (2018). The Who and What of the Philosophy of Mathematical Practices. In P. Ernest, *The Philosophy of Mathematics Education Today (ICME-13 Monography)*(pp. 39–59). Cham: Springer.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. New York: Academic Press.

Vargas, F. (2020). Intensional and extensional reasoning: Implications for Mathematics Education. Tesi di Dottorato dell'University of Education, Ludwigsburg.

Venkat, H. & Winter, M. (2015). Boundary objects and boundary crossing for numeracy teaching. *ZDM–Mathematics Education, 47*(4), 575–586. doi 10.1007/s11858-015-0683-6

Vergnaud, G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des Mathématiques, 10*(2/3), 133–169.

Vergnaud, G. (1992). Concetti e schemi in una teoria operatoria della rappresentazione. In B. D'Amore (Ed.), *Efraim Fischbein-Gerard Vergnaud. Matematica a scuola: teorie ed esperienze* (pp. 103–124). Bologna: Pitagora.

Vergnaud, G. (2001). Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. In J. Portugais (Ed.), *La Notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation*, *Actes de colloque, Montréal* (pp. 6–27). Montreal: Université de Montréal.

Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics education. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of Function* (Vol. 25, pp. 195–213). Washington: Mathematical Association of America.

von Glaserfeld, E. (1995). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. Bristol, PA: The Falmer Press.

von Glasersfeld, E. (1983) Learning as a constructive activity. In J. C. Bergeron & N. Herscovic (Eds.), *Proceedings of the Fifth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 41– 69). Montreal, QC: PME-NA.

Vygotskij, L. S. (1934). Выготский, Л. С. (1934). Мышление и речь: психологические исследования. In В. Колбановский (Ed.). Москва, Ленинград: Государственное Социально-Экономическое Издательство. [Vygotskij, L. S. (1934). Pensiero e linguaggio: studi psicologici. In B. Kolbanovskij (Ed.). Mosca, Leningrado: Editzioni socio-economiche dello Stato]. Disponibile da www.marxists.org/russkij/vygotsky/1934/thinking-speech.pdf.

Vygotskij, L. S. (1996). Выготский Л. С. (1996). Проблема обучения и умственного развития в школьном возрасте. *Психологическая наука и образование, 1*(4), 5–18. [Vygotskij, L. S. (1996). L problema dell'istruzione e dello sviluppo mentale dello sviluppo nell'età scolare. *Scienza psicologica e formazione, 1*(4), 5–18]. Disponibile da https://psyjournals.ru/psyedu/1996/n4/Vygotsky.shtml.

Weber, K., Dawkins, P., & Mejía-Ramos, J.P. (2020). The relationship between mathematical practice and mathematics pedagogy in mathematics education research. *ZDM–Mathematics Education, 52*(6), 1063–1074. doi.org/10.1007/s11858-020-01173-7

Wheeler, M. M. (1987). Children's understanding of zero and infinity. *Arithmetic teacher, 35*(3), 42–44.

Wheeler, M. M., & Feghali, I. (1983). Much ado about nothing: Preservice elementary school teachers' concept of zero. *Journal for research in mathematics education, 14*(3), 147–155.

Whitehead, A. N. (1948). *An introduction to mathematics*. London: Oxford University Press.

Wilcox, V. B. (2008). Questioning zero and negative numbers. *Teaching children mathematics, 15*(4), 202–206.

Wilder, R. L. (1981). *Mathematics as a Cultural System*. Oxford: Pergamon Press.

Wilensky, U. (1991). Abstract meditations on the concrete and concrete implications for mathematics education. In I. Harel & S. Papert (Eds.), *Constructionism* (pp. 192–203). Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

Wittgenstein, L. (2003). *Philosophische Untersuchungen*. Frankfurt am Main: Suhrkamp. (Lavoro originale pubblicato nel 1953).

Wittgenstein, L. (2010). *Tractatus logico philosophicus. Logisch philosophische Abhandlung* (Trad. C. K. Ogden, con testo tedesco a fronte). In C. K. Ogden (Ed.). Cambridge: Magdalene College. (Lavoro originale pubblicato nel 1922). Disponibile da https://www.gutenberg.org/files/5740/5740-pdf.pdf

Yackel, E., & Cobb P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458–477.

Zalamea, F. (2012a). *Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics*. New York (NY): Sequence Press. (Lavoro originale pubblicato nel 2009).

Zalamea, F. (2012b). *Peirce's Logic of continuity. A conceptual and Mathematical Approach*. Boston, Massachusetts, USA: Docent Press.

Zalamea, F. (2019). *Grothendieck: Una guía a la obra matemática e filosófica*. Bogotà: Nomos.

Zalamea, F. (2021). *Modelos en haces para el pensamiento matemático*. Bogotà: Universidad Nacional de Colombia.

Zalta, E. (2001). Fregean Senses, Modes of Presentation, and Concepts. *Philosophical Perspectives*, 15, 335–359.

Collana: Tesi in Didattica della Matematica
Diretta da: Bruno D'Amore
Volume 2

Invito pertanto caldamente coloro che si interessano ai problemi dell'insegnamento della matematica e quanti amano i problemi fondazionali della matematica stessa, a leggere questo lavoro.
La fatica che faranno li premierà certo con l'apertura di nuovi orizzonti di riflessione e di pensiero: è quanto è successo a me e auguro a tutti loro.

Dalla prefazione
*Ferdinando Arzarello*

**Miglena Asenova** ha conseguito la Laurea Magistrale in Matematica presso l'Università di Modena e Reggio Emilia, l'abilitazione all'insegnamento secondario presso la SSIS dell'Università di Bologna e il Dottorato in Matematica e Scienze computazionali presso l'Università di Catania. È membro del Nucleo di ricerca in Didattica della matematica presso l'Università di Bologna ed è autrice di vari articoli e libri di ricerca e divulgazione in Matematica e Didattica della matematica.
È stata docente di Matematica nella Scuola secondaria di secondo grado per diversi anni; attualmente è ricercatrice presso l'Università di Bolzano.

ISBN 88-371-2145-7
9 788837 121457