Iori, M. (2018). Recensione al libro: Achille Maffini (2017). *Didattica delle equazioni: una proposta*. Prefazione di Carlo Marchini. Bologna: Pitagora. *La matematica e la sua didattica*, *26*(2), 307–310.

Achille Maffini (2017). *Didattica delle equazioni: una proposta*. Prefazione di Carlo Marchini. Bologna: Pitagora.

Parliamoci chiaro: se c'è una cosa che sembra facilissima da insegnare e da apprendere in matematica è proprio il concetto di equazione. Adattarlo all'ordine di scuola, alla classe, al singolo studente, in relazione agli obiettivi specifici che si vogliono raggiungere, sembra alla portata di qualsiasi insegnante di matematica, una sfida piacevole e coinvolgente, pure divertente. Ebbene, se siete insegnanti, ingegneri, medici, avvocati… convinti di tutto ciò allora questo libro è per voi. A maggior ragione se siete studenti o ex-studenti che, pur non avendo incontrato particolari difficoltà nella gestione delle equazioni, hanno provato un senso di profonda insoddisfazione di fronte a certe definizioni, principi, trattamenti, interpretazioni o spiegazioni, e hanno tuttora l'impressione di non aver capito bene tutto fino in fondo. Se siete persone curiose o desiderose di approfondire gli aspetti più nascosti e intriganti del mondo delle equazioni, quelli che sfuggono alla usuale trattazione offerta dai manuali scolastici, non potete lasciarvi sfuggire questo libro.

Il percorso tracciato dall'autore riguarda nello specifico le equazioni algebriche razionali, ma attenzione, nel libro non si parla solo di equazioni (numeriche, letterali, parametriche, reciproche, trinomie…), ma anche di monomi, polinomi, identità, sistemi di equazioni, problemi parametrici, anti-equazioni, funzioni, finzioni e altro ancora. *Finzioni?* Sì, proprio così, ma non si tratta di imbrogli, inganni… o scherzi dell'autore. Il termine *finzione* è utilizzato per includere e richiamare in maniera assonantica sia il nome sia il concetto di funzione nel designare una relazione binaria funzionale. Infatti, non tutte le "finzioni" sono "funzioni". A differenza di una funzione, una finzione non è necessariamente ovunque definita, perché gli elementi del suo dominio hanno *al più* un'immagine nel codominio. In virtù di ciò, il concetto di finzione permette di interpretare e chiarire numerosi aspetti dell'oggetto "equazione", per nulla banali o superflui, spesso nascosti nell'usuale prassi didattica, ma essenziali per comprendere a fondo la complessità della sua gestione, sia come *oggetto istituzionale* (Chevallard, 1985), sia come traduzione o modellizzazione di un problema, anche parametrico. Ecco allora che, dopo aver preso in esame la relazione tra equazione e problema, l'autore analizza in profondità la natura dell'oggetto "equazione" dal punto di vista morfologico, semantico e sintattico, e i suoi legami con l'oggetto "funzione". Tutto ciò grazie, soprattutto, all'uso di *finzioni di sostituzione, di parametrizzazione*, *di valutazione* e *soluzione*, che permettono di definire diversi tipi di equivalenza: morfologica, sintattica, semantica, e pure strutturale. La definizione di equazione a cui giunge, su basi sia logiche sia applicative, risulta molto articolata ed elaborata. Per averne un'idea, senza entrare nei dettagli, diciamo solo che un'equazione è definita mediante una particolare terna (o coppia) costituita da: (1) una *proposizione* di un contesto algebrico, (2) una *finzione di parametrizzazione* (che può essere omessa, se non necessaria), (3) un *dominio* (relativo alle variabili non parametri presenti nella proposizione che individua l'equazione). Il percorso che conduce a una tale definizione, avverte l'autore, è particolarmente complesso, improponibile a livello di scuola secondaria. Esso, tuttavia, a un livello adulto e colto, offre interessanti ed efficaci strumenti concettuali, logici e cognitivi di analisi e di gestione delle ambiguità o insidie concettuali che si celano nelle varie definizioni, principi, procedimenti risolutivi, apparentemente semplici e innocui, inerenti al mondo delle equazioni (e non solo) comunemente utilizzati o condivisi a livello di scuola secondaria, in particolare:

- nelle definizioni di monomio, grado di un monomio, coefficiente di un monomio, equazione (numerica, letterale, parametrica…) e sua forma normale, dominio di un'equazione, condizioni di esistenza, equazione impossibile, determinata o "indeterminata";
- nell'uso di variabili, incognite e parametri, spesso confusi tra loro;
- nei cosiddetti "principi" di equivalenza;
- nell'uso improprio di determinati simboli o nell'abuso di formulazioni ambigue;
- nelle sostituzioni come procedure risolutive;
- nelle trasformazioni sintattiche in relazione a diversi ambiti o domini, spesso sottintesi.

La definizione di monomio è nota a tutti; in essa si assume implicitamente che le lettere abbiano tutte lo stesso ruolo. Ma cosa succede se un monomio è considerato come un termine di un'equazione parametrica? Per esempio, nell'equazione $\left(k-1\right)x^2+\left(5k-3\right)x+5-k=0$, cosa si può dire del termine $\left(k-1\right)x^2$? Lo possiamo considerare come un'espressione algebrica costituita da un coefficiente numerico e da una parte letterale? Se sì, tra le lettere della parte letterale, compaiono solo moltiplicazioni ed elevamenti a potenza con esponente naturale? Come rileva l'autore, la gestione delle equazioni parametriche richiede "un cambio di prospettiva radicale per uno studente poiché non solo lo obbliga a vedere un 'numero' dove c'è una 'lettera' (o addirittura una scrittura ben più complessa), ma anche, soprattutto, a modificare radicalmente il concetto di monomi simili" (p. 112). Da qui la necessità di un lavoro specifico sul concetto di parametro e sui diversi ruoli che possono avere le lettere che compaiono nella proposizione che individua un'equazione, anche per una gestione adeguata e consapevole, per nulla banale, della cosiddetta forma "canonica" (o "normale") delle numerose equazioni che si incontrano a livello di scuola secondaria.

A proposito di lettere, non pochi studenti manifestano un certo disagio, imbarazzo, o comunque insoddisfazione nel manipolare lettere morfologicamente diverse dalla "*x*". Anzi, non è rara l'identificazione dell'incognita o della variabile di un problema con la lettera "*x*". Come se l'informazione racchiusa da un problema o da un'equazione e la loro risoluzione dipendessero dalla forma della lettera utilizzata, vale a dire da questioni puramente morfologiche. Come mai?

Gli aspetti morfologici di un'equazione riguardano in generale la forma della proposizione che individua l'equazione, forma che nelle procedure risolutive è vincolata a particolari sostituzioni; gli aspetti sintattici sono strettamente legati alle proprietà delle relazioni coinvolte e della struttura numerica nella quale si considera l'equazione; mentre gli aspetti semantici sono inerenti alla determinazione delle soluzioni dell'equazione in un dato insieme. Come rileva l'autore, gli aspetti morfologici del concetto di equazione sono di solito ritenuti meno rilevanti, anche didatticamente, rispetto a quelli sintattici e semantici, dunque spesso trascurati o sottintesi. In particolare, nella risoluzione delle equazioni si insiste soprattutto sull'uso corretto dei cosiddetti "principi" di equivalenza, principi (o meglio teoremi) nei quali si condensano l'equivalenza sintattica e quella semantica. L'identificazione degli aspetti morfologici con quelli sintattici o semantici non è dunque rara, e può ostacolare fortemente la gestione delle equazioni (e non solo). Dal punto di vista semio-cognitivo, essa corrisponde all'identificazione degli aspetti iconico-qualitativi di una rappresentazione semiotica dell'oggetto "equazione" nel registro algebrico con altri aspetti, in particolare con quelli iconico-strutturali, indicali, o simbolici.

Numerosi sono gli esempi che l'autore fornisce a sostegno della sua riflessione teorica, anche sulla base della sua lunga esperienza di insegnante. Vediamone brevemente alcuni che riguardano l'equivalenza morfologica, sintattica e semantica.

Le equazioni in $\mathbb{R}$ individuate da $x+1=3$ e $y+1=3$ "sono equivalenti semanticamente, ma non morfologicamente, a meno che non si possa sostituire la x con la y (o viceversa)" (p. 43). Anche le equazioni individuate da $x+2y=3$ e $2y+x-3=0$ non sono morfologicamente equivalenti in assenza di informazioni sulle proprietà delle operazioni coinvolte, di natura prettamente sintattica; tuttavia, esse sono semanticamente equivalenti in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, nel senso che ogni coppia di numeri reali che soddisfa la prima uguaglianza soddisfa anche la seconda, e viceversa; in altre parole, le rispettive finzioni di valutazione sono uguali.

Le equazioni individuate da $x-2=0$ e $(x-2)^2=0$ in $\mathbb{R}$ sono semanticamente equivalenti, ma non sintatticamente equivalenti, perché non è possibile moltiplicare (rispettivamente dividere) entrambi i membri della prima (rispettivamente della seconda) equazione per $x-2$.

Che dire poi delle equazioni individuate da $x = 1$ e da $x + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$? In $\mathbb{R}$ sono semanticamente equivalenti? Sono sintatticamente equivalenti? Per carità, non sveliamo troppo…

Da questi e numerosi altri esempi emerge con forza il ruolo centrale che assume la gestione degli aspetti morfologici, sintattici, semantici, e più in generale semiotici, nei processi di insegnamento-apprendimento della matematica. Gli studi e le ricerche in didattica della matematica l'hanno evidenziato ampiamente in numerosi lavori di ricerca sin dagli anni '80 (Duval, 1988a, 1988b, 1988c), e continuano a fornire in ambito semio-cognitivo chiavi di lettura sempre più raffinate, articolate, profonde e concrete (si veda, per esempio: D'Amore, 2006; Duval, 1995, 2017).

Nella prefazione, Carlo Marchini, uno dei massimi logici italiani, dichiara di aver intrapreso gli studi di matematica proprio per capire meglio e di più questi e altri "misteri". E si vanta con orgoglio di essere riuscito a trasmettere la sua "insoddisfazione" su ciò che sapeva a uno dei suoi studenti, Achille Maffini. "Questo testo ne è una prova perché in esso molte delle domande che mi ponevo trovano una risposta approfondita" (p. 11). Domande che si pongono anche tanti altri studenti e insegnanti.

Riferimenti bibliografici

Chevallard, Y. (1985). *Transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

D'Amore, B. (2006). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*, *20*(4), 557–583.

Duval, R. (1988a). Écarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *1*, 7–25.

Duval, R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *1*, 57–74.

Duval, R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, *1*, 235–253.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. (Prefazione di Bruno D'Amore). Cham: Springer International Publishing AG. [Lavoro originale pubblicato in portoghese da Proem Editora, São Paulo, 2011]. doi:10.1007/978-3-319-56910-9

Maura Iori