

915. D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I. (2017). La didáctica de la didáctica de la matemática: experiencias personales e indicaciones críticas de algunas discusiones e investigaciones. In: D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Prefacios de: Michèle Artigue y Ferdinando Arzarello. Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Pagg. 41-66. Copia web link:  
[http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado\\_ud/publicaciones/enseñanza\\_y\\_aprendizaje\\_de\\_las\\_matematicas\\_problemas\\_semioticos\\_epistemologicos\\_y\\_practicos.pdf](http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/enseñanza_y_aprendizaje_de_las_matematicas_problemas_semioticos_epistemologicos_y_practicos.pdf)  
Link (banner publicitario): <http://die.udistrital.edu.co/>



**La didáctica de la didáctica de la matemática:  
experiencias personales e indicaciones críticas de algunas discusiones  
e investigaciones**

Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla

Palabras clave: didáctica de la matemática como objeto de investigación; teoría de las situaciones; triángulo de la didáctica

Key words: mathematics education as object of investigation; theory of situations; triangle of didactics

Mots clé: didactique de la mathématique comment objet de recherche; théorie des situations; triangle de la didactique

Parole chiave: didattica della matematica come oggetto di ricerca; teoria delle situazioni; triangolo della didattica

Autores:

Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla

NRD – Bologna y Mescud – Bogotá

bruno.damore@unibo.it

**Resumen.** El nacimiento de la teoría que hoy se conoce como “didáctica de la matemática” (ddm), declinado y traducido de diversas formas en los diferentes países, permitió a la comunidad de estudiosos de dicha disciplina dar increíbles e inesperados pasos en la dirección de una investigación siempre más detallada, profunda y variada. Tanto que, la “teoría” se convirtió en “disciplina” y, como tal, se enseña en las universidades y en los cursos de actualización para docentes de matemática en servicio. Es por esto que nos sentimos autorizados para hablar de por lo menos tres decenios de enseñanza de la ddm. La obvia conclusión es que, en nuestra opinión, se pueda iniciar a reflexionar, en nuestra comunidad, sobre la didáctica de esta disciplina, es decir, de la “didáctica de la ddm”, de la forma cómo se presenta concretamente, sobre cuáles son los problemas teóricos que implica y que tipo de investigación se está realizando dentro de este marco. Este texto sólo quiere dar una contribución en esta dirección.

**Abstract.** The birth of the theory that now bears the name of “mathematics education” (ddm), developed and applied in many diverse ways in different countries, has enabled the community of scholars to make astonishing and unexpected steps in the direction of research ever more detailed, in depth and varied. In this way, “theory” has become “discipline”, and, as such, is taught in universities and training courses for in service mathematics teachers. We believe that we can already speak of almost three decades of teaching mathematics education. In our opinion, the obvious conclusion is that within our community we can begin to reflect on the didactic of this discipline, on the “didactic of ddm”, in terms of its concrete characteristics, of the theoretical problems it entails and of the type of research that is being developed in this respect. This text is intended as nothing more than a contribution in this direction.

**Sunto.** La nascita della teoria che oggi porta il nome di “didattica della matematica” (ddm), declinato e tradotto nei vari Paesi in molti modi diversi, ha permesso alla comunità degli studiosi di essa di compiere incredibili ed inaspettati passi nella direzione di una ricerca sempre più dettagliata, approfondita e variegata. Tanto che la “teoria” è divenuta “disciplina” e, come tale, si insegna nelle università e nei corsi di formazione per insegnanti di matematica in servizio. Riteniamo che si possa già parlare di quasi tre decenni di insegnamento della ddm. La ovvia conclusione è che, a nostro avviso, si possa cominciare a riflettere, nella nostra comunità, sulla didattica di questa disciplina, cioè della “didattica della ddm”, per come si presenta in modo concreto, per quali problematiche teoriche essa comporta e che tipo di ricerca si sta sviluppando al suo riguardo. Il presente testo vuol essere nulla più che un contributo in questa direzione.

## **1. Las bases de la demanda y de la oferta de cursos de didáctica de la matemática**

Las demandas oficiales de cursos de didáctica de la matemática (ddm) provienen principalmente de dos tipos de organismos

institucionales, las universidades (U) y las instituciones escolares (E).

U. La universidad solicita este tipo de cursos en vista básicamente de la formación de futuros docentes de matemática de todos los niveles escolares: pre-escolar, primaria y secundaria (media y superior).

En el primer caso se trata de cursos dentro de las facultades de educación en pre-escolar, infantil y de licenciatura en educación básica; en los otros dos casos, terminado el curso básico (actualmente es de 3 años) en matemática, se pasa al curso de dos años que otorga el título master. Dentro del curso de master se encuentra uno en particular que otorga el título en didáctica de la matemática y prevé la formación de los docentes de secundaria. Teniendo en cuenta los casos y los acuerdos, estos cursos prevén un número muy diferente de horas de docencia. En este momento se está asistiendo a un cambio radical en diferentes países del mundo; por lo tanto, aún no es posible llegar a conclusiones, dado que se carece de datos objetivos.

Evitaremos afrontar aquí los temas más específicos relativos a los cursos de ddm para futuros docentes de escuela de infancia, de doctorados en ddm y de post-doctorado de investigación en ddm, que se están generalizando por todo el mundo; en estos cursos se afrontan problemáticas del todo diferentes a aquellas aquí consideradas: los cursos de formación de docentes de escuela de infancia, por la particularidad del contenido “matemático” que el docente debe tratar; los cursos de doctorado y de post-doctorado por la peculiaridad específica de la relación que se establece entre docente, alumno y Saber.

E. Incluso institutos de educación básica, redes de escuelas o grupos de docentes o directores escolares solicitan explícitamente cursos de formación sobre la ddm para docentes de matemática en servicio. Por lo general, no se trata de decenas de horas, como

sucede dentro de la universidad, sino de intervenciones breves que normalmente no superan las 6-8 horas (por lo menos, esta es nuestra experiencia). Las solicitudes que se nos hacen, por lo general no citan explícitamente la ddm, sino que son de diversa índole: vagos cursos de matemática, sobre la enseñanza de la matemática, de la lógica, sobre el laboratorio, sobre la dificultad en la resolución de problemas etc.; estas terminan siempre con recaer (por nuestra elección o nuestra imposición) en cursos de base de formación en ddm.

Sea en los casos U como en aquellos E, es inevitable, es imposible, por razones que poco a poco en la redacción del texto iremos mostrando, hablar sólo y únicamente de ddm, se hace indispensable afrontar temáticas de matemática (en los diversos niveles), de historia y de epistemología de la matemática y algunas veces incluso de didáctica general. En los cursos de formación de docentes en servicio en la escuela secundaria (E) o de los futuros docentes en formación (U) en ddm, se manifiestan, de hecho, deficiencias, a veces notables, en matemática; por lo cual la solicitud de ddm pasa en segundo plano; esto porque, para nosotros, de hecho:

*no se puede hablar de la didáctica de X  
a quien no conoce X.*

Esta perentoria afirmación, que implica una elección (para nosotros) razonablemente axiomática, no es compartida por todos, pero queda (para nosotros) la base de la acción didáctica.

## **2. El triángulo de la didáctica como esquema de situación**

Usamos el muy bien conocido esquema del “triángulo de la ddm” para describir la nueva situación: didáctica de la ddm; este esquema clásico, sus vértices, sus lados, deben ser interpretados en la situación específica, simplemente generalizando, ampliando o

modificando en forma oportuna lo ya descrito en D'Amore y Fandiño Pinilla (2002).

Un vértice representa el Saber que, en este caso, no es la matemática sino la ddm;

un segundo vértice representa el estudiante que puede pertenecer a las dos tipologías fundamentalmente diferentes según se trate del caso U o del caso E: debemos examinar separadamente los dos casos;

un tercer y último vértice representa al docente (del curso de didáctica de la ddm).

Los pasajes más de una vez estudiados: del Saber al saber de enseñar, del saber de enseñar al saber enseñado y de este al saber aprendido (Fandiño Pinilla, 2002), continúan a valer, aunque con las drásticas modificaciones del caso;

lo mismo vale en relación con la idea de transposición didáctica e ingeniería didáctica (misma citación de base).

Una breve indagación preliminar esquemática, por demás ingenua, antes de iniciar el análisis detallado.

En el clásico triángulo de la ddm, el Saber es el saber matemático resultado de la investigación, de los procesos históricos, en el curso de milenios; de este el docente toma referencia en su formación, se supone que lo hizo o que sepa y quiera hacerlo; pero después, con una oportuna transposición didáctica, elige el saber de enseñar al estudiante, y lo enseña con el fin de que los estudiantes lo aprendan. Afortunadamente, existe una especie de acuerdo institucional sobre cual es el saber matemático que el docente debe enseñar (en los diferentes niveles escolares y universitarios) y que, por tanto, el estudiante debe aprender. El estudiante es un novicio que tiene como objetivo (en ocasiones sólo idealmente) el de aprender la matemática que el docente le enseña. El objetivo del saber matemático aprendido por los estudiantes es de tipo cultural de base general (saberes matemáticos irrenunciables para futuros ciudadanos, independientemente de la profesión elegida) o

específicos (saberes necesarios para una determinada actividad o profesión).

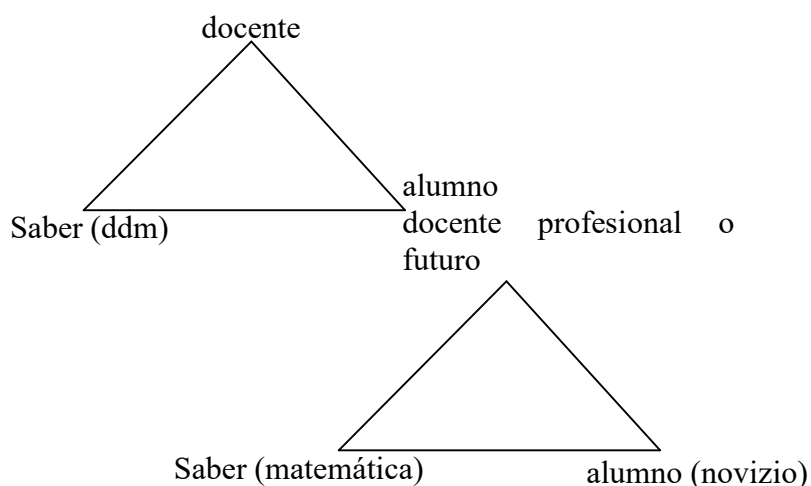
En el (nuevo) triángulo de la didáctica de la ddm;

el Saber es el saber de la ddm que ha sido estructurado por la investigación, por la historia, en el curso de los pocos decenios que tiene de existencia la ddm;

de este Saber el docente toma en su formación, se supone que sepa y quiera hacerlo; pero después, con una oportuna transposición didáctica, elige cual es el saber de enseñar al estudiante, y lo enseña con el fin de que este lo aprenda; desafortunadamente, no existe para nada una especie de acuerdo, ni interpersonal, ni institucional, sobre cual sea el saber que el docente deba enseñar (a sus estudiantes docentes en formación inicial o en servicio) y que el estudiante deba aprender; creemos que esto sea consecuencia del hecho que todo docente se siente libre de interpretar la dicción “ddm” de forma muy personal, a veces desinteresándose de los contenidos establecidos por la investigación; algunos docentes no le reconocen a la ddm un estatuto disciplinar específico, incluso algunos ignoran su existencia, confundiéndola con: praxis heurística, sentido común, método, pedagogía y quien más tenga más le agregue;

el estudiante en este caso no es de hecho un novicio, es, por el contrario, un profesional, en formación o en servicio, que ya tiene o debería tener conocimiento matemático y su ser estudiante está ligado a su profesión, futura o presente; su objetivo ideal es el de aprender la ddm que el docente le enseña; el objetivo del saber de ddm aprendido por estos estudiantes es de tipo aplicativo: estos deberían hacer uso de la ddm aprendida en su profesión de docentes de matemática, enriqueciendo la propia profesionalidad con el fin de tener mayor éxito en el aprendizaje de sus estudiantes (en matemática); es decir: existe una enorme diferencia entre el sentido que tiene para un novicio, en el triángulo clásico de la ddm, aprender la matemática, y, para un estudiante docente en formación inicial o en servicio, en el nuevo triángulo de didáctica de la ddm,

aprender la ddm; debemos decir, pero, como lo rebatiremos, que el estudiante futuro docente, en su aprendizaje de la ddm, generalmente considera los contenidos de la ddm no como una herramienta concreta, útil en su futuro profesional, sino como objeto de aprendizaje necesario para superar el examen, lo cual banaliza en gran medida el esfuerzo del docente de ddm.



### 3. El alumno

Afrontemos la problemática de la tipología de estudiante. Distinguimos *in primis* los dos casos, en orden U y E; en el caso U, distinguimos UP (formación universitaria para futuros docentes de escuela primaria) y US (formación universitaria para futuros docentes de escuela secundaria).



UP. En el caso de estudiantes en formación inicial para futuros docentes de educación básica, debe hacerse la distinción entre dos casos que se presentan como fundamentales:

UP<sub>1</sub> estudiantes universitarios que siguen un único curso de ddm dado que es obligatorio;

UP<sub>2</sub> estudiantes universitarios que eligen espontáneamente un curso opcional de ddm (por lo general se trata de seguir el curso obligatorio y después escoger un segundo curso de ddm como elección personal; no siempre esta elección se debe a una convicción real, pero lo es en numerosas ocasiones).

Debemos aclarar inmediatamente que, generalmente, por lo menos en Italia, todos estos cursos de ddm están precedidos por un curso de matemática; o, como sucede últimamente, en el primer curso obligatorio (60 horas) confluyen las dos disciplinas: matemática y ddm.

Las reacciones son, por lo general, diversas; no obstante las declaraciones explícitas de interés y en ocasiones de sorpresa de los estudiantes UP<sub>1</sub> frente a una disciplina que se presenta diferente de cómo se recordaban de estudiantes pre-universitario, parece permanecer una cierta difidencia, no tanto en relación con el docente o con la disciplina, sino en relación con sí mismos y en una no muy bien clarificada pero sí declarada incapacidad frente a ciertas temáticas. Podríamos entrar en detalles, pero nos limitamos a citar a Zan (2007).

Difícilmente un estudiante que se encuentra en el rango UP<sub>1</sub> cambia idea y pasa al rango UP<sub>2</sub>, tenemos sólo casos esporádicos estadísticamente irrelevantes.

Pero el viceversa, pasar del rango UP<sub>2</sub> al rango UP<sub>1</sub> nunca se presenta; el estudiante que retiene ser capaz en matemática cumple a priori la opción UP<sub>2</sub> sin retornar sobre sus pasos.

El gran número de solicitudes de tesis en ddm se presentan siempre en el rango de UP<sub>2</sub>.

La percepción de una personal incapacidad de los estudiantes en relación con la matemática, ampliamente estudiada por Zan (2007),

no siempre es apoyada en razones objetivas; así como el viceversa: la supuesta capacidad o la supuesta preparación, por lo general muestran que la realidad es muy diferente e incluso estudiantes del grupo UP<sub>2</sub> deben ser recalificados en matemática, antes de acceder significativamente a la ddm.

Las misconcepciones que se forman en la escuela pre-universitaria en relación con la matemática no siempre son percibidas como tales por quienes las poseen y, por el contrario, son consideradas puntos de fuerza en cuanto aparecen generalmente como normas de comportamiento, reglas o esquemas, generalmente incorrectos pero percibidos como correctos y necesarios (se debe hacer así, se debe escribir igual, se debe dibujar así, ésta es la regla,...) (Martini, Sbaragli, 2005; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sbaragli, 2008; Sbaragli, 2012)

En casos de este tipo, muy frecuentes, la metodología de enseñanza tiene una gran importancia: es necesario enfrentar al estudiante del curso UP<sub>2</sub> con sus propias misconcepciones, por ejemplo, gracias a trabajos personales de análisis o en grupos con un número reducido de estudiantes que, se sabe, producen sesiones por lo general profundas de análisis de sí mismos en situación (Dozza, 2006; Ellerani, 2012).

US. Diversa es la situación de los cursos para futuros docentes de escuela secundaria, en los diferentes Países, y en proceso de redefinición en Italia, en este período. A primera vista, parecería ingenuamente poder admitir que estudiantes en formación como docentes de matemática en la escuela secundaria, que obtuvieron el grado en matemática, no deben necesitar de una formación matemática. Pero no es así. Por lo general, precisamente los cursos de ddm, por la reflexión crítica y específica a la cual obligan, ponen en discusión convicciones profundas sobre la matemática y sobre sus elementos, sacando a flote vacíos e incertidumbres que deben ser colmados y resueltos, antes del ingreso en aula como docentes (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2004). Así, los cursos de historia y de

epistemología de la matemática que generalmente acompañan aquellos de ddm se revelan de gran eficacia precisamente para colmar lagunas en matemática (D'Amore, 2004).

E. La formación en servicio, por lo general, no viene solicitada sólo por los docentes de matemática, sino también por docentes de otras disciplinas.

Para analizar la situación es necesario partir de aquellas que son las expectativas preliminares, es decir, antes de la realización del curso.

Nuestras indagaciones, del sabor concreto e ingenuo y aún no científico, muestran que el docente, por lo general, espera del curso: “recetas” (qué, cuándo y cómo enseñar), sugerencias específicas de actividades (en el momento de la solicitud se insiste mucho en el hecho que el curso debe ser “concreto” o con carácter de “laboratorio”), presentación de instrumentos (que van desde los artefactos concretos hasta metodologías de enseñanza), esquemas de comportamiento y de análisis, reglas para la enseñanza, criterios de evaluación en particular aquellas evaluaciones que hacen referencia a las diferentes pruebas nacionales e internacionales de los últimos años, organizaciones curriculares; en algunos casos nos revelaron que esperaban la denuncia de los errores que los docente cometen en su actividad didáctica, la panacea para no repetirlos, qué *deben* hacer los docentes con los estudiantes (como enseñar las tablas de multiplicar, los algoritmos en columna, como escribir cada uno de los pasajes de las operaciones etc.).

Frente a estas expectativas, las reacciones a nuestro curso son de diversa índole, aunque de tipologías restringidas, menos dispersivas; pero, para entenderlas, debemos decir inmediatamente que nuestro curso estándar (de esto se hablará más adelante) prevé: elementos de base de didáctica tomados de la teoría de las situaciones (por ejemplo el contrato didáctico), con sus nexos y conexos, imágenes y modelos, modelos intuitivos y cuestiones relativas evidenciadas por Fischbein; análisis de modelos de las

operaciones trayendo a colación los ejemplos de Vergnaud; misconcepciones, la dificultad en el aprendizaje de la matemática, teoría de los obstáculos; reflexiones sobre la presencia de la semiótica y la dificultad de su gestión por parte de los estudiantes; pero, a todo esto debemos agregar continuas y diferentes reflexiones sobre la matemática más que sobre la didáctica, en particular cuando se habla de aritmética, [por ejemplo en la escuela primaria, sistema posicional, números racionales (las fracciones constituyen siempre una problemática muy fuerte)], elementos de geometría de base, probabilidad y estadística (aspectos de la matemática donde el conocimiento es casi nulo) etc. Cuando hay suficiente tiempo, nuestro texto de referencia implícito es D'Amore, 1999, cuando no hay tiempo, el texto mucho más liviano D'Amore y Sbaragli, 2011; los textos de matemática a los cuales se hace referencia explícita son variados, pero básicamente Fandiño Pinilla y Sbaragli, 2011, y Fandiño Pinilla, 2005, junto a otros; pero volveremos sobre los contenidos de los cursos de forma mucho más explícita.

La típica reacción a los cursos, la más difusa, es una reacción de agradable estupor y de favorable aceptación; lo concreto de nuestra elección de contenidos es fuertemente advertido.

Lo que nos deja desconcertados es el siguiente hecho: este tipo de cuestiones, el contrato didáctico por ejemplo, se hizo público a mediados de los '60, hace medio siglo, ha sido objeto de estudio y de investigación desde los '80, fue objeto de revisiones mucho más recientes (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sarrazy, 2010); se han escrito un gran número de artículos, incluso en revistas de gran difusión entre los docentes, ha sido objeto de relaciones en congresos para docentes, se ha tratado en libros que han vendido miles de copias; y, sin embargo, el argumento es del todo nuevo para casi la totalidad de los docentes a quienes se les presenta.

Este hecho, interesante y estimulante para una investigación futura, debe ser tomado en seria consideración. ¿Por qué profesionales como médicos, abogados o ingenieros se dan cuenta

inmediatamente de los progresos en cada una de sus profesiones, mientras que los profesionales de la educación se quedan relegados a pseudo - recetas que datan de decenas de años y ni siquiera saben de las críticas sin piedad y justas que a estas han hecho expertos y serios investigadores en didáctica? Ningún médico hoy aplicaría sanguijuelas al cuerpo de un paciente anémico, pero esta “cura” siguió adelante por siglos, hasta que fue superada y declarada inútil y dañosa. Mientras que en la acción de enseñanza, algunas sanguijuelas, que la investigación ha indicado como inútiles y además dañosas, resisten aún hoy y no son abandonadas.

Muchos docentes incluso hoy se empeñan en discutir los “beneficios” de instrumentos artificiales ideados en los años '60 para “enseñar bien”, materiales “estructurados”, cuando el verdadero problema es el aprendizaje y no sólo la enseñanza. Estos instrumentos, por sí mismos, no son necesariamente negativos, se vuelven tales cuando se convierten en objeto de una exageración acrítica que los interpreta como panacea didáctica en grado de resolver todos los problemas.

Los docentes de otras disciplinas que siguen el curso de ddm, llegan por lo general prevenidos en relación con la matemática y con todo lo que con esta disciplina se relacione, por tanto son entusiastas de haber entendido el mensaje, al termine del curso, y, en casi todas las ocasiones, son explícitos en reconocer que muchos de los argumentos que han adquirido no son sólo específicos de la ddm sino que pueden ser extendidos o se encuentran presentes en sus disciplinas de enseñanza.

Un caso especial lo encontramos en los cursos de maestría de ddm en las universidades, cursos de postgrado. Fuimos y somos docentes en cursos de maestría o magistral en diferentes países: Italia, España, Chipre, Grecia, México, Suiza, Colombia y en algunos otros. El estudiante de maestría puede ser un estudiante con el título en matemática que desea tomar la habilitación para la enseñanza de la matemática en la secundaria (Italia, España,

Chipre, Grecia, por ejemplo) o es docente de matemática de la escuela secundaria o de universidad e inicia este curso con el fin de alcanzar el título para acceder a grados profesionales más altos o lo hace simplemente por pasión y seriedad profesional (México y Colombia, por ejemplo).

En cada uno de los dos casos, se trata de una elección personal que connota específicamente al estudiante y que lo lleva a tomar el curso con gran seriedad lo cual no tiene comparación con otros casos descritos precedentemente. Esto no quita que se hayan manifestado, en muchos casos, lagunas matemáticas lo cual nos llevó a profundizar necesariamente aspectos disciplinares, mucho más que argumentos de ddm. El estudiante en este caso es mucho más receptivo, mucho más disponible a serios esfuerzos, por ejemplo de estudio personal y de trabajos extras.

#### **4. El docente**

Cursos estricta o vagamente asimilables a aquellos que estamos describiendo son impartidos por una tipología variada de docentes o de “expertos”.

I. Docente experto en ddm así como la presentamos en 3. (lo que en D’Amore 1999, se denomina epistemología del aprendizaje de la matemática y que se refiere a la problemática del aprendizaje por parte del alumno; esta hace referencia, inicialmente, por motivos cronológicos a la llamada “escuela francesa”); esta tipología de docente pertenece a la categoría de matemáticos universitarios que indiscutiblemente tienen una buena preparación disciplinar y, teniendo experiencia en cursos para docentes de primaria y secundaria, entienden y toman en seria consideración las solicitudes en ocasiones aparentemente ingenuas, de los estudiantes - docentes (en formación o en servicio).

II. Docente experto en matemática o en ddm pero entendida como *Ars docendi* (siempre D'Amore, 1999) entonces en la problemática de la enseñanza; a veces, aquí “matemática” debe ser entendida en el sentido de “matemática elemental” o “divulgación de la matemática”; por lo general este tipo de docente no entiende la necesidad real de las solicitudes que presentan los docentes de primaria o de secundaria (en formación o en servicio) que frecuentan el curso, o las califican como banales, subestimándolas; de hecho, la falta de conocimiento en ddm no les ofrece bases científicas para una respuesta seria; si deciden responder, lo hacen con el sentido común o sobre experiencias ligadas a sus hijos o a situaciones análogas. De hecho, los docentes de esta tipología no tratan, en sus cursos, la ddm, aunque el curso lleve esta denominación.

III. Docente experto en matemática que ofrece cursos de matemática, o de historia, o de lógica, o de matemáticas elementales desde un punto de vista superior, o de complementos de matemática, o de divulgación de la matemática... a estudiantes docentes de matemática (en formación o en servicio).

IV. Docente de primaria o de secundaria no experto ni en matemática ni en ddm, pero con experiencia plurianual como docente; por ejemplo, forman parte de esta categoría aquellos docentes que han creado, con el fin de enseñar ciertos aspectos de la matemática, instrumentos, artefactos o manufacturas de diversa índole; de hecho normalmente prometen milagros y por lo general, frente a un gran interés inicial, dejan la misma situación que encontraron; ante las solicitudes de los estudiantes - docentes tienen siempre una respuesta pronta pero casi nunca sustentada científicamente. Sobre el conocimiento matemático, además, son poco atendibles.

Dada la escasez de docentes del primer tipo en Italia, se tienen cursos de tipo U dirigidos por docentes del tipo II o III; obviamente el estudiante, en cuanto tal, no sabe de la equivocación epistemológica en el cual ha caído y, dado que los cursos tienen todos el mismo nombre (ddm), termina con pensar que el contenido de la ddm corresponde a los contenidos del curso que está siguiendo y no a aquellos contenidos que deberían ser, no obstante la denominación.

Por el mismo motivo, en los cursos de tipo E abundan docentes no del tipo I y el estudiante - docente que frecuenta el curso no sabe, al final, que existe una ddm haciendo coincidir lo que está escuchando con los contenidos de la ddm.

A este punto consideramos que sea necesario en futuro un análisis científico más detallado, porque la confusión reina soberana. Mientras que en un curso universitario de álgebra elemental se sabe con certeza cuál es el contenido que se espera (grupos, anillos, el campo de los números complejos, anillos euclidianos, polinomios, extensiones, o cosas similares, más o menos), en un curso universitario de ddm domina en absoluto la casualidad, dependiendo de la tipología del docente que lo dirigirá y de sus elecciones.

Del todo análoga la situación de los cursos E para docentes en servicio en los cuales, a complicar más las cosas, puede aparecer como docente la tipología IV. Falta, en ocasiones, una consciencia crítica frente a esta situación también entre los directores escolares y no sólo entre los alumnos - docentes únicamente.

En nuestra experiencia, hicimos desde el inicio la elección de enseñar, tanto en los cursos universitarios destinados a docentes en formación inicial, como en los cursos para docentes en servicio, la ddm delineada en precedencia, aquella que llamamos “epistemología del aprendizaje de la matemática”, partiendo de la teoría de las situaciones por motivos fundacionales y cronológicos, distinguiendo fuertemente el nivel escolar en el cual los futuros docentes y los docentes en servicio se encuentran o se encontrarán



a actuar como profesionales de la educación; y nos centramos siempre en ejemplos concretos de enseñanza - aprendizaje, haciendo referencia a temáticas matemáticas que sabemos llevan con sí dificultades específicas de aprendizaje. En algunos casos preparamos específicamente docentes no universitarios en matemática y en ddm para poder dictar cursos a docentes en servicio y conducir laboratorios en los cursos universitarios para docentes en formación inicial.

## **5. El Saber**

No queremos asumirnos la responsabilidad de afirmar cual es el “verdadero” o el “correcto” contenido en ddm que pueda ser calificado como base constitutiva del Saber en el triángulo de la didáctica de la ddm; pero, nos parece que existen ejemplos de una tal variabilidad de dar la impresión de ser excesiva. Un acuerdo sobre este punto podría ser oportuno, pero siempre debería ser tomado sobre la base de los resultados de la investigación.

Como ya tuvimos oportunidad de decirlo, el Saber, al cual se está haciendo referencia, según sea el tipo el docente, puede contener:

matemática, en el mayor número de casos conexas con aquella que el docente (futuro o actual) deberá enseñar en la propia clase; pero no está dicho, tenemos muchos ejemplos que dicen lo contrario: a veces se enseña en los cursos para docentes una matemática que, aún reconociéndole un interés cultural, nada tiene que ver con las temáticas que constituyen los contenidos de la actividad en aula;

matemática elemental, es decir un análisis de la matemática en clave histórica y epistemológica, análisis que consideramos muy útil para entender mejor la matemática sin dejar de ser matemática;

en esta queremos incluir, forzando un poco las cosas, la divulgación de la matemática (este tema lo retomaremos dentro de poco);

problemáticas relacionadas con la enseñanza de la matemática, revisión o propuestas curriculares, análisis de los contenidos de indicaciones y de programas, instrumentos para la enseñanza, en resumen todo aquellos que en D'Amore (1999) se llama didáctica A, en el sentido de *Ars docendi*;

problemáticas que tienen que ver más precisamente con el aprendizaje de la matemática o con el no aprendizaje, a las cuales hicimos referencia precedentemente; la podemos llamar epistemología del aprendizaje de la matemática o, siguiendo D'Amore (1999), didáctica B, en el sentido que históricamente siguió a la A, a partir de los años '80;

discursos genéricos o de carácter general que ni siquiera hacen referencia a la matemática o a su didáctica en la acepción que nosotros le hemos asignamos.

Algunas variaciones que aparecen en los cursos para docentes en formación inicial o en servicio son las siguientes:

la divulgación matemática, en particular en cursos para docentes en servicio de secundaria; con esta elección se entiende sugerir actividades de enseñanza - aprendizaje que den sentido a la matemática que el estudiante debe (debería) aprender; por ejemplo, para mostrar donde se encuentra la matemática que los estudiantes estudian, o los ámbitos donde se aplican los argumentos objeto de estudio;

argumentos de cultura matemática pero en contextos extra-matemáticos, como en el arte figurativo, en la literatura, en la

poesía, en el cine, en el teatro, con el fin de ofrecer al docente, en particular al docente de secundaria, algunas ideas que le permitan reconquistar el interés de aquellos estudiantes que se alejan con rencor de nuestra disciplina no reconociéndole su presencia en aquellas otras que declaran amar mucho más;

argumentos de historia y de epistemología de la matemática con el fin de explicar el sentido profundo que tiene la matemática, en su evolución histórica - crítica, privilegiando nuevamente la escuela secundaria ya sea por su peculiaridad ya sea porque las dificultades y el desamor hacia la matemática se desarrollan y se agudizan en la adolescencia (después de los 15 años) y no en la niñez.

Por todo lo condensado en las pocas líneas de este párrafo, quedamos convencidos de la óptima elección de contenidos que, por lo menos sobre la carta, determinaban en Italia las viejas SSIS (escuelas de especialización para la enseñanza secundaria) para la formación de los docentes de secundaria; naturalmente, siendo un curso de carácter post grado, la tipología del docente podía ser I o II o III.

## **6. La transposición didáctica; el saber aprendido y su uso profesional**

Determinado el contenido del vértice Saber de nuestro nuevo triángulo de la didáctica de la ddm, queda por fijar el significado, en este caso, de la transposición didáctica. Parece ingenuo, pero pensamos, en primera instancia, que no sea muy diferente del análogo, bien conocido y clásico triángulo de la ddm; pero sobre esto se deberá indagar mejor y en forma mucho más científica.

En el caso de los cursos universitarios para la formación de los futuros docentes de escuela primaria, se debe tener en cuenta que, en relación con el saber matemático que ellos tienen a disposición, no se puede confiar en supuestos conocimientos de los estudiantes en matemática porque la experiencia nos enseña que las cosas no son así; la obsolescencia matemática evidenciada por tantos investigadores afecta al estudiante al final de la escuela secundaria superior: lo que él recuerda, si recuerda algo, es lo que aprendió en la escuela primaria (no siempre de forma correcta), de la secundaria quedan sólo vagas e imprecisas palabras que no tienen sustancia de contenidos. Por esto aprobamos el hecho que, en los cursos universitarios de formación de los futuros docentes de escuela primaria, sea previsto un amplio espacio para analizar varias nociones de base de matemática. Esto no quita que esperamos que el docente universitario que tiene la tarea de desarrollar el curso de ddm, trate en verdad argumentos de ddm, es decir cumpla una transposición didáctica del Saber de ddm que la comunidad, la historia, la investigación ha construido, para transformarlo en un saber de enseñar a sus estudiantes, docentes en formación inicial de la escuela primaria.

En el caso de los cursos universitarios para la formación de los futuros docentes de secundaria cambia poco, si no que estos estudiantes tienen el título en matemática o por lo menos han seguido cursos universitarios de matemática, y que enseñaran en la escuela secundaria. En lugar de enseñar a hacer operaciones en columna o a calcular áreas de trapecios, deberán enseñar el teorema de Pitágoras, las derivadas, a demostrar los teoremas de Euclides y determinar la ecuación de la parábola. No cambia mucho: se debe verificar la competencia matemática, también gracias a la historia y a la epistemología, pero, después, tener cursos denominados ddm que contengan en verdad contenidos de ddm que, para estos docentes, serán en verdad un instrumento útil, irrenunciable, para tener éxito en el aprendizaje en el aula. El docente universitario a

quien se le confió la tarea de tratar el curso de ddm debería cumplir una transposición didáctica muy eficaz, pensando en un saber de enseñar lleno de referencias reales al aula, de forma tal que, al final, el saber (de ddm) adquirido por sus estudiantes constituya un instrumento profesional precioso.

En el caso de los cursos de formación en servicio para docentes de matemática, se debe tener en cuenta el hecho que son muchos los docentes que conocen (bien) lo que enseñan. Sin embargo están presentes docentes de primaria que confiesan nunca haber seguido cursos de matemática propiamente dichos durante su preparación docente; y docentes de secundaria que declaran explícitamente haber perdido por el camino los contenidos aprendidos en los cursos universitarios (hecho denunciado por Felix Klein quien declaraba inútil el “paréntesis universitario” para los futuros docentes de matemáticas). Algunos docentes de escuela primaria confiesan que su Saber de referencia es nada menos aquel que enseñan. Algunos de ellos, además, declaran no conocer la historia de la disciplina, de ignorar que la matemática tenga una epistemología. Esto lleva a algunos docentes a atrincherarse detrás de mecanismos formales a los cuales reducen la matemática enseñada y pretendida, encontrándose sin armas frente a las solicitudes de los estudiantes en dificultad.

## **7. La investigación en aula**

El nacimiento de núcleos de investigación didáctica (NRD) dentro de los departamentos de matemática de las universidades italianas favoreció la relación entre el mundo universitario de la investigación y la actividad en aula, aclarando al investigador universitario cuales son las problemáticas más sentidas por los profesores; además, permitió a varios docentes (de todos los niveles

escolares), a los más sensibles y con mejor preparación, el ingreso al mundo de la investigación. Como caso particular, el NRD de la Universidad de Bologna creó en los años '80 un específico grupo de docentes (grupo de investigación y experimentación en didáctica y divulgación de la matemática, RSDDM) que aunaba aquellos docentes quienes más que hacer investigación buscaban llevar a cabo experimentaciones controladas científicamente, así como aprender el abc de la divulgación.

La investigación nacional dio frutos rápidamente en toda Italia, haciendo que en campo internacional se conociera una particular escuela italiana de investigación en ddm; el papel de los docentes del nivel pre-universitario, en la investigación, se reveló decisivo, para evitar aquello que sucedió en otros países, en los cuales la investigación quedó desvinculada de la realidad escolar; las experimentaciones (que en muchas ocasiones siguen las investigaciones) condujeron a nuevas convicciones que hoy encontramos en toda la Península creando ejemplos de buenas prácticas (Sbaragli, 2011).

Las publicaciones de investigaciones o de experimentaciones, las revistas, los libros, los congresos, los seminarios, las ocasiones de encuentro y de discusión son centenares durante el año; no cubren la totalidad de las exigencias como lo hemos dicho, pero en honor de la verdad son muchísimas. Nos sorprende siempre el hecho que, en cursos para docentes en servicio, muchos de los presentes declaren de no haber nunca escuchado hablar de todo esto.

Tanto para hacer algunos ejemplos que tienen que ver con nuestro grupo de investigación y de experimentación, para responder a las solicitudes de los docentes sobre matemática, historia, epistemología, cultura y didáctica, nos dedicamos a la redacción de un proyecto completo de enseñanza y de aprendizaje cuyos autores son, en su mayoría, los mismos docentes de educación básica que pertenecen al grupo (véase D'Amore, Fandiño Pinilla, Sbaragli, 2011); a este proyecto hacen de corolario decenas de artículos y libros considerados como soporte para los docentes; señalamos sólo

el último en orden de publicación D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, 2013) que aborda el siempre complejo tema de la semiótica en aula. Nuestro sitio ([www.dm.unibo.it/rsddm](http://www.dm.unibo.it/rsddm)) recibe cada día un gran número de visitas, ya sea por las noticias que se publican como por el material que puede ser descargado tanto en forma de artículos como en forma de reseñas de experimentación.

Nuestro congreso nacional anual de difusión de los resultados de investigación, *Incontri con la matematica* (Encuentros con la matemática), es uno de los más conocidos y frecuentados (además del sitio precedente, puede visitarse también [www.incontriconlamatematica.org](http://www.incontriconlamatematica.org) y [www.incontriconlamatematica.net](http://www.incontriconlamatematica.net)).

Todo esto demuestra la intensa voluntad de crear puentes entre investigación y la vida cotidiana en aula y por tanto, en particular, la necesidad de entender siempre mejor como funciona la didáctica de la ddm.

## **8. Considerar una didáctica de la ddm abre un nuevo campo de investigación**

Como vimos, existen fuertes analogías entre los primeros elementos, apenas esbozados y analizados, de la didáctica de la ddm y la ddm; pero también grandes diferencias. Subrayamos algunas reflexiones elementales que, obviamente, en algunos puntos nos obligarán a repetirnos.

Saber. Ciertamente el Saber está fuertemente diferenciado; en ddm, una vez fijado el nivel escolar de referencia, más o menos, hechas las debidas pero mínimas excepciones, se sabe cual es el Saber al cual se hace referencia; existe un Saber institucionalizado al cual el docente puede/debe hacer referencia (se puede basar en indicaciones nacionales, programas, tradiciones, acuerdos entre

docentes, ...). Mientras que en didáctica de la ddm, el Saber es de diversos tipos, es más, una discusión entre expertos sobre tales contenidos aún no se ha real y conscientemente afrontado.

Estudiante. La tipología de estudiante es numerosa, como lo indicamos en precedencia, y los resultados sorprendentemente diversos. En el triángulo de la ddm el estudiante es un joven aprendiz que no sabe, que se sabe que no sabe, que tiene el derecho de no saber, que está en aula no por una elección personal sino por una obligación social. Los estudios de los últimos 40 años nos han permitido conocer con mucha nitidez qué es lo que el estudiante hace, qué es lo que cree estar haciendo y lo que cree *deber* hacer. Pero en el triángulo de la didáctica de la ddm, cambia todo. El estudiante es un adulto, por lo general es un profesional que, a rigor, debería ya conocer: la relación entre él y el Saber cambia. Si en la ddm el estudiante no accede directamente al Saber sino sólo a través de la mediación del docente, en la didáctica de la ddm debería haber un acceso directo, pero no siempre lo hay ¿Por qué?

Docente. En el triángulo de la ddm, el docente está más o menos definido, la teoría de las situaciones nos enseñó a definirlo. Sabemos como actúa en aula y como debería actuar funcionar, sabemos cuales son sus expectativas, su capacidad de interpretar las cosas. Desde hace algún tiempo aprendimos a evaluar la influencia que tienen sus convicciones personales sobre su propio proceso de enseñanza y por tanto sobre el aprendizaje de sus estudiantes, como muchas investigaciones lo han demostrado (reenviamos a D'Amore, 2004, 2006; D'Amore, Fandiño Pinilla, 2004). Pero en el triángulo de la didáctica de la ddm el docente es un personaje multiforme, aún todo de estudiar.

Transposición didáctica, ingeniería didáctica, diferencia entre saber enseñado y saber aprendido,... y todos los otros temas de base, aquellos con los cuales se dio inicio a nuestra aventura de



investigadores (aunque algunos tienden a olvidarlo), son de estudiar desde sus raíces en esta nueva hipótesis, deben ser entendidos e interpretados bajo esta nueva interpretación.

El estudiante de educación básica (el objeto de estudio de la ddm) sigue los cursos, llega al añorado suficiente, pero después demuestra de olvidar todo lo que ha “aprendido” y que de hecho había aprendido, dado que lo ha usado en contextos diversos y de forma autónoma.

El docente en formación inicial sigue los cursos, incluso se entusiasma, pero después demuestra de no desear o de no saber aplicar, por ejemplo en las horas de práctica en aula, lo que aprendió en ddm. Por ejemplo, se entusiasma casi siempre con la metodología que ve aplicar en las horas de práctica de su docente guía, incluso cuando debería advertir que existe una fuerte discrepancia entre lo que aprendió durante las horas de ddm y tal metodología. Lo mismo vale para la matemática y no sólo para la ddm; el estudiante - docente en formación inicial aprendió en el curso de matemática que una cierta imagen es una concepción, la ve favorecer en el aula en las horas de práctica y no se da cuenta; la “culpa” del fracaso sucesivo de los estudiantes se atribuye a la incapacidad del estudiante y no al error didáctico y de contenido del docente guía.

Peor aún, el estudiante - docente en formación inicial que sigue un curso de ddm, no logra considerar los contenidos como instrumentos, como útil herramienta metodológica que deberá y podrá usar en futuro para mejorar su análisis de la situación de aula y favorecer así el aprendizaje correcto de la matemática por parte de sus futuros estudiantes; sino que la considera como una disciplina, una materia que debe estudiar para superar el relativo examen. Lo cual implica, como ya lo habíamos dicho, la obsolescencia. Cuando este ex docente en formación inicial será finalmente docente en servicio no recordará ni siquiera cuáles eran los contenidos que aprendió en el curso, así como sucederá para

otros cursos que no tenían la intención de ser básicos para su profesión sino sólo culturales.

El docente en servicio que sigue un curso de formación en ddm por lo general se entusiasma por los contenidos propuestos, porque reconoce que son concretos: los ejemplos propuestos son aquellos mismos que él encuentra en aula, hasta ese momento inexplicables y que finalmente encuentran una explicación lógica en términos de “situación de aula”, aquella estudiada por la ddm. Pero, al final del curso, parece remover aquello que aprendió, retomando el comportamiento anterior, en su rutina cotidiana como docente, culpabilizando a los estudiantes de todo aquello que no funciona, de cada diferencia entre sus expectativas personales y las respuestas o comportamientos obtenidos.

¿Todos estos comportamientos diversos tienen un mismo origen? O ¿son cuestiones del todo diversas? Nos lo dirá la investigación futura.

En la teoría clásica de las situaciones, la cual estamos tomando como modelo de base de forma explícita, encontramos dos temas fuertes que han dominado la escena de la construcción de la ddm en los '80 y en los '90, la idea de noosfera y la idea de *milieu*. A partir de dos textos clásicos de Brousseau a los cuales se hace siempre referencia (1986a, b), dichos conceptos se han interpretado con el pasar del tiempo de diversas formas por cada uno de los Autores que lo han abordado.

A propósito de noosfera, citamos con gran entusiasmo dos autores de prestigio.

Las palabras siguientes son de Yves Chevallard y fueron tomadas de Chevallard (1988): «El punto de partida de nuestro análisis (...) puede hacer referencia al siguiente esquema. El objeto del discurso sometido a examen es (aquí) el *sistema de enseñanza*. El discurso mismo es el resultado, no del sistema de enseñanza interno, sino desde un punto situado en su periferia, en una zona intermedia

entre sistema de enseñanza y sociedad, que yo llamo la *noosfera* (“la esfera en la cual se piensa” - donde se piensa sobre el sistema de enseñanza se entiende). Es un área en la cual se encuentran todos aquellos que “se interesan” en el sistema de enseñanza más allá del estrecho cumplimiento del acto de enseñar mismo: docentes, miembros de los IREM, investigadores de todo tipo (entre los cuales figuran, naturalmente, los estudiosos de didáctica)».

Las siguientes palabras se inspiran en un escrito de Juan Godino (1993); según este autor, por *noosfera* se puede entender el lugar de los debates de ideas significativas sobre la enseñanza, las finalidades de la escuela, los objetivos de la formación, las expectativas de la sociedad en relación con la escuela y la cultura (por ejemplo los programas o indicaciones ministeriales); la *noosfera* es el intermediario entre sistema escolar (y las elecciones del docente) y el ambiente social más externo (externo a la escuela); se podría pensar como «la capa externa que contiene todas las personas que en la sociedad piensan en los contenidos y en los métodos de enseñanza» (Godino, 1993).

De otra parte se habla de *medio* o *ambiente* (en francés: *milieu*) como de aquel sub-sistema con el cual tiene que actuar directamente al alumno (materiales, juegos etc.). Este *milieu* es definido al inicio como el conjunto de todo aquello que influye sobre el estudiante y todo aquello sobre lo cual el alumno actúa (Brousseau, 1977). Se puede pensar a la interacción entre estudiante y *milieu*, también en ausencia de una concreta participación del docente. A veces el *milieu* está definido sobre la base de objetos concretos, a veces se le agrega la intención por la cual estos objetos fueron elegidos, otras veces es considerada como algo estable, en ocasiones es algo que se desarrolla y se modifica junto con el estudiante. Aún, en medio de las variaciones de acepción de este término, como consecuencia del proceso de desarrollo de toda la teoría, aparece muy bien definida la función:

este sirve para definir, al interior del sistema didáctico, aquella parte ligada a usos específicos adidácticos predispuestos sí por el docente, por tanto con objetivos didácticos, pero sin la presencia necesaria y constante de dichos objetivos (por ejemplo, sin la participación directa del docente).

Una descripción de la evolución del concepto de *milieu*, se puede encontrar en Perrin-Glorian (1994).

Sobre noosfera y *milieu* se puede hacer referencia a Artigue, Gras, Laborde, Tavnnot (1994) y a D'Amore (1999, 2003). Pero aquí estos objetos los estamos entendiendo en la acepción clásica, es decir, relativa a la ddm; ¿cómo re-interpretar estos conceptos para la didáctica de la ddm?, es para nosotros, un problema de investigación abierto.

## **9. La formación autónoma como investigación sobre la enseñanza - aprendizaje.**

En Da Ponte (2009) se narra de la conformación en Portugal de un grupo de estudio autónomo formado por docentes de matemática de diversos niveles escolares con el fin de proponer soluciones a problemas de carácter didáctico, contingentes y concretos.

Esta es una vía que cada día encuentra más seguidores en otros Países, estudiada en sus detalles funcionales a partir de la prehistoria del llamado “docente - investigador” de Stenhouse (1975), hasta el análisis mucho más detallada de Zeichner y Nofke (2001).

En Italia los ejemplos análogos existen pero no son muchos; uno cercano a nuestra experiencia y de gran impacto y eficacia se narra en el artículo de investigación Campolucci, Fandiño Pinilla, Maori, Sbaragli (2006) y después en el libro de difusión Campolucci, Fandiño Pinilla, Maori (2011).

Dos investigadoras universitarias expertas en ddm fueron contactadas por un grupo de docentes en servicio constituido espontáneamente con una precisa demanda didáctica (la enseñanza - aprendizaje de las fracciones), y no por un genérico curso; el grupo siguió las indicaciones de las dos investigadoras, en un primer momento, y se hizo un estudio del argumento desde un punto de vista disciplinar (las fracciones en particular y los números racionales en general), después se analizaron los casos relevantes puestos en evidencia por los mismos miembros del grupo; estos casos llevaron a la necesidad de una confrontación; a continuación se aceptó la sugerencia de estudiar el argumento desde un punto de vista didáctico (entendido en el sentido de la epistemología del aprendizaje de la matemática) para terminar con la organización de un segmento curricular completo, discutido y concordado, sobre dicho argumento (Campolucci, Fandiño Pinilla, Maori, 2011).

Para plasmar y para dar testimonio paso a paso de las fases de la actividad de investigación, las dos investigadoras universitarias convocadas por el grupo solicitaron a los participantes redactar, en un tiempo determinado, a lo largo del curso de la actividad de estudio y de investigación, protocolos de auto-análisis del trabajo desarrollado: un testimonio sobre sus convicciones acerca de los argumentos al momento de iniciar el curso, un testimonio al final, con la puesta en evidencia en primera persona de los cambios encontrados en sus convicciones; este trabajo, re-redactado por las investigadoras y por dos miembros del grupo, constituye indudablemente un material interesante de investigación, útil para toda la comunidad (Campolucci, Fandiño Pinilla, Maori, Sbaragli, 2006).

Lamentablemente este tipo de actividad no es muy difusa en nuestro País (Italia); más que jugar en primera persona las propias cartas profesionales, muchos docentes prefieren creer y esperar en el curso impartido por otros, como lo manifestamos en precedencia, para después hacer caso omiso. Naturalmente existen realidades de

grupos de estudios autónomos, esporádicos y no siempre intensamente activos; estos nacen, por lo general, después de un curso que tuvo gran interés entre los participantes.

## 10. Conclusiones

Consideramos haber enfatizado una problemática concreta y vital, hasta ahora poco o nada estudiada; sabemos que la ddm es la más avanzada entre las didácticas disciplinares, que ha dado una gran contribución en la creación de una teoría de las didácticas disciplinares (citamos, sólo como ejemplo: D'Amore, Fandiño Pinilla, 2007) y que ha tendido puentes de gran interés teórico entre la didáctica general y la didáctica disciplinar (D'Amore, Frabboni, 1996, 2005).

Sabemos que la ddm es tomada como modelo para la creación, aún en curso, de otras didácticas disciplinares, algunas de las cuales aún no despegan como ciencias, menos aún como disciplinas.<sup>1</sup>

Pero nada debe impedir, a quien tiene las alas, de volar; nuestra ddm está lista para afrontar investigaciones siempre más sofisticadas, cuya realización nos dará siempre más, sobre este complejo y por lo tanto fascinante mundo.

## Referencias bibliográficas

Artigue M., Gras R., Laborde C. & Tavignot P. (Editores) (1994), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

---

<sup>1</sup> Sobre el significado que hoy se le da a la palabra “ciencia” en esta dirección, se puede ver D'Amore (2007), en el vocablo “ciencia”, precisamente.

- Brousseau G. (1977); entre 1970 y 1973 Guy Brousseau publicó diversos artículos en los cuadernos del IEM de Bordeaux que tenían el nombre de: «Compte-rendu du séminaire de recherches 1971-72 et projets pour 1972-73»; después, estas publicaciones siguieron hasta 1978. Nosotros hacemos referencia aquí a una de estas publicaciones de uso interno, el número 18, en la versión editada en Barcelona en 1977.
- Brousseau G. (1986a). La relation didactique : le milieu. *Actas del IVème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques*. 54-68. IREM París 7.
- Brousseau G. (1986b). Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7, 2, 33-115.
- Campolucci L., Fandiño Pinilla M.I., Maori D. (2011). *Frazioni*. Proyecto: *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*. Vol. 8. Bologna: Pitagora.
- Campolucci L., Fandiño Pinilla M.I., Maori D., Sbaragli S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. *La matematica e la sua didattica*. 3, 353-400.
- Chevallard Y. (1988). *Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation*. Irem d'Aix-Marseille, 14.
- D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [D'Amore B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio].
- D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Bologna: Pitagora. [D'Amore B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matematica*. México DF, México: Reverté-Relime].
- D'Amore B. (2004). El papel de la epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria. *Epsilon*. [Cádiz, España]. 60, 20, 3, 413-434.

- D'Amore B. (2006). Didattica della matematica "C". En: Sbaragli S. (Editora) (2006). *La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno*. Actas del Congreso Internacional homónimo, Castel San Pietro Terme (Bo), 23 septiembre 2006. Roma: Carocci. 93-96.
- D'Amore B. (2007). Voz para el diccionario: Frabboni F., Wallnöfer G., Belardi N., Wiater W. (Editores) (2007). *Le parole della pedagogia. Teorie italiane e tedesche a confronto*. Turín: Bollati Boringhieri. Voces: Didattica disciplinare (pagg. 72-75), Formazione in scienze naturali (pagg. 140-142), Formazione in matematica (pagg. 145-147), Scienza (pagg. 335-337). [Existe una versión en idioma alemán].
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2002). Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica". *Educación Matemática*. México DF, México. 14, 1, 48-61.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de matemática de la escuela secundaria superior. *Epsilon* [Cádiz, España]. 58, 20, 1, 25-43.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2007). *Le didattiche disciplinari*. Prefación de Franco Frabboni. Trento: Erickson.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Iori M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Trento: Erickson.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Sbaragli S. (Editora) (2011). *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*. Proyecto de enseñanza - aprendizaje de la matemática en la escuela primaria en 14 volúmenes. Bologna: Pitagora.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I., Marazzani I., Sarrazy B. (2010). *Didattica della matematica. Alcuni effetti del "contratto"*. Prefación y postfación Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri.



- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson. [D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sbaragli S. (2010). *La didáctica y la dificultad en matemática*. Bogotá: Magisterio].
- D'Amore B., Frabboni F. (1996). *Didattica generale e didattiche disciplinari*. Milán: Angeli.
- D'Amore B., Frabboni F. (2005). *Didattica generale e didattica disciplinare*. Milán: Bruno Mondadori.
- D'Amore B., Sbaragli S. (2011). *Principi di base della didattica della matematica*. Progetto: *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*. Vol. 2. Bologna: Pitagora.
- Da Ponte J.P. (2009). Far ricerca sulla nostra pratica: una strategia di formazione e di costruzione della conoscenza professionale. *La matematica e la sua didattica*. 23, 2, 157-189.
- Dozza L. (2006). *Relazioni cooperative a scuola. Il lievito e gli ingredienti*. Trento: Erickson.
- Ellerani P. (2012). La sfida della Didattica: trasformare le classi in contesti di apprendimento continuo per formare competenze e capitale sociale. En: Bolondi G., Fandiño Pinilla M.I. (Editori) (2012). *Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica*. Nápoles: Edises.
- Fandiño Pinilla M.I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora. [Fandiño Pinilla M.I. (2006). *Currículo, evaluación y formación docente en matemática*. Bogotá: Magisterio.
- Fandiño Pinilla M.I. (2005). *Frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora. [Fandiño Pinilla M.I. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Magisterio. Prefazione di Athanasios Gagatsis. Prefazione alla edizione in lingua spagnola di Carlos Eduardo Vasco Uribe].

- Fandiño Pinilla M.I., Sbaragli S. (2011). *Matematica di base per insegnare nella scuola primaria*. Proyecto: *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*. Vol. 1. Bologna: Pitagora.
- Godino J. (1993). La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática. *Quadrante*. 2, 2, 69-79.
- Martini B., Sbaragli S. (2005). *Insegnare e apprendere la matematica*. Nápoles: Tecnodid.
- Perrin-Glorian M.-J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. En: Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavinot P. (Editores) (1994), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble, La Pensée Sauvage. 97-147.
- Sbaragli S. (editora) (2011). *Buone pratiche d'aula*. Bologna: Pitagora.
- Sbaragli S. (2012). Il ruolo delle misconcezione nella didattica della matematica. En: Bolondi G., Fandiño Pinilla M.I. (Editores) (2012). *Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica*. Nápoles: Edises.
- Stenhouse L. (1975). *An introduction to curriculum research and development*. Londres: Heineman Educational.
- Zan R. (2007). *Difficoltà in matematica*. Milán: Springer.
- Zeichner K., Nofke S. (2001). Practitioner research. En: Richardson V. (editores) (2001). *Handbook of research on teaching*. Washington: AERA. 298-330.

### **Agradecimientos**

Los Autores expresan públicamente el agradecimiento a los anónimos lectores quienes evidenciaron carencias y dieron sugerencias de modificaciones a las versiones precedentes del texto, dando una gran contribución para mejorar el trabajo.

Agradecemos a los colegas Giorgio Bolondi y Silvia Sbaragli por la revisión crítica de los contenidos.