

Riflessioni sui fondamenti teorici della ricerca in didattica della matematica nella sua complessità e problematicità

Maura Iori

NRD dell'Università di Bologna

Abstract. *There are many theories that nourish the research in mathematics education, and that research in turn nourishes, develops and produces in order to address the issues that mathematics teaching-learning raises at all school levels. Each of them provides specific analysis methods and tools to deal with certain aspects of mathematics education that others cannot provide. Hence the complexity of the research. On the other hand, multiple theories inevitably lead researchers to address the problem of their connection in relation to research problems that require a more specific articulated analysis, with different methodologies and tools. Hence the problematic nature of the research. This paper provides an overview of these issues and how the diversity of theoretical approaches is addressed and regarded as a resource for the research in mathematics education, and thus for teaching-learning mathematics.*

Keywords: mathematics education research; theories; principles; methodologies; research questions; development of theories; networking strategies

Sunto. *Numerose sono le teorie che alimentano la ricerca in didattica della matematica, e che la ricerca a sua volta alimenta, sviluppa e genera per far fronte ai problemi che l'insegnamento-apprendimento della matematica solleva a tutti i livelli scolastici. Ciascuna di esse fornisce metodi e strumenti di analisi specifici per trattare determinati aspetti della didattica della matematica che altre non possono fornire. Da qui la complessità della ricerca. D'altra parte, la molteplicità di teorie porta inevitabilmente il ricercatore a porsi il problema della loro connessione, in relazione a un problema di ricerca che richiede un'analisi più specifica e articolata, con diverse metodologie e strumenti. Da qui la problematicità della ricerca. Questo contributo fornisce una panoramica su tali aspetti e su come la diversità tra gli approcci teorici venga gestita e considerata come una risorsa per la ricerca in didattica della matematica, e dunque per l'insegnamento-apprendimento della matematica.*

Parole chiave: ricerca in didattica della matematica; teorie; principi; metodologie; domande di ricerca; sviluppo di teorie; strategie di connessione

1. Introduzione

L'insegnamento-apprendimento della matematica si manifesta in molteplici aspetti che non possono essere studiati, descritti, compresi o spiegati mediante

un'unica teoria. Numerosi sono dunque gli approcci alla ricerca in didattica della matematica. Essi si fondano su teorie differenti che si contraddistinguono per le diverse interpretazioni dei ruoli attribuiti agli aspetti cognitivi, epistemologici, socioculturali, semiotici che emergono dalle attività di insegnamento-apprendimento. Una loro connessione all'interno di uno studio di ricerca può dunque aumentarne il potere descrittivo, esplicativo, nonché di controllo e di previsione.

Le teorie in didattica della matematica costituiscono un corpo di conoscenze sull'insegnamento-apprendimento in continua evoluzione; esse si sviluppano o modificano a causa degli stessi risultati di ricerca e dei contributi di discipline differenti: pedagogia, psicologia, sociologia, epistemologia, filosofia, didattica generale, linguistica, semiotica, neuroscienze, per citarne alcune. Da qui la complessità della ricerca in didattica della matematica. D'altra parte, quando un fenomeno viene letto e interpretato alla luce di teorie differenti, e le varie interpretazioni vengono tra loro confrontate, la ricerca manifesta anche tutta la sua problematicità, in quanto i principi su cui si fondano le diverse teorie non sono sempre tra loro compatibili.

Chi si occupa di ricerca in didattica della matematica o vuole semplicemente aggiornarsi sui suoi risultati non può dunque fare a meno di strumenti per riconoscere e gestire le somiglianze e le differenze tra le teorie, per rendere più profonde le osservazioni, le interpretazioni e le analisi di quel che succede in aula, nelle ore di matematica, e dunque gestire le situazioni d'aula in modo più efficace con le diverse metodologie di insegnamento che la ricerca scientifica mette a disposizione o che la comunità scientifica riconosce come valide.

2. Che cosa intendiamo per “teoria” (scientifica)

Non abbiamo qui la pretesa di fare un discorso epistemologico generale, riguardo alle teorie scientifiche; non è infatti questo il nostro scopo. Vogliamo invece spingerci di più verso la didattica della matematica, trattando l'argomento alla luce di alcuni Autori di questo mondo che hanno cercato di fare chiarezza sulla questione.

In *Le Parole della Pedagogia: Teorie Italiane e Tedesche a Confronto*, alla voce “scienza” si trova: “Il termine ‘teoria scientifica’ o ‘scienza’ è generalmente riservato a ogni rappresentazione (simbolica, astratta, scritta) condivisa, coerente e plausibile, di un insieme di fenomeni tra loro correlati da relazioni causali, descrivibili, significative (causa-effetto, deduzione, induzione ecc.)” (D'Amore, 2007, p. 335).

Si utilizza inoltre il termine “paradigma” (Kuhn, 1962) per indicare l'insieme delle teorie, delle leggi e degli strumenti che definiscono una tradizione di ricerca. In altre parole, il termine “paradigma” si utilizza per indicare una visione globale del mondo su cui indaga la comunità di scienziati

di una determinata disciplina e che indirizza, in un dato periodo storico, la ricerca riguardo alla scelta dei fenomeni o problemi rilevanti da studiare, alla formulazione delle ipotesi e ai metodi di ricerca.

Per Thomas Kuhn (1922 – 1996) un importante aspetto dei paradigmi è la loro *incommensurabilità*: due paradigmi non possono cioè essere confrontati, in quanto le assunzioni o i concetti che sono parti integranti dei rispettivi paradigmi e coerenti all'interno di essi risultano complessivamente incompatibili. La *scienza normale* corrisponde a quei periodi in cui esiste all'interno di una disciplina un paradigma condiviso dagli scienziati. Il passaggio da un paradigma a un altro avviene soltanto dopo una crisi di un paradigma, e costituisce per Kuhn una vera e propria *rivoluzione (scientifica)*.

Imre Lakatos (1922 – 1974) introduce invece l'idea di “programma di ricerca” (Lakatos, 1970), cioè di:

una successione di teorie scientifiche collegate tra loro in uno sviluppo continuo, contenenti regole metodologiche di ricerca (sia in positivo, da seguire, sia in negativo, da evitare). Ogni programma deve contenere: un nucleo o centro del programma; un sistema di ipotesi ausiliarie; una euristica, cioè i procedimenti che si applicano alla risoluzione dei problemi. In questa successione, una nuova teoria si può allora considerare un progresso rispetto a una precedente se: fa predizioni che la precedente non era in grado di fare; alcune di tali predizioni si possono provare come vere; la nuova teoria spiega fatti che la precedente non poteva provare. (D'Amore, 2007, p. 335)

In particolare, nelle scienze umane una teoria si dice “scientifica” se dispone di un oggetto specifico di studio, un suo proprio metodo di ricerca e un suo specifico linguaggio condiviso.

In questa direzione Thomas A. Romberg, alla fine degli anni ottanta, per definire le caratteristiche peculiari di una teoria scientifica consolidata e stabile affermava che:

- deve esistere un insieme di ricercatori che dimostrino interessi in comune; in altre parole ci devono essere problematiche centrali e condivise che guidano il lavoro dei ricercatori;
- le spiegazioni date dai ricercatori devono essere di tipo causale;
- il gruppo dei ricercatori deve aver elaborato un vocabolario e una sintassi comune, sulla quale il gruppo è d'accordo;
- il gruppo deve aver elaborato procedimenti propri per accettare o refutare gli enunciati in un modo considerato da tutti oggettivo e largamente condivisibile. (D'Amore, 2007, pp. 336–337)

Le teorie in didattica della matematica hanno tutte queste caratteristiche.

Per quanto sopra riportato, una *teoria in didattica della matematica* può essere concepita come una rappresentazione condivisa, coerente e plausibile, di un insieme di fenomeni (di insegnamento-apprendimento della matematica) tra loro correlati da relazioni causali, basata su assunzioni o principi condivisi da un gruppo di ricercatori, in un dato periodo storico e in un dato contesto

culturale e sociale, che hanno interessi comuni e per i quali esistono problematiche considerate centrali e condivise.

Le teorie possono essere distinte a seconda dei principi che le caratterizzano, dei problemi sui quali si focalizzano, degli scopi che perseguono, dei loro modi di concepire la ricerca e i metodi di ricerca. In ogni caso, ogni teoria attinge a differenti discipline costituendo un corpo di conoscenze in continuo accrescimento, insieme alla ricerca stessa. Prediger, Bikner-Ahsbahs e Arzarello (2008) considerano le teorie come:

sistemi di concetti e relazioni, basati su assunzioni e norme. Esse sono costituite da un nucleo, da componenti empiriche, e dalla loro area di applicazione. Il nucleo include i fondamenti di base, le assunzioni e le norme, che vengono dati per acquisiti. Le componenti empiriche comprendono concetti addizionali e relazioni con esempi paradigmatici; esse determinano il contenuto empirico e l'utilità attraverso l'applicabilità. (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008, p. 169)¹

La loro nozione di teoria è di tipo dinamico ed è modellata, da una parte, da idee centrali, concetti e norme e, dall'altra parte, dalle pratiche dei ricercatori e degli insegnanti.

Teorie e osservazioni sono in ogni caso strettamente intrecciate le une alle altre, in modo dialettico: le teorie guidano le osservazioni e, allo stesso tempo, sono influenzate dalle osservazioni (Hanson, 1958). In altri termini, una teoria delimita i propri scopi, le proprie domande, i propri oggetti e metodi di ricerca e, allo stesso tempo, gli scopi, le domande, gli oggetti e i metodi di ogni ricerca sono carichi di teoria o di teorie.

In didattica della matematica, a seconda degli aspetti dei fenomeni di insegnamento-apprendimento sui quali si focalizza maggiormente l'attenzione – l'apprendimento, il discente, il contenuto da apprendere, l'insegnante, il contesto sociale etc. – tra le teorie alle quali si può attingere ci sono le seguenti:

- *teorie costruttiviste* nelle loro diverse varianti (Cobb, 1988; Ernest, 1991; Goldin, 1990; von Glasersfeld, 1995)
- *teoria delle situazioni didattiche* (Brousseau, 1986, 1997)
- *teoria antropologica della didattica* (Chevallard, 1992)
- *teorie socioculturali* nelle loro diverse varianti (D'Ambrosio, 1985; Radford, 1997)
- *teorie semiotiche* nelle loro diverse varianti (Arzarello, 2006; Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Duval, 1993, 1995; Godino, 2002; Godino & Batanero, 1994, 1998; Hoffmann, 2006; Sáenz-Ludlow & Presmeg, 2006)

per citarne solo alcune. In Radford (2008b) una teoria è concepita come:

¹ Tutte le citazioni in italiano di autori non italiani sono traduzioni nostre.

un modo di produrre interpretazioni e modi di azioni basati su:

- un sistema, P , di *principi fondamentali*, che includa visioni implicite e affermazioni esplicite che delincono i confini dell'universo del discorso e della prospettiva di ricerca adottata;
- una *metodologia*, M , che includa tecniche di raccolta dati e di interpretazione dei dati, sostenuti da P ;²
- un insieme, D , di *domande di ricerca* paradigmatiche (modelli o schemi che generano domande specifiche quando si presentano nuove interpretazioni o quando si approfondiscono, ampliano o modificano i principi). (Radford, 2008b, p. 330)

I principi di una teoria costituiscono un *sistema*, non un insieme, in quanto non hanno tutti lo stesso peso, cioè c'è una gerarchia che li organizza o dà loro una certa priorità.

Inoltre, per Radford (2008b) la *metodologia* è da intendere in senso ampio. Non è soltanto una prospettiva teorica generale sulla ricerca, un teoria *sui* metodi (Ernest, 1998), ma include i *metodi di ricerca* stessi, ovvero le strategie o le procedure specifiche, gli strumenti o le tecniche di raccolta e di analisi dei dati. Come afferma Radford (2008b), la metodologia deve avere due caratteristiche:

- *coerenza*, cioè deve essere compatibile con i principi scelti o basarsi su di essi;
- *operatività*, cioè deve essere in grado di produrre e trattare i dati in modo da fornire risposte "soddisfacenti" alle domande di ricerca, ovvero risposte basate su metodi statistici, interviste, analisi di discorsi, episodi di classe etc.

Sempre in questa prospettiva, le *domande di ricerca* devono essere formulate chiaramente entro l'apparato concettuale della teoria. Una domanda di ricerca presuppone sempre una prospettiva teorica entro cui esprimerla.

Così, da una parte, la scelta dei principi P influenza M (in termini di operatività e di coerenza) e D (per quanto riguarda il modo in cui le domande di ricerca sono formulate) e, dall'altra parte, la scelta di D presuppone un sistema P di principi e indirizza la scelta di M .

Ci sono però problemi, argomenti, concetti o fenomeni che non presuppongono di per sé un determinato sistema P di principi; per esempio quando la ricerca che è stata fatta su di essi è insufficiente, oppure quando le teorie esistenti risultano inefficaci, o non applicabili. In tali casi il ricercatore può (1) utilizzare le teorie soltanto come lenti orientative generali che modellano ciò che osserva e le domande di ricerca, oppure (2) generare una nuova teoria quale risultato finale di uno studio, come nel caso della *grounded*

² La raccolta dati non è qui necessariamente intesa nel senso empirico positivista delle scienze naturali; la raccolta dati può anche far riferimento a processi di produzione ermeneutici, fenomenologici, epistemologici e di altro tipo, dotando i dati di rilevanza e di senso.

theory (Glaser & Strauss 1967). In tal caso le domande di ricerca sono finalizzate alla generazione di una nuova teoria (su un processo, un'azione o un'interazione) fondata (*grounded*) sui punti di vista dei partecipanti coinvolti nello studio (Creswell, 2014).

Radford (2008a; 2011), a cui farò riferimento qui di seguito, prende in esame i principi di tre approcci di ricerca in didattica della matematica: il costruttivismo, la teoria delle situazioni didattiche e le teorie socioculturali. Lo scopo è quello di evidenziare a livello teorico le somiglianze e le differenze tra tali approcci, e chiarire alcuni temi attorno ai quali ruota anche l'attuale ricerca in didattica della matematica.

Principi del costruttivismo

- P1. La conoscenza non è ricevuta passivamente, ma costruita dal soggetto conoscente (Cobb, 1988).
- P2. La funzione della cognizione è adattiva e permette l'organizzazione del mondo dell'esperienza, non la scoperta di una realtà ontologica (von Glasersfeld, 1995).
- P3. Il soggetto conoscente non solo costruisce la propria conoscenza, ma lo fa in modo autonomo (Cobb, 1988).

Si tratta di una teoria centrata principalmente sullo studente, sul processo di apprendimento dello studente.

Principi della teoria delle situazioni didattiche (Brousseau, 1986, 1997)

- P1. La conoscenza risulta dalla soluzione “ottimale” di una data situazione o un dato problema.
- P2. L'apprendimento è – in accordo con l'epistemologia genetica di Piaget – una forma di adattamento cognitivo.
- P3. Per ogni conoscenza matematica c'è una famiglia di situazioni suscettibile di darle un senso adeguato.
- P4. L'autonomia dello studente è una condizione necessaria per un apprendimento significativo della matematica.³

La teoria delle situazioni didattiche attribuisce all'interazione sociale un ruolo rilevante, anche se “l'acquisizione di conoscenze è, in ultima analisi, il risultato della relazione personale dello studente con l'oggetto di conoscenza” (Radford, 2008a, p. 10).

³ Come evidenzia Brousseau (1986): più l'insegnante esplicita chiaramente ciò che vuole, più dice all'allievo esattamente ciò che deve fare, e più impedisce all'allievo di arrivare a un'effettiva comprensione e quindi a un apprendimento significativo. Si tratta del paradosso della *devoluzione* (Brousseau, 1986). Per *devoluzione* si intende qui il processo di responsabilizzazione con il quale l'insegnante ottiene che l'allievo si impegni personalmente nella risoluzione di un problema o, più in generale, nella costruzione della propria conoscenza.

Principi delle teorie socioculturali

- P1. La conoscenza è generata dagli individui nel corso di pratiche sociali costituite storicamente e culturalmente.
- P2. La produzione di conoscenza non corrisponde a esigenze di adattamento, ma è incorporata in forme culturali di pensiero intrecciate a una realtà simbolica e materiale che fornisce le basi per interpretare, comprendere e trasformare il mondo degli individui e i concetti e le idee che essi si formano su di essa.
- P3. L'apprendimento è il raggiungimento di una conoscenza culturalmente-oggettiva che gli studenti ottengono attraverso un processo sociale di *oggettivazione* mediato da segni, linguaggi, artefatti e interazione sociale, quando gli studenti sono coinvolti in forme culturali di riflessione e azione.

I *mezzi semiotici di oggettivazione* sono segni e artefatti che incorporano e allo stesso tempo permettono di comunicare, condividere, sviluppare, far evolvere sistemi di idee, significati culturali, forme di azione e di pensiero; essi permettono dunque la presa di coscienza soggettiva (*oggettivazione*) degli oggetti culturali (Radford, 2003).

Le teorie socioculturali costituiscono per Radford (2011) un paradigma nuovo: la conoscenza non è il risultato di strutture epistemiche che trascendono la cultura, o di un puro adattamento a-storico, ma una forma culturale di riflessione e azione incorporata nelle pratiche sociali, mediata dal linguaggio, dall'interazione sociale, da segni e artefatti (Arzarello, 2006).

Di tutt'altro tipo è invece la teoria dei registri di rappresentazione semiotica (Duval, 1993, 1995, 2006a, 2006b), sulla quale si fonda l'approccio semio-cognitivo. In essa si possono evidenziare i seguenti principi.⁴

Principi della teoria dei registri di rappresentazione semiotica

- P1. Si ha accesso agli oggetti matematici (non in sé ma come unità culturali o temi di apprendimento) solo *attraverso* (non *prima né dopo*) la produzione di rappresentazioni semiotiche.
- P2. Un oggetto matematico è un *invariante* (operatorio o logico-discorsivo) di rappresentazioni semiotiche nei cambiamenti di registro.
- P3. Ciascuna rappresentazione semiotica del medesimo oggetto matematico non esplicita le medesime proprietà dell'oggetto rappresentato, ma solo il proprio contenuto.

⁴ In quel che segue faccio riferimento anche ad alcuni aspetti che il prof. Raymond Duval ha evidenziato in alcune sue risposte a mie domande nel corso di una conversazione durata vari giorni durante un mio soggiorno a Lille nel giugno del 2013. Lo ringrazio ancora una volta per avermi dato il permesso di renderle pubbliche, con considerazioni personali.

- P4. La comprensione è nella coordinazione di registri differenti nelle attività matematiche, ovvero nella capacità di *riconoscere* un oggetto matematico nelle sue possibili rappresentazioni semiotiche; capacità che si manifesta nelle attività di *conversione* da un registro all'altro e in quelle di *trattamento* delle rappresentazioni nei rispettivi registri.
- P5. La difficoltà nel riconoscimento di un medesimo oggetto matematico in due rappresentazioni, ottenute l'una dall'altra mediante una conversione o un trattamento, si presenta quando il contenuto della rappresentazione di partenza ha poco o nulla (semanticamente o sintatticamente) in comune con il contenuto della rappresentazione di arrivo.

Si tratta di una teoria nella quale i processi di comprensione sottostanti le attività matematiche sono interpretati da un punto di vista (quello semio-cognitivo) che è completamente differente non solo dai punti di vista su cui si fondano le teorie precedenti, ma anche dal punto di vista matematico (Duval, 2012, 2015).

I principi sopra elencati permettono di evidenziare il diverso ruolo che le teorie possono svolgere nella ricerca in didattica della matematica, e dunque nell'analisi delle produzioni matematiche di studenti e insegnanti. Esse forniscono una lente che modella ciò che si osserva, le domande di ricerca, la conduzione della ricerca, l'analisi dei dati e la loro interpretazione. In alcuni tipi di studio possono modellare o rimodellare la teoria scelta inizialmente per condurre lo studio, oppure costituire il suo risultato finale, come abbiamo già detto. Il loro uso è dunque molto vario e articolato per poter interpretare i diversi aspetti dei fenomeni didattici presi in esame, e in particolare la complessità dei processi di comprensione sottostanti le attività matematiche.

3. Strategie per connettere teorie in didattica della matematica

Le teorie possono essere distinte a seconda della struttura dei loro principi o concetti di base, del tipo di oggetti o fenomeni su cui si focalizzano, delle domande di ricerca che si pongono, del tipo di risposte che considerano adeguate, del modo di vedere la ricerca, i suoi scopi e i suoi metodi, etc. La loro diversità costituisce in ogni caso una importante risorsa per comprendere e gestire la ricchezza e complessità della produzione scientifica.

Prediger, Bikner-Ahsbabs e Arzarello (2008) chiamano strategie di *networking* quelle *strategie* (linee guida generali) per mettere in relazione, per quanto possibile, teorie differenti e dunque gestire realtà complesse:

Le strategie di *networking* sono quelle strategie di connessione che da una parte rispettano il pluralismo e/o la modularità degli approcci teorici autonomi, ma che dall'altra parte sono interessate a ridurre la molteplicità degli approcci teorici tra loro sconnessi nelle discipline scientifiche. (...) Le strategie di *networking* sono strutturate in coppie di strategie simili, per le quali si possono fare distinzioni di grado: comprendere e rendere comprensibile, comparare e contrastare, combinare

e coordinare, integrare localmente e sintetizzare. (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008, pp. 170–171)

Queste coppie sono collocate tra due poli ideali, o strategie estreme:

- “ignorare le altre teorie”, considerando ciascuna teoria come relativa e isolata;
- “unificare globalmente”, per avere un’unica teoria.

Prediger, Bikner-Ahsbahs e Arzarello (2008) evidenziano che la maggior parte dei ricercatori che connettono teorie applica contemporaneamente più di una strategia, adottando strategie intermedie tra le due estreme (Figura 1).

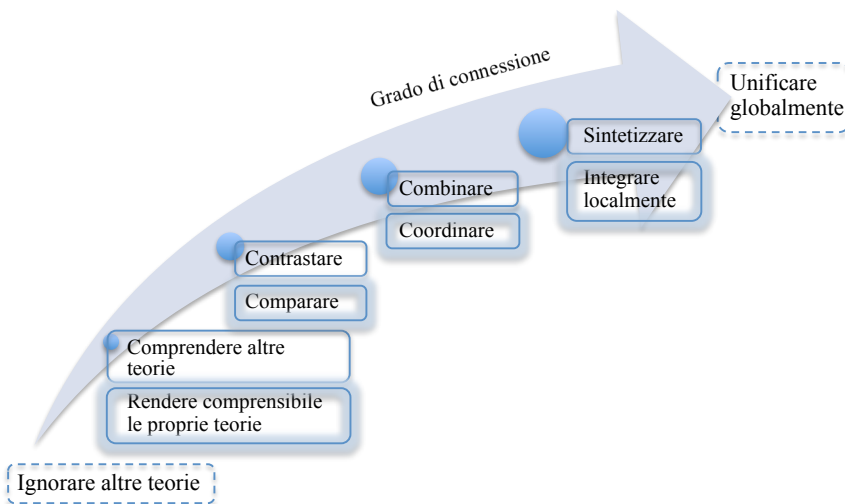


Figura 1. Strategie per connettere teorie.

Adattata da Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008, p. 170.

In particolare:

- “Comprendere” le altre teorie, e le loro articolazioni nelle pratiche di ricerca è una condizione indispensabile per connetterle.
- “Comparare” e “contrastare” le teorie sono le strategie più utilizzate. Tutte le teorie possono essere comparate o contrastate. Il “comparare” ha come scopo quello di individuare in modo generale le loro somiglianze e differenze, mentre il “contrastare” ha come scopo quello di sottolineare le loro differenze tipiche.
- “Coordinare” e “combinare” le teorie sono strategie che hanno come scopo quello di utilizzare strumenti analitici differenti per lo studio di un dato problema pratico o per l’analisi di un fenomeno empirico. Il coordinamento può essere effettuato soltanto tra teorie le cui assunzioni o principi sono tra

loro compatibili e le cui componenti empiriche o *praxeologie* (sistemi di pratiche di ricerca) sono complementari (per esempio, la teoria antropologica della didattica e lo spazio-APC).⁵ Quando gli approcci teorici sono soltanto giustapposti si parla di “combinazione”, anziché di coordinamento. La combinazione di approcci teorici non necessita della complementarità o della completa coerenza degli approcci teorici. Possono essere combinate anche teorie con assunzioni di base contraddittorie, al fine di ottenere una visione multiforme del fenomeno preso in esame (per esempio la teoria delle situazioni didattiche e le teorie socioculturali).

- “Sintetizzare” e “integrare (localmente)” le teorie sono strategie che hanno come scopo quello di sviluppare le teorie mettendo insieme, in un nuovo quadro, alcuni approcci teorici. La strategia “sintetizzare” è utilizzata per connettere due o più teorie aventi la stessa rilevanza in modo da far evolvere una nuova teoria. Se il livello di sviluppo delle teorie considerate non è lo stesso, e se ci sono soltanto alcuni concetti o aspetti di una teoria inseriti in una teoria più elaborata e dominante, si parla di “integrazione locale”.⁶

Il *networking* di teorie può essere realizzato in vari modi usando differenti strategie che si focalizzano su aspetti diversi delle teorie e per scopi differenti: comprendere le altre teorie (e la propria), comprendere meglio un dato fenomeno empirico, sviluppare una data teoria, e, più in generale, migliorare la pratica di insegnamento. Si tratta di: “un nuovo modo di guardare le teorie, che può modellare nuovi tipi di pratiche di ricerca” (Prediger, Bikner-Ahsbals, & Arzarello, 2008, p. 176).

Come afferma Radford (2008b), poiché in didattica della matematica è impossibile una teoria onnicomprensiva, è auspicabile un dialogo tra teorie che evidenzino le loro possibili connessioni. Per il *networking* è di estremo interesse considerare le teorie come terne flessibili $\tau = (P, M, D)$ di principi, metodologie e domande di ricerca paradigmatiche, in quanto la connessione

⁵ Lo spazio-APC (*spazio di Azione, Produzione e Comunicazione*) è un approccio teorico che ha come strumento di analisi fondamentale, il *semiotic bundle* (Arzarello, 2006). Il *semiotic bundle* è definito da Arzarello (2006) come una struttura dinamica costituita da una collezione di insiemi semiotici (sistemi semiotici, gesti, modi di espressione, usi di artefatti) e da un insieme di relazioni tra questi insiemi semiotici (per esempio, i modi di conversione tra gli insiemi). Tale nozione estende la definizione classica di *sistema semiotico*: un insieme di segni, un insieme di regole di produzione e di trasformazione, e una struttura di significati sottostante. Lo spazio-APC e la TAD (Teoria Antropologica della Didattica) hanno oggetti teorici coerenti ma complementari, precisamente, le *praxeologie* nella TAD e il *semiotic bundle* nello spazio-APC. Le componenti empiriche di tali teorie sono differenti, in particolare, l’analisi didattica e l’analisi semiotica, rispettivamente, nella TAD e nello spazio-APC. Tali teorie possono essere dunque localmente coordinate.

⁶ Per esempio, l’approccio semiotico-culturale (Radford, 1997) integrato con la teoria dell’*Embodied Cognition* (*cognizione incorporata nel corpo*, nel senso che la cognizione è modellata dall’interazione sensoriomotoria e del corpo con l’ambiente), che emerge dalla psicolinguistica e dalle neuroscienze, forma lo spazio-APC (Arzarello, 2006).

tra teorie può avvenire a *vari livelli*. Una connessione può essere fatta, per esempio, a livello di principi, a livello di metodologie, a livello di domande di ricerca, o di una loro combinazione.

La concettualizzazione delle teorie in termini di terne permette anche di evidenziare i limiti del *networking* di teorie. Sebbene una connessione sia sempre possibile, c'è tuttavia un limite a ciò che può essere connesso. Il limite è determinato dallo scopo della connessione, ma anche dalle peculiarità delle tre componenti (*P, M, D*) delle teorie che vengono connesse, ovvero da ciò che una teoria può legittimamente asserire sui suoi oggetti. Al di là di tale limite la teoria entra in conflitto con i suoi stessi principi.

Per esempio, l'interazione sociale nel sistema *P* di principi della teoria delle situazioni didattiche ha un ruolo e quindi un significato differente da quello che ha nel sistema *P'* delle teorie che si focalizzano sulle dimensioni affettive e motivazionali dell'apprendimento: "Nella teoria delle situazioni didattiche, l'interazione sociale non si interessa delle sue dimensioni affettive o volitive; il suo principale interesse è la progettazione di 'situazioni didattiche' e la loro 'devoluzione'" (Radford, 2008b, p. 323). Mentre nel primo caso l'interazione sociale gioca un ruolo principalmente *epistemico*, nel secondo caso gioca un ruolo soprattutto *psicologico*.

Sebbene il confronto tra teorie sia sempre possibile, la connessione di teorie presenta sempre dei limiti.

Prendendo in esame, per esempio, il costruttivismo e la teoria delle situazioni didattiche, si nota immediatamente un'apparente compatibilità. Infatti, entrambe le teorie concepiscono la conoscenza in modo adattivo, ed entrambe valorizzano l'autonomia del discente.

Tuttavia, se si scava più a fondo, ci si rende conto che ciascuna di queste teorie ricorre a un *principio di autonomia* differente: mentre nel costruttivismo il principio di autonomia del soggetto conoscente è inquadrato in un'etica di costruzioni personali e di auto-determinazione, nella teoria delle situazioni didattiche l'autonomia del soggetto conoscente è concepita come una condizione epistemica per l'acquisizione di conoscenze. (Radford, 2008b, p. 325)

Nel primo caso l'individuo è concepito come dotato della capacità di produrre ciò che von Glasersfeld (1995) chiama conoscenza "viabile" (adeguata) e tutto ciò che non proviene dall'interno dell'individuo è spesso visto come una costrizione o come un tentativo di violare il diritto dell'individuo all'auto-determinazione. Nel secondo caso, invece, la conoscenza matematica, quella culturalmente e storicamente costituita, è considerata come qualcosa di raggiungibile dall'individuo fin dall'inizio, e preesistente al processo di apprendimento; diventa dunque centrale la fase di istituzionalizzazione, nella quale l'insegnante evidenzia il carattere normativo della conoscenza.⁷

⁷ Per *istituzionalizzazione* della conoscenza si intende quel processo attraverso il quale l'insegnante riconosce, accetta, legittima la costruzione di una conoscenza o la risoluzione di

In generale, la connessione tra teorie dipende dalla compatibilità dei principi delle teorie e dagli scopi della connessione. In termini di integrazione, le teorie possono essere connesse (anche solo localmente) se i loro principi teorici (o soltanto alcuni di essi) sono “sufficientemente vicini” gli uni agli altri (Radford, 2008b).

Così, nell’ambito del *networking* di teorie, la strategia “integrare localmente” può dare origine a percorsi multi-teorici in grado di gestire in modo efficace e a più voci la complessità dei fenomeni di insegnamento-apprendimento.

4. Un dialogo a più voci

La teoria delle situazioni didattiche, le teorie socioculturali e le teorie semiotiche in didattica della matematica nelle loro diverse varianti (approccio semiotico-culturale, spazio-APC, approccio onto-semiotico, approccio semio-cognitivo, approccio semiotico-interpretativo di tradizione peirceana, teoria della mediazione semiotica, etc.) forniscono strumenti di analisi di estremo interesse per l’attuale ricerca internazionale in didattica della matematica.

La teoria delle situazioni didattiche permette un’analisi profonda e dettagliata delle relazioni che si costituiscono tra l’insegnante, l’allievo e gli elementi materiali, culturali e sociali al contorno, con l’obiettivo di un apprendimento autonomo dell’allievo; il contratto didattico è l’elemento fondante e organizzatore di tali relazioni, suscettibile di cambiamenti, ma sempre fortemente legato al contenuto matematico in gioco.

Le teorie socioculturali considerano la conoscenza come strettamente collegata sia alle attività dei singoli soggetti sia alle istituzioni culturali del contesto sociale considerato; esse mettono in evidenza le forme di pensiero che le attività matematiche veicolano, la natura degli oggetti e degli apprendimenti che emergono da tali attività e, più in generale, i ruoli dei contesti istituzionali, sociali e culturali nei processi di insegnamento-apprendimento (Radford, 1997).

Gli approcci semiotici si focalizzano sulla natura dei segni (parole, segni matematici, gesti e artefatti) che emergono dalle attività matematiche, sulle loro funzioni, sulle loro molteplici possibilità interpretative, e sulle forme di apprendimento semiotico che le attività matematiche veicolano.

In generale, in un processo di insegnamento-apprendimento, il soggetto che apprende si trova coinvolto in un’istituzione che, da una parte, prevede la realizzazione di determinate pratiche matematiche dalle quali dovranno emergere oggetti istituzionali (condivisi da una data comunità scientifica) e, dall’altra parte, esige la realizzazione da parte del singolo studente di ulteriori

pratiche matematiche dalle quali dovranno emergere oggetti personali compatibili con gli oggetti istituzionali o con le forme di pensiero matematico (teorie socioculturali).

Le pratiche istituzionali si realizzano attraverso la costruzione di adeguate situazioni di insegnamento-apprendimento, di natura dinamica, in grado di stimolare determinati tipi di apprendimenti, nell'ambito di un contratto didattico (teoria delle situazioni didattiche).

In qualsiasi tipo di pratica matematica, tuttavia, l'accesso agli oggetti matematici è soltanto semiotico, attraverso rappresentazioni semiotiche, dunque l'attività cognitiva risulta inscindibile da quella semiotica.

Nell'approccio semio-cognitivo le difficoltà più profonde, quelle che la maggior parte dei soggetti incontra nelle attività matematiche, sono ricondotte alla varietà delle rappresentazioni semiotiche utilizzate in matematica e alla complessità della loro produzione, scelta, trattamento e conversione. Non sono ricondotte alla mancanza di comprensione dei concetti matematici coinvolti, a fattori psicologici, cognitivi (in senso classico), pedagogici o sociali, ma alla complessità della gestione semiotica; gestione semiotica dalla quale l'apprendimento concettuale dipende e risulta inscindibile.

D'altra parte, l'analisi semio-cognitiva che si fonda sulla teoria dei registri di rappresentazione semiotica può essere estesa all'analisi onto-semiotica delle configurazioni di oggetti e processi che intervengono in una data attività matematica. (Uno studio comparativo tra la teoria dei registri di rappresentazione è l'approccio onto-semiotico si trova in: Pino-Fan, Guzmán, Font, & Duval, 2015).

Ma l'accesso cognitivo agli oggetti matematici si ha soltanto *attraverso* rappresentazioni semiotiche che presentano componenti di tipo differente, legate, per esempio, ad aspetti iconico-qualitativi (aspetti concreti o di somiglianza della rappresentazione con qualcos'altro di concreto), iconico-strutturali (aspetti della rappresentazione legati alla sua costruzione, a proprietà o a teoremi), di analogia (aspetti della rappresentazione posti in rapporto, non necessariamente di somiglianza iconica, con il linguaggio quotidiano o l'esperienza sensibile), indicali (aspetti di rinvio a qualcos'altro, come a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico, o a proprietà), simbolici (aspetti convenzionali della rappresentazione, come quelli legati a notazioni, definizioni, regole o vincoli d'uso). Riguardo a tali aspetti, l'approccio semiotico-interpretativo di tradizione peirceana fornisce strumenti di analisi molto interessanti. (Per approfondire su tali aspetti, si veda: Iori, 2015).

La teoria delle situazioni didattiche, le teorie socioculturali e le teorie semiotiche possono essere dunque confrontate, coordinate, combinate, o integrate localmente per descrivere aspetti differenti del medesimo fenomeno didattico; il tutto alla luce della relazione dialettica tra teorie realiste e teorie pragmatiste evidenziata da D'Amore e Godino (2006). E questo perché il

ricercatore pragmatista si focalizza anzitutto sulle domande di ricerca e utilizza differenti teorie e metodologie per ottenere spiegazioni più ampie e articolate del fenomeno didattico in esame, dunque migliori possibilità di risposta alle domande di ricerca. In altri termini, in accordo con il *paradigma di ricerca pragmatista* (Tashakkori & Teddlie, 2003), il ricercatore sceglie le teorie, i metodi, le tecniche e le procedure di ricerca che più soddisfano le esigenze e gli scopi della sua ricerca.

5. Conclusioni

I molteplici aspetti dei processi di insegnamento-apprendimento richiedono strumenti di analisi specifici, che forniscano chiavi di lettura differenti, per tener conto simultaneamente delle differenti dimensioni (affettiva, cognitiva, socioculturale, semiotica, o semio-cognitiva) dei fenomeni di insegnamento-apprendimento.

Le teorie in didattica della matematica, come tutte le teorie scientifiche, sono in continua evoluzione, si modificano e si sviluppano continuamente insieme alla ricerca stessa – da qui la *complessità* della ricerca – e possono essere confrontate, combinate, coordinate o localmente integrate – evidenziando tutta la *problematicità* della ricerca – allo scopo di ottenere un’analisi più ampia e articolata dei fenomeni di insegnamento-apprendimento della matematica. D’altra parte esse permettono di fornire all’insegnante metodologie, metodi, strumenti differenti per stimolare un insegnamento-apprendimento della matematica da più punti di vista, evitando il ricorso a metodi o strumenti pre-confezionati o alternativi di dubbia efficacia, in quanto non sottoposti al severo giudizio scientifico (D’Amore, 2016).

Riferimenti bibliografici

- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. In L. Radford & B. D’Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 267–299.
- Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd ed., pp. 746–783). New York: Routledge.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33–115.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. Dordrecht: Kluwer.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73–112.

- Cobb, P. (1988). The tension between theories of learning and instruction in mathematics education. *Educational Psychologist*, 23(2), 87–103.
- Creswell, J. W. (2014). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4th ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.
- D’Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 44–48.
- D’Amore, B. (2007). Voci per il dizionario. In F. Frabboni, G. Wallnöfer, N. Belardi, & W. Wiater (Eds.). *Le parole della pedagogia: Teorie italiane e tedesche a confronto* (Didattica disciplinare, pp. 72–75; Formazione in scienze naturali, pp. 140–142; Formazione in matematica, pp. 145–147; Scienza, pp. 335–337). Torino: Bollati Boringhieri.
- D’Amore, B. (2016). A proposito di “metodi di insegnamento” univoci: Errori pedagogici, epistemologici, didattici e semiotici delle metodologie univoche. *La Vita Scolastica web*. Disponibile su <http://www.giuntiscuola.it/lavitascolastica/magazine/articoli/a-proposito-di-metodi-di-insegnamento-univoci/>
- D’Amore, B., & Godino, D. J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, 20(1), 9–38.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5(1), 37–65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (2006a). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica*, 20(4), 585–619.
- Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103–131.
- Duval, R. (2012). Quelles théories et quelles méthodes pour les recherches sur l’enseignement des mathématiques? *Praxis Educativa*, 7(2), 305–330.
- Duval, R. (2015). Cuestionamientos sobre la “elección” y utilización de teorías en mathematics education. In B. D’Amore & M. I. Fandiño Pinilla (Eds.), *Didáctica de la matemática: Una mirada internacional, empírica y teórica* (pp. 159–182). Chia, Colombia: Universidad de La Sabana.
- Ernest, P. (1991). Constructivism, the psychology of learning, and the nature of mathematics: Some critical issues. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of 15th International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 25–32), Assisi.
- Ernest, P. (1998). The epistemological basis of qualitative research in mathematics education: A postmodern perspective. In A. R. Teppo (Ed.), *Qualitative Research Methods in Mathematics Education (Journal for Research in Mathematics Education, Monograph No. 9)*, (pp. 22–39). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. New York: Aldine.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2-3), 237–284.

- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In A. Sierpiska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177–195). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Goldin, G. (1990). Chapter 3: Epistemology, constructivism, and discovery learning in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, 4, 31–47 and 195–210.
- Hanson, N. R. (1958). *Patterns of discovery: An inquiry into the conceptual foundations of science*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hoffmann, M. H. G. (2006). What is a “semiotic prospective”, and what could it be? Some comments on the contributions to this special issue. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 279–291.
- Iori, M. (2015). *La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica* (Tesi di dottorato, Università di Palermo, Italia). Disponibile su <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/Phd/Iori/Iori.htm>
- Kuhn, T. S. (1962). *The structure of scientific revolutions*. Chicago: University of Chicago Press.
- Lakatos, I., & Musgrave, A. (Eds.) (1970). *Criticism and the growth of knowledge*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Pino-Fan, L., Guzmán, I., Font, V., & Duval, R. (2015). The theory of registers of semiotic representation and the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction: Linking looks for the study of mathematical understanding. In K. Beswick, T. Muir, & J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 33–40). Hobart, Australia: PME.
- Prediger, S., Bikner-Ahsbahr, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education*, 40(2), 165–178.
- Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26–33.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37–70.
- Radford, L. (2008a). Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. *Working paper, ICMI 11 Survey Team 7: The notion and role of theory in mathematics education research* (pp. 1–17).
- Radford, L. (2008b). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education*, 40(2), 317–327.
- Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación: El caso de la didáctica de las matemáticas [The evolution of paradigms and perspectives in research: The case of mathematics education]. In J. Vallès, D. Álvarez, & R. Rickenmann (Eds.), *L'activitat docent intervenció, innovació*,

- investigació [Teacher's activity: Intervention, innovation, research]* (pp. 33–49), Girona (Spain).
- Sáenz-Ludlow, A., & Presmeg, N. (2006). Guest editorial: Semiotic perspectives on learning mathematics and communicating mathematically. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 1–10.
- Tashakkori, A., & Teddlie, C. (Eds.). (2003). *Handbook of mixed methods in social and behavioral research*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. London: The Falmer Press.